

超音速非定常流数値解析用 パネル法プログラムの定式化

丸山 祐一・澤田 照夫

岡山理科大学工学部機械工学科

(1991年9月30日 受理)

1. まえがき

航空機の空力設計のためには、空力静特性、即ち一定の速度と姿勢角での飛しょう時の空力特性の他に、姿勢が変化する際の空力動特性や、翼などの弾性振動と空気力との相互作用により生ずるフラッタ特性を精密に予測する必要がある。後二者のためには、非定常空気力の定量把握が必要不可欠となる。差分法でこの問題を扱おうとする場合、3次元格子生成の困難さのほかに、安定性の要求から生じる Courant 数への制約が定常流の場合よりも厳しくなり時間ステップ幅が制限されるため、1ケースの計算に膨大な時間と費用を要するという欠点がある。従って空力設計への応用には、より簡略な手法との併用が効率的である。パネル法は、線形近似を前提とした手法であり、複雑形状への適合性と計算の小規模性から、上記目的に最も適した方法と言える。中でも境界要素型のパネル法（境界要素法）は、従来の超音速非定常流解析用のパネル法プログラム¹⁻³⁾と比較して、(1)翼と胴の一貫した取扱いによる簡略化、(2)翼厚効果の取り込み、(3)線形近似が妥当な範囲内での胴体形状の任意性、(4)同じ範囲内での迎角の任意性、などの特徴を合わせ持ち、その汎用性と簡略性の点で最も優れている。

境界要素法の一つである Morino の解法⁴⁾は、既に亜音速非定常流の解析に応用され多くの成果を上げている⁵⁾が、超音速非定常流への適用例は非常に単純なケースに限られている⁶⁾。本論文では、離散化手法の工夫により、任意形状まわりの超音速非定常流解析に同解法を適用できるプログラムの定式化を行ったので報告する。以下では、基礎式の導出、離散化方法、数値解法について順に述べる。

本論文で使用するおもな記号を以下に示す。

a_{ij} : 影響係数 (31)式を参照)

a_∞ : 主流における音速

B : (8)式で定義

b_{ik} : 影響係数 (35)式で定義)

E : (5)式で定義

i : 検査点番号

- J_{xy} : (21)式で定義
 j : 節点番号
 k : パネル番号
 M : 主流 Mach 数 ($\equiv U_\infty/a_\infty$)
 n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} : 境界面の単位法線ベクトル
 $Q_{n,SD}, Q_{n,US}$: (12), (13)式で定義
 $\hat{Q}_{n,US}$: (18)式で定義
 r_B : 双曲距離 ((7)式で定義)
 $S(x, y, z, t)$: 境界面 Σ を定義するスカラー関数
 s : 複素振動数
 s_0 : (19)式で定義
 T_\pm : 遅延時間 ((6)式で定義)
 t : 時刻
 U_∞ : 主流速度
 x, y, z : 空間座標
 $\partial/\partial n_{cl}$: 余法線方向の空間微分 ((17)式で定義)
 $\hat{\mu}_\pm, \hat{\mu}$: 非定常二重湧き出し
 Σ : 境界面
 Σ_D : 境界面のうち点 (x, y, z) の依存領域
 $\hat{\sigma}_\pm$: 非定常湧き出し
 ϕ : 擾乱速度ポテンシャル
 $\hat{\phi}_{US\pm}, \hat{\phi}_{US}$: (18)式で定義

下付添字

- B : 機体座標系
 P : パネル座標系
 R : 主流座標系 (本文第 2 章では省略)
 SD : 定常部分
 US : 非定常部分
 0 : (A.5) 式により定義される座標系
 1 : 境界面上での値 (付録 A では省略)

2. 基礎式の導出

非定常流において、線形化された Euler 方程式は、

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi = 0 \tag{1}$$

と表される。ここで主流方向に x 軸を設定した。境界面 Σ を

$$S(x, y, z, t) = 0 \tag{2}$$

により定義すると、超音速流において(1)式は、

$$E\phi(x, y, z, t) = \phi_+(x, y, z, t) + \phi_-(x, y, z, t) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \phi_\pm(x, y, z, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_B^{T_\pm}} \left[\nabla_1 S \cdot \nabla_1 \phi - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{dS}{dt_1} \frac{d\phi}{dt_1} \right]^{T_\pm} \frac{1}{r_B} \frac{d\Sigma^{T_\pm}}{|\nabla_1 S^{T_\pm}|} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_B^{T_\pm}} \left[\nabla_1 S \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{r_B} \right) - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{dS}{dt_1} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{1}{r_B} \right) \right]^{T_\pm} \phi^{T_\pm} \frac{d\Sigma^{T_\pm}}{|\nabla_1 S^{T_\pm}|} \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_B^{T_\pm}} \left[\nabla_1 S \cdot \nabla_1 T_\pm - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{dS}{dt} \left(1 + U_\infty \frac{\partial T_\pm}{\partial x_1} \right) \right]^{T_\pm} \frac{\phi^{T_\pm}}{r_B} \frac{d\Sigma^{T_\pm}}{|\nabla_1 S^{T_\pm}|} \end{aligned} \tag{4}$$

(複号同順)

$$E \begin{cases} = 1 & (\text{計算領域内, } S > 0) \\ = 1/2 & (\text{境界面上, } S = 0) \\ = 0 & (\text{計算領域外, } S < 0) \end{cases} \tag{5}$$

$$T_\pm = \frac{1}{a_\infty B^2} [M(x - x_1) \pm r_B] \tag{6}$$

(複号同順)

$$r_B = \sqrt{(x - x_1)^2 - B^2[(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]} \tag{7}$$

