

# 複素 FFT を利用した形状分析法

— Figure analysis method by using complex FFT —

東 恒 人\*・中川 紀 美 雄\*\*

\*岡山理科大学工学部情報工学科

\*\*岡山理科大学工学部電子工学科

(1992年9月30日 受理)

## 1. ま え が き

FFT は、電気工学、電子工学、機械工学等各方面で利用され、波形分析、振動分析等において威力を発揮している。波形や振動等の分析の場合、FFT の入力関数は実数である。ここで、入力関数が複素数のときの FFT を複素 FFT と呼称すると、複素 FFT は通常の FFT に比べて使用例は少ないようである。

本論文では、複素 FFT のスペクトルの特徴、通常の FFT のスペクトルとの相違点、また、その特徴を利用した分析法について論じている。

## 2. 複素 FFT スペクトルの特徴

### 2. 1 複素入力関数と複素フーリエ変換成分の関係<sup>1)</sup>

複素フーリエ変換の具体的処理法が複素 FFT であり、それは以下のように表せる。複素関数  $w(j)(j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$  は次式のようにフーリエ展開される。

$$w(j) = u(j) + iv(j) \quad (1)$$

$$w(j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \exp(i2\pi jk/N) \quad (2)$$

$u(j), v(j)$  は実数、 $C_k$  は複素フーリエ係数であり、次式で表すことができる。なお、 $A_k, B_k$  は実数である。

$$C_k = (1/N) \sum_{j=0}^{N-1} w(j) \exp(-i2\pi jk/N) = A_k + iB_k \quad (3)$$

ここで、次式のように変数変換する。

$$C_m = \begin{cases} C_k, & m = k, & (k = 0, 1, \dots, N/2) \\ C_k, & m = k - N, & (k = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N-1) \end{cases}$$
$$A_m = \begin{cases} A_k, & m = k, & (k = 0, 1, \dots, N/2) \\ A_k, & m = k - N, & (k = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N-1) \end{cases}$$

$$b_m = \begin{cases} B_k, & m = k, \quad (k = 0, 1, \dots, N/2) \\ B_k, & m = k - N, (k = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N - 1) \end{cases} \quad (4)$$

なお,  $i = (-1)^{1/2}$  である。

このとき,

$$w(j) = \sum_{m=-(N/2-1)}^{N/2-1} c_m \exp(i2\pi jm/N) \quad (5)$$

となり,  $c_m$  は次式で表すことができる。

$$c_m = (1/N) \sum_{j=0}^{N-1} w(j) \exp(-i2\pi jm/N) = a_m + ib_m \quad (6)$$

以下, 係数  $\{(a_m, b_m), m = 0, 1, \dots, N/2 - 1\}, \{(a_m, b_m), m = -1, -2, \dots, -N/2\}$  の組をそれぞれ複素 FFT 成分の低次項, 高次項と呼称する。

## 2. 2 複素 FFT の特徴

複素入力関数  $w(j)$  の実数成分  $u(j)$  と虚数成分  $v(j)$  の各種の組み合わせの例を表 1 に示す。数値計算に用いた  $V_p(j)$  と  $V_n(j)$  の具体的な形状を図 1 に示す。 $V_p(j)$  と  $V_n(j)$  は互いに位相が 180 度異なる波形であり,  $V_{p/2}(j)$  は振幅が  $V_p(j)$  の半分の波形を,  $V_{p2}(j)$  の波連長は  $V_p(j)$  の波連長の 2 倍である。

図 2 は, 表 1 に示す複素入力関数に対する複素 FFT 成分について, その実数成分  $a_m$  と虚数成分  $b_m$  の関係を示したものである。横軸は実数成分  $a_m$  の大きさを, 縦軸は虚数成分  $b_m$  の大きさを表している。

この座標系において次数  $m$  の複素 FFT 成分は 1 点  $(a_m, b_m)$  で表示でき, この点と原点を結ぶ直線により, 次数  $m$  毎の複素 FFT 成分間の位相関係を把握することができる。なお, 表示に当たって, 全次数の複素 FFT 成分 (実数成分  $a_m$  と虚数成分  $b_m$ ) を, それらの絶対値換算での最大値  $MAX$  ( $MAX = \max\{|a_m|, |b_m|, m = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 - 1\}$ ) で正規化している。なお, 図中の数字は  $m$  の代表的な値を示している。