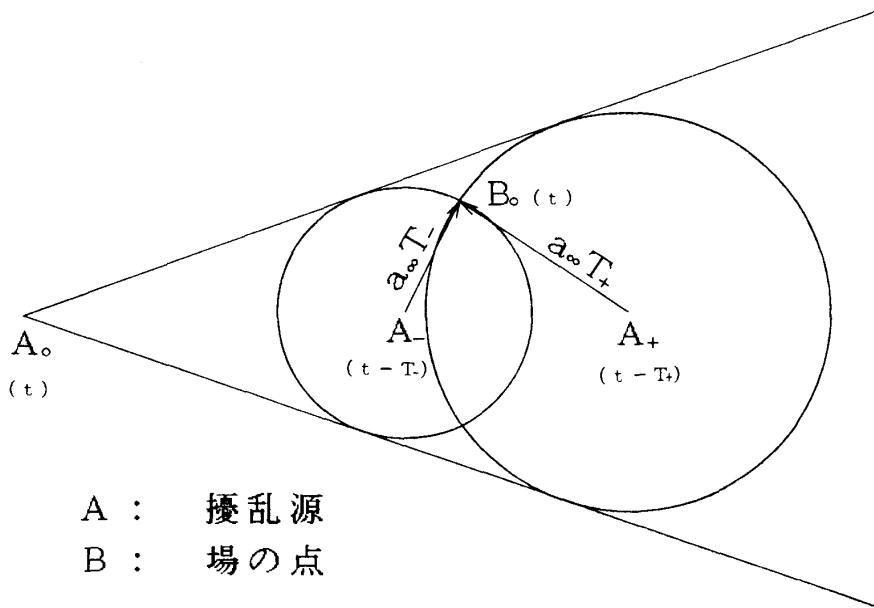


図1 超音速流における遅延時間の概念図
(基準系を主流に固定させて表示)

$$B = \sqrt{M^2 - 1} \quad (8)$$

となる⁴⁾。ここで Σ_D は境界面 Σ のうち場の点 (x, y, z) の上流 Mach cone 内の部分 (依存領域), $*$ は積分の有限部分⁷⁾, 下付添字 $_1$ は境界面上での値, 上付添字 T_{\pm} は時刻 $t_1 = t - T_{\pm}$ での値を表す。超音速流の特徴として, 2種類の遅延時間 T_+ と T_- を含む項の和として ϕ が表される (図1参照)。

次に微小複素振動の前提 (振幅 \ll 流れ場の代表長) を置くと,

$$S(x, y, z, t) = S_{SD}(x, y, z) + Re\{S_{US}(x, y, z)e^{st}\} \quad (9)$$

と表すことができる。ただし S_{US}, s は複素数であり, L を代表長として, $|S_{US}| \ll |\nabla S_{SD}|L$ が成り立っている。ここで $t = 0$ における複素振幅の境界面に垂直な成分 A は

$$A(x_1, y_1, z_1) = -\frac{S_{US}(x_1, y_1, z_1)}{|\nabla_1 S_{SD}(x_1, y_1, z_1)|} \quad (10)$$

となり, 境界条件として A の分布を任意に設定できるので, 剛体振動・変形振動の双方が取扱可能である。境界面 Σ 上で非透過境界条件を課すと,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_1} = Q_{n, SD} + Re\{Q_{n, US} e^{st}\} \quad (11)$$

$$Q_{n, SD} \equiv -\frac{1}{|\nabla_1 S_{SD}|} \frac{\partial S_{SD}}{\partial x_1} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_{n, US} &\equiv -\frac{1}{|\nabla_1 S_{SD}|} \left(\frac{s}{U_{\infty}} S_{US} + \frac{\partial S_{US}}{\partial x_1} \right) \\ &= \left(\frac{s}{U_{\infty}} A + \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで $\partial/\partial n_1$ は境界面の法線方向の微分を表す。次に

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_{SD}(x, y, z) + Re\{\phi_{US}(x, y, z)e^{st}\} \quad (14)$$

$\phi_{SD} : S = S_{SD}$ の場合の ϕ (定常解)

と置き, 微小振動の前提より関数 S を定常項 S_{SD} で置き換え, 従って境界面の位置を定常状態での位置 $S_{SD} = 0$ とし, さらに(4)式右辺第一項の d/dt_1 を含む項を無視すると⁴⁾,

$$E\phi_{US}(x, y, z) = \phi_{US+}(x, y, z) + \phi_{US-}(x, y, z) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_{US\pm}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_D}^* \phi_{US} \frac{\partial}{\partial n_{c1}} \left(\frac{e^{-sT_{\pm}}}{r_B} \right) d\Sigma \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_D} Q_{n, US} \frac{e^{-sT_{\pm}}}{r_B} d\Sigma \end{aligned} \quad \text{(複号同順)} \quad (16)$$

となる。ここで $\partial/\partial n_{c1}$ は余法線方向への微分

$$\frac{\partial}{\partial n_{c1}} = -B^2 n_{x1} \frac{\partial}{\partial x_1} + n_{y1} \frac{\partial}{\partial y_1} + n_{z1} \frac{\partial}{\partial z_1} \quad (17)$$

を表す。

湧き出し成分における d/dt_1 を含む項の無視は、余法線方向への微分を法線方向への微分 (11式) で置き換えたことに相当している。この点については、文献4に示された理論的根拠は必ずしも明確ではなく、超音速定常流の場合には一部のケースでこの近似により無視できない誤差が発生することが確認されている⁸⁾。本論文は、仮に上述の近似を前提とした場合の定式化手順と理解されたい。なお、より厳密な速度境界条件スキームへの拡張は容易であり、来年度の本紀要で報告の予定である。

数値計算のためには、(15)、(16)式は以下の様に変形した方が便利である。即ち

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_{US}(x, y, z) &= \phi_{US}(x, y, z) e^{s_0 M x} \\ \hat{\phi}_{US\pm}(x, y, z) &= \phi_{US\pm}(x, y, z) e^{s_0 M x} \\ \hat{Q}_{n, US}(x_1, y_1, z_1) &= Q_{n, US}(x_1, y_1, z_1) e^{s_0 M x_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$s_0 = \frac{s}{a_\infty B^2} \quad (19)$$