図 2 から複素 FFT の特徴として以下のことが言える。

①~⑧のような複素入力関数  $w(j)$  の場合, 低次項  $(a_m, b_m)$  と高次項  $(a_{-m}, b_{-m})$  は原点を通る直線に対して軸対称の位置関係にあり, このような直線は例えば①の場合, 実軸である。

複素入力関数  $w(j)$  が①→⑧に変化するに従って, 対称軸は原点を中心に  $-45$  度ずつ回転する。このような対称性が保持されているということは低次項のパワースペクトル成分  $p_m = (a_m^2 + b_m^2)^{1/2}$  と高次項のパワースペクトル成分  $p_{-m} = (a_{-m}^2 + b_{-m}^2)^{1/2}$  が等しいことを意味している。通常の波形分析において, FFT の複素入力関数  $w(j)$  は①のように実数成分  $u(j)$  のみであり,  $p_m = p_{-m}$  となる。従って, 入力関数  $w(j)$ , 換言すれば, 波形の評価に当た

表 1 具体的な組み合わせの例と特徴

組み合わせ番号	実数部 $u(j)$	虚数部 $v(j)$	特 徴
①	$V_p(j)$	0	○低次項 ( $a_m, b_m$ ) と高次項 ( $a_{-m}, b_{-m}$ ) は原点を通る直線に対して軸対称
②	$V_p(j)$	$V_n(j)$	
③	0	$V_n(j)$	○ $p_m = p_{-m}$
④	$V_n(j)$	$V_n(j)$	
⑤	$V_n(j)$	0	
⑥	$V_n(j)$	$V_p(j)$	
⑦	0	$V_p(j)$	
⑧	$V_p(j)$	$V_p(j)$	
⑨	$V_p(j)$	$V_{p/2}(j)$	○上記のような直線は存在しない。
⑩	$V_p(j)$	$V_{2p}(j)$	○ $p_m \neq p_{-m}$

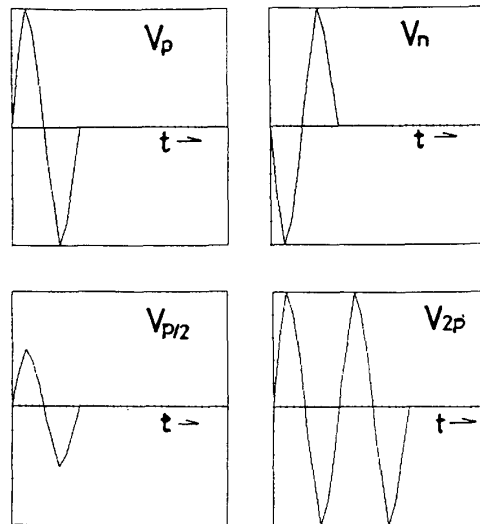
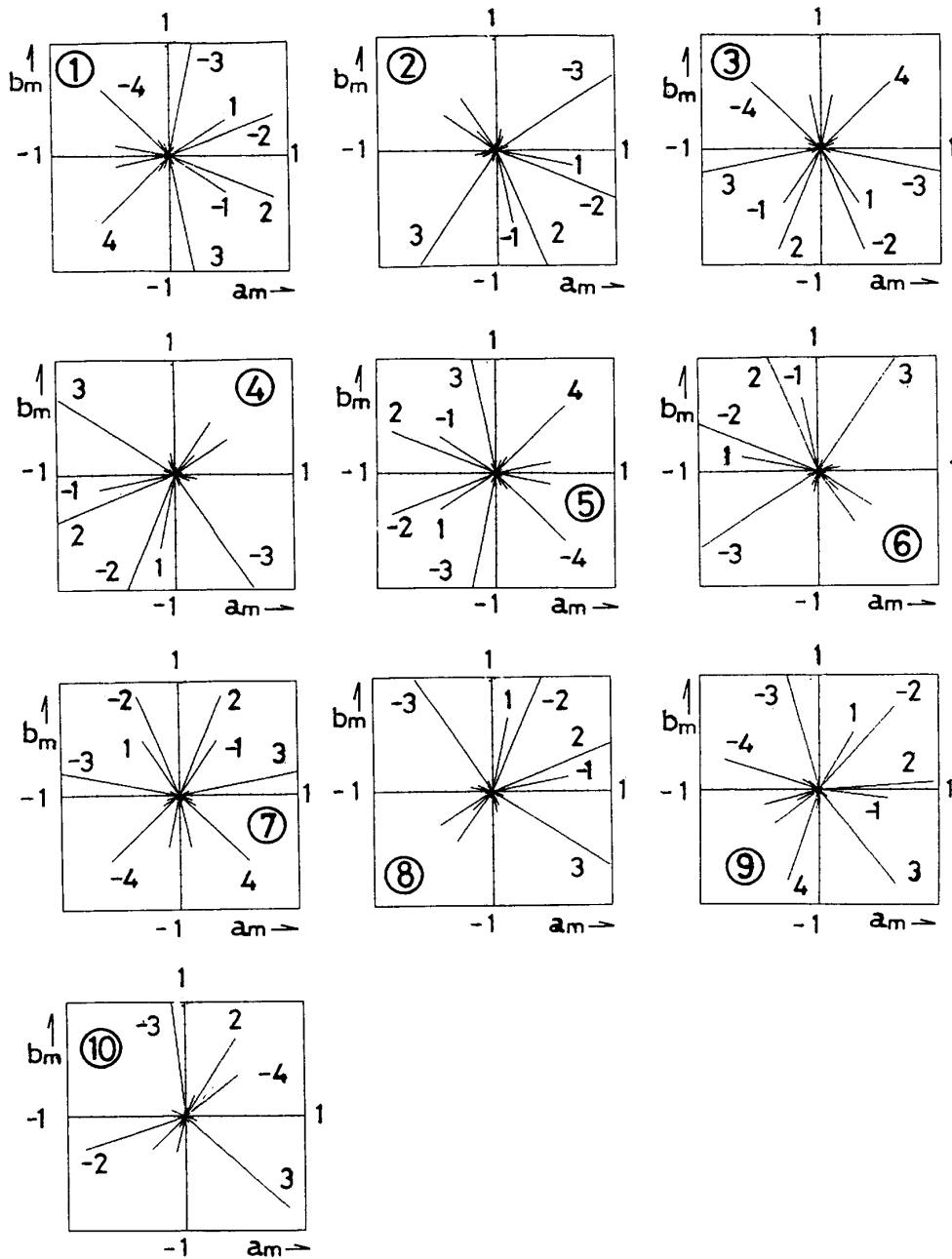


図 1 複素入力関数  $w(j)$  と複素 FFT 成分の位相関係

っては、 $p_m, p_{-m}$  のうちのどちらか一方のパワースペクトル成分を用いれば良い。

しかしながら、⑨、⑩のように、実数成分と虚数成分が互いに大きさあるいは形状が異なるような複素入力関数の場合には、低次項 ( $a_m, b_m$ ) と高次項 ( $a_{-m}, b_{-m}$ ) との間に対称性を保持するような直線は存在しなくなる。このことは、低次項のパワースペクトル成分  $p_m$  と高次項のパワースペクトル成分  $p_{-m}$  がもはや等しくないことを意味している。従って、この場合、複素入力関数  $w(j)$  を評価するに当たっては、低次項のパワースペクトル  $p_m$  のみで評価するのではなく、高次項のパワースペクトル成分  $p_{-m}$  も考慮すべきである。

以上の結果を表 1 にまとめて示す。

図2 複素入力関数  $w(j)$  の例

### 3. 複素 FFT の応用例

#### 3.1 形状の表現法

輪郭線を複素平面で表現すると、輪郭線を表す点列の各々は次式で表すことができる。

$$z(j) = x(j) + iy(j) \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (7)$$

この輪郭線は点列を折れ線  $C$  で連結したものである。ここで、各折れ線の長さを一定長の  $\delta$  の線分とする。このとき、輪郭線の形状は隣接折れ線間の角度情報  $w(j)$  として得られる。

この角度情報は、複素数の定義から、次式で表せる<sup>2)-5)</sup>。

$$w(j) = \{z(j) - z(j-1)\} / \delta = \exp\{i\theta(j)\} \tag{8}$$

ここで、

$$\delta = |z(j) - z(j-1)| \tag{9}$$

この角度情報  $w(j)$  を複素入力関数とみなすと、形状の特徴は角度情報  $w(j)$  を複素フーリエ分析することによって得られる。

### 3. 2 分析例<sup>5)</sup>

輪郭線形状の例として、手書き文字を取り上げ、文字間の特徴分析を行った。

手書き文字の入力にスタイラスペンを用いた。以下、分析結果の例として、“a”、“b”、“c”の三文字について示す。

図3、4、5は、それぞれ“a”、“b”、“c”の3種類の文字について、上段に、入力文字とそのときの位相特性  $(a_m, b_m)$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2 - 1$ )、下段に、入力文字の形状の特徴を最小限保存するのに必要な複素 FFT 成分とそのときの再生形状 (逆複素 FFT 結果) ならびにそのときの位相特性を表したものである。