を定義した上で、(15)、(16)式より

$$E \hat{\phi}_{US}(x, y, z) = \hat{\phi}_{US+}(x, y, z) + \hat{\phi}_{US-}(x, y, z) \quad (15')$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{US\pm}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_D}^* \hat{\phi}_{US}(1 \pm s_0 r_B) e^{\mp s_0 r_B} \frac{\partial}{\partial n_{c1}} \left(\frac{1}{r_B} \right) d\Sigma \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_D} Q_{n, US} \frac{e^{\mp s_0 r_B}}{r_B} d\Sigma \end{aligned} \quad \text{(複号同順)} \quad (16')$$

を得る。

3. 離散化方法

(15')、(16')式を数値的に解いて ϕ_{US} の分布を得るには、本来任意の形状を持つ境界面 Σ

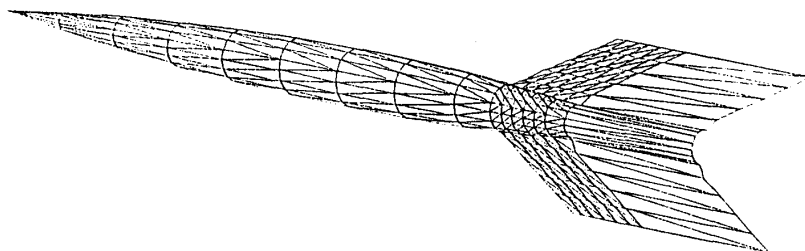
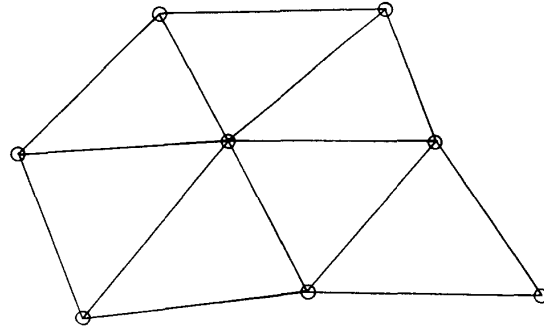


図2 パネル集合体の例 (AGARD-A 風洞検定用標準模型)



○ 節点

図3 パネル及び節点

を有限な大きさのパネルの集合体として近似する必要がある。本定式化においては、二重湧き出しに1次分布を用いる必要(後述)から三角形のパネルを用い、各共通頂点を節点(nodal point)と名づけることにする(図2, 3参照)。(16')式右辺の積分は各パネルごとに計算される。三角形は常に一つの平面に含まれることから、各パネル面内に2軸を含む座標系(パネル座標系)が定義できる。付録Aに従ってパネル座標 (x_P, y_P, z_P) を定義すると、(16')式右辺のうち k 番目のパネル面 Σ^k からの寄与は、

$$[\hat{\phi}_{US\pm}(x_P, y_P, z_P)]_k = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} \hat{\phi}_{US}(1 \pm s_0 r_B) e^{\mp s_0 r_B} \frac{\partial}{\partial z_{P1}} \left(\frac{1}{r_B} \right) dx_{P1} dy_{P1} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} \hat{Q}_{n, US} \frac{e^{\mp s_0 r_B}}{r_B} \frac{dx_{P1} dy_{P1}}{J_{xy}} \quad (\text{複号同順}) \quad (20)$$

$$J_{xy} = B \sqrt{1 - M^2 n_{xR1}^2} \quad (21)$$

$$r_B = \sqrt{(x_P - x_{P1})^2 - (y_P - y_{P1})^2 - (z_P - z_{P1})^2} = \sqrt{(x_R - x_{R1})^2 - B^2[(y_R - y_{R1})^2 + (z_R - z_{R1})^2]} \quad (22)$$

Σ_D^k : Σ^k のうち検査点 (x_P, y_P, z_P) の上流Mach cone内の部分

となる。ここで2章で用いた座標系(主流座標系)には、パネル座標系と区別するため添字 R をつけた。

超音速定常流を解く際には、パネルの継目で二重湧き出しの面密度に不連続があると、その継目から下流に向けた特性面を横切ってポテンシャルの不連続が発生し、計算に悪影響を与えることが経験的に知られている⁹⁾。非定常流解析においても、 $\hat{\mu}_{\pm}(\equiv \phi_{US\pm}(1 \pm s_0 r_B) e^{\mp s_0 r_B})$ の分布に対し同じ問題が生ずると予測される。従って定常流の場合^{8,10)}に習い、継目での連続性を保つために各パネル内で $\hat{\mu}(\equiv \hat{\mu}_+ + \hat{\mu}_-)$ を座標の1次関数

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_x x_{P1} + \hat{\mu}_y y_{P1} + \hat{\mu}_0 \quad (23)$$

に従い分布させる。パネルに接する3つの節点の番号を j_1, j_2, j_3 とすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_x \\ \widehat{\mu}_y \\ \widehat{\mu}_0 \end{pmatrix}_k &= \mathbf{P}_k \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_{j_1} \\ \widehat{\mu}_{j_2} \\ \widehat{\mu}_{j_3} \end{pmatrix}_k \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} y_{Pj_2} - y_{Pj_3}, & y_{Pj_3} - y_{Pj_1}, & y_{Pj_1} - y_{Pj_2} \\ x_{Pj_3} - x_{Pj_2}, & x_{Pj_1} - x_{Pj_3}, & x_{Pj_2} - x_{Pj_1} \\ x_{Pj_2}y_{Pj_3} - y_{Pj_2}x_{Pj_3}, & x_{Pj_3}y_{Pj_1} - y_{Pj_3}x_{Pj_1}, & x_{Pj_1}y_{Pj_2} - y_{Pj_1}x_{Pj_2} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_{j_1} \\ \widehat{\mu}_{j_2} \\ \widehat{\mu}_{j_3} \end{pmatrix}_k \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} x_{Pj_1} & y_{Pj_1} & 1 \\ x_{Pj_2} & y_{Pj_2} & 1 \\ x_{Pj_3} & y_{Pj_3} & 1 \end{pmatrix}_k \quad (25)$$

である。ここで各項はパネルごとに定義されるので、パネル番号 k をつけた。一方 $\widehat{\mu}$ の定義より

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mu}_{j_1} \\ \widehat{\mu}_{j_2} \\ \widehat{\mu}_{j_3} \end{pmatrix}_k = \mathbf{Q}_{ik} \begin{pmatrix} (\widehat{\phi}_{US})_{j_1} \\ (\widehat{\phi}_{US})_{j_2} \\ (\widehat{\phi}_{US})_{j_3} \end{pmatrix}_k = (\mathbf{Q}_{ik+} + \mathbf{Q}_{ik-}) \begin{pmatrix} (\widehat{\phi}_{US})_{j_1} \\ (\widehat{\phi}_{US})_{j_2} \\ (\widehat{\phi}_{US})_{j_3} \end{pmatrix}_k \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}_{ik\pm} = \begin{pmatrix} (1 \pm s_0(r_B)_{i,j_1})e^{\mp s_0(r_B)_{i,j_1}}, & 0, & 0 \\ 0, & (1 \pm s_0(r_B)_{i,j_2})e^{\mp s_0(r_B)_{i,j_2}}, & 0 \\ 0, & 0, & (1 \pm s_0(r_B)_{i,j_3})e^{\mp s_0(r_B)_{i,j_3}} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad (27)$$

となる。ここで i は検査点 (control point) の番号である。行列 \mathbf{Q} は各検査点・パネルごとに定義されるので、 i と k をつけた。パネルの継目での $\widehat{\mu}$ の分布はその両端の節点での $\widehat{\mu}_{j\ell}$ ($\ell = 1$ 又は 2 又は 3) により定まるが、与えられた検査点 i と節点 $j\ell$ に対し $(r_B)_{i,j\ell}$ が一意的に定まることから、両端の節点での $(\widehat{\phi}_{US})_{j\ell}$ により継目での $\widehat{\mu}$ の分布が定まると言える。従って継目での $\widehat{\mu}$ の連続性が保証される。

(23), (24), (26)式を(15'), (20)式に用いると、 k 番目のパネル上の二重湧き出し項((20)式右辺第一項)により i 番目の検査点に誘起される $E\widehat{\phi}_{US}$ の成分 $[\widehat{\phi}_{US,D}]_{ik}$ は

$$[\phi_{US,D}]_{ik} = ([D_x]_{ik}, [D_y]_{ik}, [D_0]_{ik}) \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_x \\ \widehat{\mu}_y \\ \widehat{\mu}_0 \end{pmatrix}_k$$

$$= ([D_x]_{ik}, [D_y]_{ik}, [D_0]_{ik}) \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_{ik} \begin{Bmatrix} (\hat{\phi}_{US})_{j1} \\ (\hat{\phi}_{US})_{j2} \\ (\hat{\phi}_{US})_{j3} \end{Bmatrix}_k \tag{28}$$

$$\left. \begin{aligned} [D_x]_{ik} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} x_{P1} \frac{\partial}{\partial z_{P1}} \left(\frac{1}{r_{Bi}} \right) dx_{P1} dy_{P1} \\ [D_y]_{ik} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} y_{P1} \frac{\partial}{\partial z_{P1}} \left(\frac{1}{r_{Bi}} \right) dx_{P1} dy_{P1} \\ [D_0]_{ik} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} \frac{\partial}{\partial z_{P1}} \left(\frac{1}{r_{Bi}} \right) dx_{P1} dy_{P1} \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

$$r_{Bi} = \sqrt{(x_{Pi} - x_{P1})^2 + (y_{Pi} - y_{P1})^2 + (z_{Pi} - z_{P1})^2} \tag{30}$$

となる。k について和を取ることにより、

$$\begin{aligned} [\phi_{US,D}]_i &\equiv \sum_{k=1}^{kmax} [\phi_{US,D}]_{ik} = \sum_{k=1}^{kmax} ([D_x]_{ik}, [D_y]_{ik}, [D_0]_{ik}) \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_{ik} \begin{Bmatrix} (\hat{\phi}_{US})_{j1} \\ (\hat{\phi}_{US})_{j2} \\ (\hat{\phi}_{US})_{j3} \end{Bmatrix}_k \\ &= \sum_{k=1}^{jmax} a_{ij} (\hat{\phi}_{US})_j \end{aligned} \tag{31}$$

となる。a_{ij}($\hat{\phi}_{US}$)_j は、節点番号 j1, j2, j3 が j に等しい項を足し合わせたものであり、a_{ij} は影響係数と呼ばれる。a_{ij} の持つ数学的意味は、j 番目の節点で $\hat{\phi}_{US} = 1$ の場合、即ちその節点上で $\hat{\mu}$ が

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu})_{ij} \equiv [1 + s_0(r_B)_{ij}] e^{-s_0(r_B)_{ij}} + [1 - s_0(r_B)_{ij}] e^{+s_0(r_B)_{ij}}$$

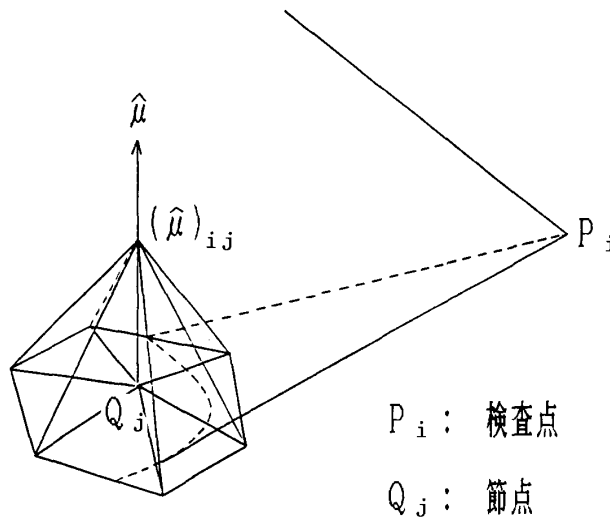


図4 影響係数 a_{ij} の数学的意味を示す図

であり、その周囲のパネル上で $\hat{\mu}$ が図 4 に示すように分布する時に、 i 番目の検査点上に誘起される $\hat{\phi}_{US}$ の値を表す。