図から以下のことがわかる。

①形状の特徴を決定づけるような複素 FFT 成分について、低次項  $(a_m, b_m)$  の組と高次項  $(a_{-m}, b_{-m})$  の組には対称となるような直線は必ずしも存在しない。

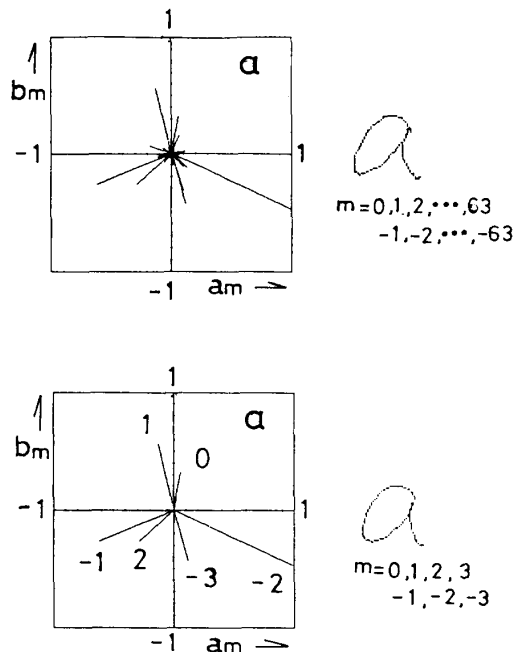


図3 文字“a”の位相特性

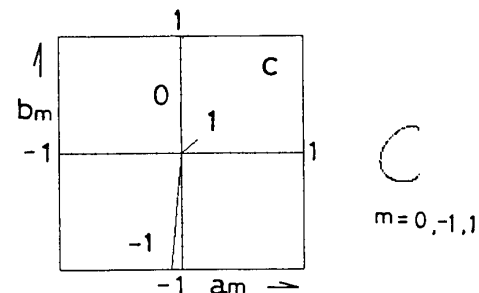
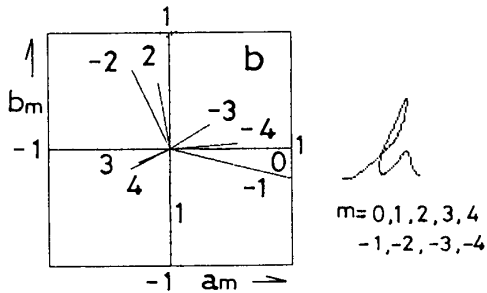
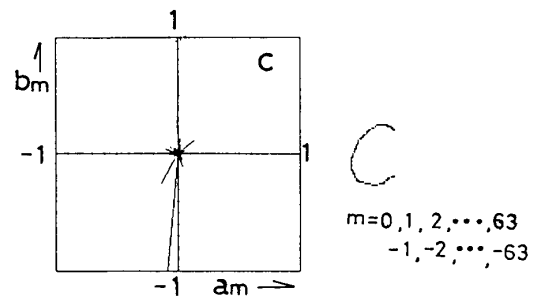
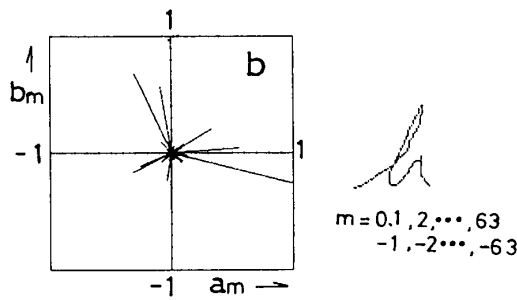


図4 図4 文字“b”の位相特性

図5 文字“c”の位相特性

②元の形状の特徴を保持するためには、パワースペクトル  $p_m = (a_m^2 + b_m^2)^{1/2}$ ,  $\{m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N/2-1)\}$  の大きい複素 FFT 成分  $(a_m, b_m)$  の組が存在する。

③ $|m|$  が小さい成分は概略形状に、 $|m|$  が大きい成分は微細な形状に影響を与える。

④文字間の形状の相違は、支配要因となる複素 FFT 成分  $(a_m, b_m)$  の組の次数  $m$  に対する位相分布が異なることに起因する。

以上のように、複素 FFT 成分間の低次項と高次項の位相特性に注目することにより、形状の特徴を分析できることがわかる。

### 3.3 他への応用について

複素 FFT の特徴を利用しうる他の応用として、前項までの議論から、形状の分析、形状識別、形状の記録、伝送を課題とする分野が考えられる。対象としての例を挙げると、