一方(20)式の右辺第二項 (湧き出し項) において、 $\hat{\sigma}_{\pm}(\equiv \hat{Q}_{n,US}e^{\mp s_0 r_B})$ は 0 次分布、即ち各パネル上で一定とする。従って k 番目のパネル上の湧き出し項により i 番目の検査点に誘起される $E\hat{\phi}_{US}$ の成分 $[\hat{\phi}_{US,S}]_{ik}$ は、

$$[\hat{\phi}_{US,S}]_{ik} = [S_0]_{ik} R_{ik}(\hat{Q}_{n,US})_k \quad (32)$$

となる。ここで、

$$[S_0]_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_B^k} \frac{1}{r_{Bi}} \frac{dx_{P1} dy_{P1}}{J_{xy}} \quad (33)$$

$$R_{ik} = e^{-s_0(r_B)_{ik}} + e^{+s_0(r_B)_{ik}} \quad (34)$$

であり、 r_{Bi} は(30)式で定義され、 $(r_B)_{ik}$ は i 番目の検査点と k 番目のパネルの重心との双曲距離 r_B である。影響係数 b_{ik} を

$$b_{ik} = [S_0]_{ik} R_{ik} \quad (35)$$

により定義すると、

$$[\hat{\phi}_{US,S}]_i \equiv \sum_{k=1}^{kmax} [\hat{\phi}_{US,S}]_{ik} = \sum_{k=1}^{kmax} b_{ik}(\hat{Q}_{n,US})_k \quad (36)$$

となる。(31)、(36)式より i 番目の検査点上での $E\hat{\phi}_{US}$ は

$$E(\hat{\phi}_{US})_i = \sum_{j=1}^{jmax} a_{ij}(\hat{\phi}_{US})_j + \sum_{k=1}^{kmax} b_{ik}(\hat{Q}_{n,US})_k \quad (37)$$

と表される。

なお、 $[D_x]_{ik}$ 、 $[D_y]_{ik}$ 、 $[D_0]_{ik}$ 、 $[S_0]_{ik}$ の算出式は、紙面の都合により、来年度以降の本紀要で報告する予定である。

4. 数値解法

第 3 章で導出された(37)式は、任意の検査点での $E\hat{\phi}_{US}$ の値を、各節点での $\hat{\phi}_{US}$ と各パネルでの $\hat{Q}_{n,US}$ の値の 1 次結合として表す式となっている。節点総数 $jmax$ と同数の検査点を計算領域外、即ちパネル集合体の内部に分布させ、 $E = 0$ ((5)式) を用いると、(37)式は

$$\sum_{j=1}^{jmax} a_{ij}(\hat{\phi}_{US})_j + \sum_{k=1}^{kmax} b_{ik}(\hat{Q}_{n,US})_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, jmax) \quad (38)$$

となる。各検査点 i の位置はパネル面から離れていても良いが、影響係数行列 $\{a_{ij}\}$ の正則性と優対角性を保証するために、 $j = i$ となる節点の近傍に配置し、対角項が 0 とならないようにする^{8,10)}。非透過境界条件から(13)式により陽に得られた $(\hat{Q}_{n,us})_k$ を(38)式に代入し、未知量 $(\hat{\phi}_{us})_j$ ($j = 1, 2, \dots, jmax$) を求める。得られた $(\hat{\phi}_{us})_j$ を再び(37)式に代入することにより、計算領域内(パネル集合体の外部)の任意の位置での $\hat{\phi}_{us}$ が得られる。(18)式により ϕ_{us} が求まり、別途得られた定常解 ϕ_{sd} と重ね合わせれば(14)式) 任意の位置・時刻での ϕ も算出できる。

速度ベクトル及びその非定常成分は、近接した 2 点での ϕ 及び ϕ_{us} の差分をそれぞれ取ることにより得られる。速度影響係数を算出すれば、差分によらず直接速度ベクトルを求めることも可能となるが、本論文ではその定式化は行わない。圧力係数は、線形近似により

$$C_p = -\frac{2}{U_\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

と表されるが、(14)式を代入すると

$$C_p = C_{p,SD} + Re [C_{p,US} e^{st}] \quad (39)$$

$$C_{p,SD} = -2 \frac{\partial \phi_{SD}}{\partial x} \quad (40)$$

$$C_{p,US} = -\frac{2}{U_\infty} \left(s \phi_{us} + U_\infty \frac{\partial \phi_{us}}{\partial x} \right) \quad (41)$$

となる。 $\partial/\partial x$ の計算には再び近接する 2 点での差分を用いる。

付録 A 座標変換

ここでは次の 3 つの座標系の間の変換則と、それに併う積分式の変換則を導出する。

(a) 機体座標系 (x_B, y_B, z_B)

機体に固定した座標系。 x_B 軸を機軸方向後ろ向きとする。

(b) 主流座標系 (x_R, y_R, z_R)

主流方向を x_R 軸とする座標系。

(c) パネル座標系 (x_P, y_P, z_P)

パネル法線方向(外向き)を z_P 軸とする座標系。各パネルに対し独立に定義される。

機体形状の指定、パネル分割、節点・検査点の設定、パネル法線・パネル面積の計算など機体固有のデータの導出、及び各パネル上での複素振幅の設定または算出は、機体座標系において行われる。次に各ケースの姿勢角に応じてこれらのデータが主流座標系に変換され、境界条件が(13)式により設定される。さらに Prandtl-Glauert 変換とパネル座標への

変換が行われる。影響係数 a_{ij} , b_{ik} は、それぞれのパネル座標系において当該パネルからの寄与分が計算され、変換による面積変化を考慮した補正を行う。

A.1 機体座標系から主流座標系への変換

機体座標軸 (x_B, y_B, z_B) が主流座標軸 (x_R, y_R, z_R) に対し、迎角 α , 横すべり角 β を

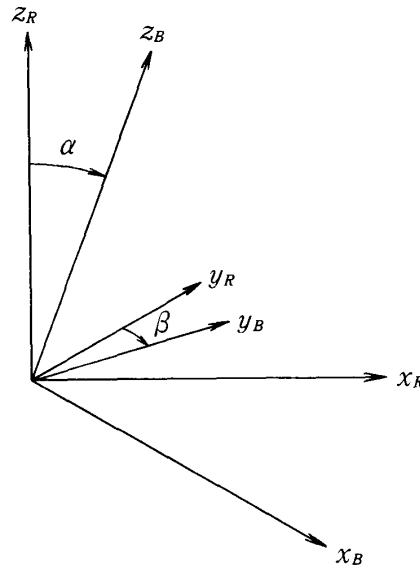


図5 機体座標軸及び主流座標軸

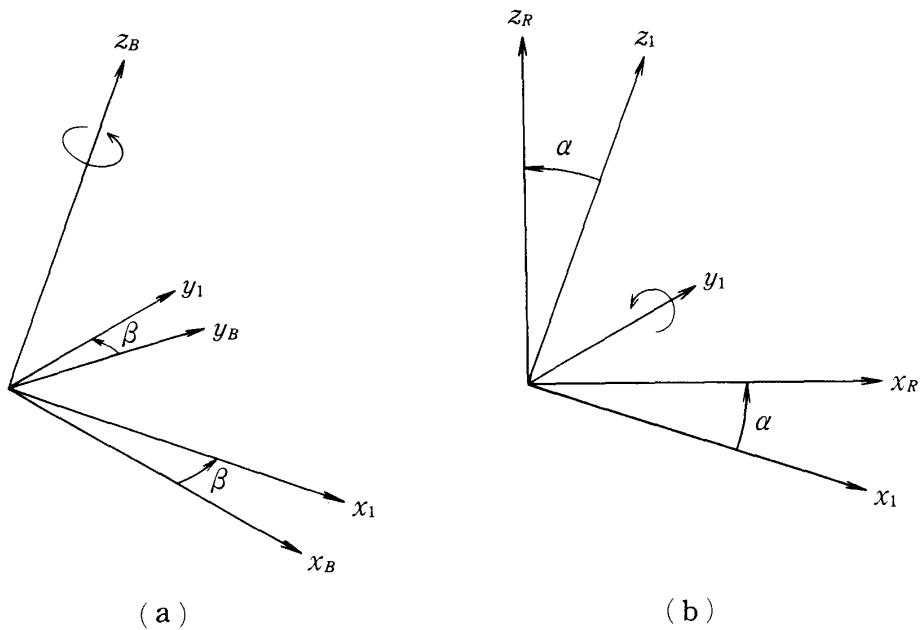


図6 座標変換
(機体座標系から主流座標系へ)

持っていたとする (図5)。機体座標軸は、 z_B 軸まわりの回転と y_i 軸まわりの回転をこの順に行うことにより、主流座標軸に一致させることができる (図6(a), (b))。この時座標変換は、

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

となる。パネル法線ベクトル \mathbf{n}_B も同じ変換則により \mathbf{n}_R に変換される。なお (A.1) 式の変換において x 軸まわりの回転を行わなかったのは、 y_R 軸と z_R 軸の方向が主流に垂直な面内で任意性を持ち、一般性を失うことなく上記回転で到達できる方向として良いからである。

A.2 主流座標系からパネル座標系への変換

A.2.1 Prandtl-Glauert 変換

Prandtl-Glauert 変換は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$B = \sqrt{M^2 - 1} \quad (\text{A.3})$$

と定義される。この時、本文(7)式で定義される双曲距離 r_B は

$$r_B = \sqrt{(x_0 - x_{01})^2 - (y_0 - y_{01})^2 - (z_0 - z_{01})^2} \quad (\text{A.4})$$

と表される。

なお (A.2) 式は 4 次元変換

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ -M & 0 & 0 & a_\infty B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ t \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

の空間成分となっている。(A.5) 式の変換により(1)式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_0^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_0^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

となる。

$x_0-y_0-z_0$ 座標系におけるパネル法線ベクトル $\mathbf{n}_0 = (n_{x0}, n_{y0}, n_{z0})$ は、次の2つの条件により定義する。

- (1) $x_0-y_0-z_0$ 空間においてパネルに垂直で、機体から外向き
- (2) 絶対値が1

従って \mathbf{n}_R の各成分を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} n_{x0} &= \frac{Bn_{xR}}{\sqrt{B^2n_{xR}^2 + n_{yR}^2 + n_{zR}^2}} \\ n_{y0} &= \frac{n_{yR}}{\sqrt{B^2n_{xR}^2 + n_{yR}^2 + n_{zR}^2}} \\ n_{z0} &= \frac{n_{zR}}{\sqrt{B^2n_{xR}^2 + n_{yR}^2 + n_{zR}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 パネル座標系への変換

第一段階として、座標軸を x_0 軸まわりに回転させて、パネル法線ベクトルが x_2-z_2 面内の $z_2 > 0$ の側に入るように変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