- ①実態形状の輪郭
- ②カオス、フラクタルのような数理図形
- ③複素平面上での軌跡パターン等<sup>(6,7)</sup>

が考えられる。

これらの形状としての……らしきの成分を形状分析する場合、複素 FFT 成分の主要な成分が把握できていれば形状分析できたことになる。

また、これらの形状の識別する場合、複素 FFT 成分のうち、主要成分間の相違により種類の区別を行い、同一の主要成分を有する形状に対しては、残る項を用いて、同種類に属する個体間の区別ができる。

さらに、これらの形状を記録、伝送する場合、複素 FFT 成分のうち少数の主要成分を用いて複素逆 FFT し、原形状と視覚的に大差のない再生図形が得られれば、原形状データの代わりに少数の主要な複素 FFT 成分のみを記録あるいは伝送すれば、情報圧縮できる。

以上のように複素 FFT を用いた各種の応用が考えられる。

#### 4. む す び

複素 FFT 成分と複素入力関数の関係を調べた結果、成分間に以下の特徴がある。形状の特徴を決定づけるような複素 FFT 成分について、低次項 ( $a_m, b_m$ ) の組と高次項 ( $a_{-m}, b_{-m}$ ) の組が対称となるような直線が必ずしも存在しないので、 $\pm m$  の FFT 成分を考慮して形状分析すること。

また、この特徴を利用して形状分析する際には以下の点に留意すべきである。

- ①元の形状の特徴は、パワースペクトル  $p_m$  の大きい複素 FFT 成分 ( $a_m, b_m$ ),  $\{m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N/2-1)\}$  の組によって支配されるので、パワースペクトル  $p_m$  の大きな成分 ( $a_m, b_m$ ) に注目して分析すること。
- ②概略形状を分析するには  $|m|$  が小さい成分のみを考慮し、微細な形状まで分析するには  $|m|$  の大きな成分まで考慮すること。
- ③文字間の形状の特徴の相違は、支配要因となる複素 FFT 成分 ( $a_m, b_m$ ) の組の次数  $m$  に対する位相分布の違いを分析すること。

以上のように、複素入力関数を用いて分析する場合、複素 FFT 成分の高次項と低次項の両方に注目する必要がある。また、これらの項に注目することにより、従来よりも詳細な分析ができる可能性がある。

#### 参考文献

- 1) 上坂吉則：“開曲線にも適用できる新しいフーリエ記述子”，信学論(A), Vol. J 67-A, No. 3, pp. 166-173, 1984。
- 2) 大友照彦, 原 健一：“線図形の曲がりの特徴としオンライン手書き漢字認識”，信学論(D-II), J 73-D-II, No. 4, pp. 519-525, 1990。
- 3) 大友照彦, 石谷幹夫, 原 健一：“神経回路モデルを用いた手書き漢字認”，信学論(D-II), J 73-D-II, No. 8, pp. 1275-1280, 1990。
- 4) 相原恒博, 大上健二, 松岡 靖：“人間の横顔認識における P 形フーリエ記述子の有効個数について”，研究速報, 信学論(D-II), J 74-D-II, No. 10, pp. 1486-1487, 1991。
- 5) 東 恒人：“P 形フーリエ記述形状の位相特性からの分析”，研究速報, 信学論(D-II), vol. J 75-D-II, No. 10, pp. 1743-1746, 1992。
- 6) 星 亮, 坪井 浄, 岡部敏弘：“TDR 法による木材含水率の測定”，日本木材学会, 第38回日本木材学会大会研究発表要旨, p. 479 (昭63)。
- 7) 東 恒人, 石原浩志：“パルス反射測定法の生体の複素比誘電率の周波数特性計測への応用”，信学論(A), Vol. J 72-A, No. 5, pp. 841-849, 1989。

## Figure Analysis Method by using complex FFT

Tsunehito HIGASHI and Kimio NAKAGAWA

*Faculty of Engineering,*

*Okayama University of Science,*

*Okayama-shi*

(Received September. 30 1992)

This paper describes characteristics of complex FFT (CFFT) and an example of figure analysis by using CFFT.

In case that input function is complex (real component is not equal to imaginary component and real component is not zero), CFFT components against complex input function (CIF) have different characteristics from conventional FFT components against real function. In case that outline figure, which is pictured on the surface of complex plane, can be represented by complex function through special process, we can treat the function as CIF and can analyze the CIF by using CFFT. As a result, we can analyze or recognize pattern of outline figures precisely and effectively.