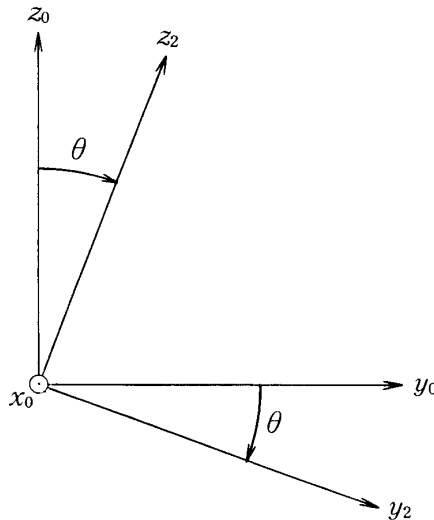


図7 x_0 軸まわりの回転

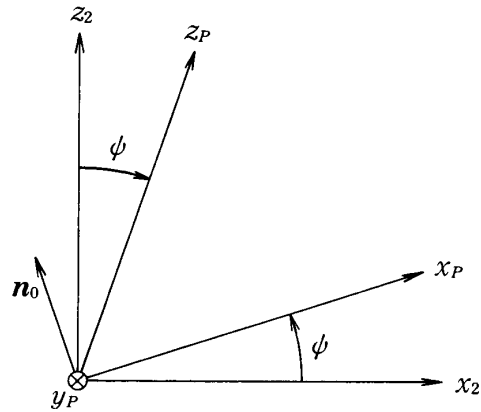


図8 Lorentz 変換

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{n_{y0}}{\sqrt{n_{y0}^2 + n_{z0}^2}} = \frac{n_{yR}}{\sqrt{n_{yR}^2 + n_{zR}^2}} \\ \cos \theta &= \frac{n_{z0}}{\sqrt{n_{y0}^2 + n_{z0}^2}} = \frac{n_{zR}}{\sqrt{n_{yR}^2 + n_{zR}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

を行う (図7)。基礎方程式は y_0-z_0 面内で等方なので、変換後も (A.6) 式の形を保つ。

第2段階として、 x_2-z_2 面内で座標の変換を行い、パネルが x_P-y_P 面内に含まれるようにする。ところがこの変換に回転を用いたのでは、基礎方程式 (A.6) 式が $x_0-y_0-z_0$ 空間内で非等方であるため変換により方程式の形が変わってしまい、影響係数の計算が困難になる。これは超音速流特有の性質である。そこで次式で定義される Lorentz 変換を用いる (図8)。

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} & 0 & \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

(A.10) 式は4次元 Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ t_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} & 0 & \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

の空間成分となっている (ただし $t_2 = t_0$ である)。変換 (A.11) 式により (A.6) 式が形

を変えないことは容易に証明できる。また双曲距離 r_B の表式 (A.4) 式も (A.8), (A.10) 式により形を変えない。

m の値は以下のように定める。パネル面上で $z_P = 0$ より、

$$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}z_2 = 0$$

となる。従って

$$m = -\frac{z_2}{x_2} = -\tan \psi = \frac{n_{x0}}{\sqrt{n_{y0}^2 + n_{z0}^2}} \quad (\text{A.12})$$

となる。ここで、 \mathbf{n}_0 が $z_2 > 0$ の側を向いていることを使った。(A.7), (A.12) 式より

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{\sqrt{n_{yR}^2 + n_{zR}^2}}{\sqrt{\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_{CR}}} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{Bn_{xR}}{\sqrt{\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_{CR}}} \quad (\text{A.14})$$

が得られる。ここで余法線ベクトル \mathbf{n}_{CR} は

$$\mathbf{n}_{CR} = (-B^2n_{xR}, n_{yR}, n_{zR}) \quad (\text{A.15})$$

により定義される。

A.2.3 本節のまとめ

(A.2), (A.8), (A.10) 式の変換をまとめると、

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} & \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}B\sin\theta & \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}B\cos\theta \\ 0 & B\cos\theta & -B\sin\theta \\ \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}B\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}B\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

となる。 B , θ , m の値は、(A.3), (A.9), (A.13), (A.14) 式により定められる。

A.3 積分式の変換

A.2 節の座標変換によって、(16') 式に現れる面積要素 $d\Sigma$ と余法線方向の微分 $\partial/\partial n_c$ の表式が変化する(本付録では添字₁を省略する)。従ってパネル座標系においては、(16') 式の表式も変化する。以下でその導出を行う。

x_P 軸及び y_P 軸の正方向を向いた微小変位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{dx_P}$, $\overrightarrow{dy_P}$ とする。両ベク

トルの成分を主流座標で表すと,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{dx_P} &= \left(\frac{\partial x_R}{\partial x_P} dx_P, \frac{\partial y_R}{\partial x_P} dx_P, \frac{\partial z_R}{\partial x_P} dx_P \right) \\ \overrightarrow{dy_P} &= \left(\frac{\partial x_R}{\partial y_P} dy_P, \frac{\partial y_R}{\partial y_P} dy_P, \frac{\partial z_R}{\partial y_P} dy_P \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

となる。ただし dx_P, dy_P はそれぞれ $\overrightarrow{dx_P}, \overrightarrow{dy_P}$ のパネル座標系での長さである。 $x_R - y_R - z_R$ 空間において、ベクトル $\overrightarrow{dx_P}$ と $\overrightarrow{dy_P}$ を二辺とする平行四辺形の面積は,

$$d\Sigma = (\overrightarrow{dx_P} \times \overrightarrow{dy_P}) \cdot \mathbf{n}_R \quad (\text{A.18})$$

となる。(A.17) 式を代入して,

$$d\Sigma = \left[n_{xR} \frac{\partial(y_R, z_R)}{\partial(x_P, y_P)} + n_{yR} \frac{\partial(z_R, x_R)}{\partial(x_P, y_P)} + n_{zR} \frac{\partial(x_R, y_R)}{\partial(x_P, y_P)} \right] dx_P dy_P \quad (\text{A.19})$$

が得られる。(A.16) 式の逆変換と, (A.3), (A.9), (A.13), (A.14) 式を用いて,

$$d\Sigma = \frac{dx_P dy_P}{B\sqrt{1-M^2 n_{xR}^2}} \quad (\text{A.20})$$

が得られる。

次に本文(17)式で定義される余法線微係数に, 再び (A.16), (A.9) 式等を用いると,

$$\frac{\partial}{\partial n_C} = B\sqrt{1-M^2 n_{xR}^2} \frac{\partial}{\partial z_P} \quad (\text{A.21})$$

が得られる。

(A.20), (A.21) 式と, スカラーが座標変換に対し不変であることを用いると, (16') 式の $\hat{\phi}_{US\pm}$ のうち k 番目のパネル Σ^k からの寄与は

$$\begin{aligned} \{\hat{\phi}_{US\pm}(x_P, y_P, z_P)\}_k &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} \hat{\phi}_{US}(1 \pm s_0 r_B) e^{\mp s_0 r_B} \frac{\partial}{\partial z_{P1}} \left(\frac{1}{r_B} \right) dx_{P1} dy_{P1} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_D^k} \hat{Q}_{n, US} \frac{e^{\mp s_0 r_B}}{r_B} \frac{dx_{P1} dy_{P1}}{J_{xy}} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$J_{xy} = B\sqrt{1-M^2 n_{xR1}^2} \quad (\text{A.23})$$

Σ_D^k : Σ^k のうち検査点 (x_P, y_P, z_P) の上流 Mach cone 内の部分

となる。ここで本文で用いた添字₁を復活させた。なお r_B はパネル座標を用いて

$$r_B = \sqrt{(x_P - x_{P1})^2 - (y_P - y_{P1})^2 - (z_P - z_{P1})^2} \quad (\text{A.24})$$

と表される。

パネル面上の点 (x_{R1}, y_{R1}, z_{R1}) が検査点 (x_R, y_R, z_R) の上流 Mach cone 内にあるための必要十分条件は、

$$x_R > x_{R1} \quad (\text{A.25})$$

かつ

$$(x_R - x_{R1})^2 > B^2[(y_R - y_{R1})^2 + (z_R - z_{R1})^2] \quad (\text{A.26})$$

であるが、 r_B の表式の変換と同様にして (A.26) 式は

$$(x_P - x_{P1})^2 > (y_P - y_{P1})^2 + (z_P - z_{P1})^2 \quad (\text{A.26}')$$

と変換される。点 (x_{R1}, y_{R1}, z_{R1}) と (x_R, y_R, z_R) との位置関係が (A.26) 式を満たす時、(A.25) 式も変換に際し形を変えないことが証明できる。即ち、

$$x_P > x_{P1} \quad (\text{A.25}')$$

となる。これは、超音速流れ場において空間内の2点が相互作用しうる位置関係にある場合、上流・下流の関係は基準系によらず不変である、という物理的意味を持つ。

参考文献

- 1) Garcia-Fogeda, P., Chen, P. C., and Liu, D. D.: "Unsteady Supersonic Flow Calculations for Wing-Body Combinations Using Harmonic Gradient Method," AIAA Journal, Vol. 28, No. 4, pp. 635-641 (1990).
- 2) Appa, K., and Smith, M. J. C.: "Evaluation of the Constant Pressure Panel Method for Supersonic Unsteady Airloads Prediction," Journal of Aircraft, Vol. 26, No. 9, pp. 854-862 (1989).
- 3) Ueda, T., and Dowell, E. H.: "Doublet-Point Method for Supersonic Unsteady Lifting Surfaces," AIAA Journal, Vol. 22, No. 2, pp. 179-186 (1984).
- 4) Morino, L.: "A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics," NASA CR-2464 (1974).
- 5) 柳沢三憲, 森田甫之, 巽 重文: "境界要素法を用いた亜音速流中の三次元揚力物体の非定常空力特性の計算," 航空宇宙技術研究所報告 TR-1065 (1990).
- 6) Morino, L., Chen, L. T., and Suci, E.: "Steady and Oscillatory Subsonic and Supersonic Aerodynamics around Complex Configurations," AIAA Journal, Vol. 13, No. 3, pp. 368-374 (1975).
- 7) Ward, G. N.: Linearized Theory of Steady High-Speed Flow, Cambridge University Press, pp. 50-53 (1955).
- 8) Maruyama, Y., Akishita, S., and Nakamura, A.: "New Panel Method for Supersonic Flows About Arbitrary Configurations," Journal of Aircraft, Vol. 25, No. 3, pp. 229-235 (1988).
- 9) Ehlers, F. E., Epton, M. A., Johnson, F. T., Magnus, A. E., and Rubbert, P. E.: "A Higher Order Panel Method for Linearized Supersonic Flow," NASA CR-3062 (1979).
- 10) 丸山祐一, 秋下貞夫, 中村昭人: "パネル法による超音速計算空力プログラムの開発," 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-5, pp. 113-119 (1985).

Mathematical Formulation of a Panel Method Program for Supersonic Unsteady Flow Calculations

Yuichi MARUYAMA and Teruo SAWADA

Department of Mechanical Engineering,

Faculty of Engineering,

Okayama University of Science,

1-1 Ridaicho, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1991)

For the design of aeronautical vehicles, it is necessary to predict not only steady aerodynamic characteristics but also unsteady ones. However, current numerical tools for the latter are insufficient especially in the case of supersonic flow. In this paper, mathematical formulation of a boundary-element-type panel method is achieved for supersonic unsteady flow calculations.

Linearized Euler equation is transformed to an integral form, which is partially simplified according to Morino's method. The integral equation is discretized to a linear algebraic equation by replacing the boundary surface with an assembly of triangular panels. To ensure the continuity of doublet density on panel edges, linearly varying distribution is adopted on each panel. The shape of the panel assembly and its attitude can be specified arbitrarily within the limit of linearization validness, which enlarges the ability of this method compared to the current panel method programs for supersonic unsteady flow.