熱多項式を用いた境界法による熱方程式の解

井口　章典・榊原　道夫*・仁木　滉*

岡山理科大学大学院応用数学専攻修士課程

*岡山理科大学理学部応用数学科

（平成３年９月30日　受理）

１．まえがき

熱多項式は，熱方程式を満足する多項式であり，初期関数に多項式を与えて得られる初期 ― 境界値問題の解として定義されている。この熱多項式は，熱方程式の解析解の存在性の研究に使用されてきた[1]。しかし，我々の知る限りにおいて，熱多項式が具体的な問題に対する熱方程式の近似解法として使用された例はない。その理由は，本論文中に示すように条件数が非常に悪いためである。

近年，偏微分方程式の近似解を得る方法として，境界要素法が注目されている。その理由は，有限要素法が対象領域全体を要素分割し要素節点上の未知数を扱うのに対し，境界要素法は，境界上だけで同様な扱いをするので，要素数が，一般に少ない。そのため解くべき連立１次方程式の元数が低く抑えられる。従って，計算時間の短縮という利点が生ずる。しかし，問題によっては，定式化において必要な基本解を，初等関数，あるいは，よく知られた特殊関数によって陽的に表現できない場合が存在する。ここで，もし方程式を満たす特殊解を多項式によって構成することができれば，より簡単な近似解の構成法が得られる。すなわち，方程式を解くという過程が関数近似を行うという過程に還元できる。そこで本論文では，チェビシェフ多項式[2]を用いたチェビシェフ熱多項式を導出し，それに対する漸化式を導入し，与えられた初期 ― 境界値問題を考察する。そして，その手法の有効性と，数値結果を示す。

２．熱多項式

熱方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

の初期 ― 境界値問題における近似解の構成についての考察を行う。n 次の熱多項式 $v_n(x,t)$ は，$e^{(zx+z^2t)}$ を z についてのべき級数展開の係数として定義され，次のように与えられる。

$$e^{(zx+z^2t)}=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)\frac{z^n}{n!} \tag{2.2}$$

すべての熱多項式 $v_n(x,t)$ は，熱方程式を満足する。

$$\frac{\partial v_n(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

ここで，$v_n(x,t)$ は一意的に次式のように表せる。

$$v_n(x,t)=n!\sum_{n=0}^{[n/2]}\frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!}\frac{t^k}{k!} \tag{2.4}$$

特に，4次までの熱多項式を下に示す。

$$\begin{aligned}
v_0(x,t)&=1\\
v_1(x,t)&=x\\
v_2(x,t)&=x^2+2t\\
v_3(x,t)&=x^3+6xt\\
v_4(x,t)&=x^4+12x^2t+12t^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで $v_n(x,t)$ が x の関数として n が偶数のとき偶関数となり，n が奇数のとき奇関数になっていることに注意する。次に，(2.1)式の解は以下の式で示される。

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iv_i(x,t) \tag{2.6}$$

注意すべきことは(2.6)式で与えられる $u(x,t)$ が解析的な関数であるということである。また(2.5)式の係数 a_i は簡単求められ，実際に次式のようになっている。

$$a_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n u(0,0)}{\partial x^n}$$

3．チェビシェフ熱多項式

本節ではチェビシェフ熱多項式を定義し，その漸化式を導出する。このチェビシェフ熱多項式を導出するために我々はチェビシェフ多項式を以下に述べる2つの理由から用いた。1番目はチェビシェフ多項式は有限区間の問題,例えば初期 — 境界値問題を解く際に他の多項式と比較してかなり性質のよい振る舞いをするが，これは以下に触れるチェビシェフ多項式の定義によるものである。2番目は簡単な多項式であるため漸化式の生成が容易だからである。そのことは，計算時間の短縮につながるので，計算の効率が良くなる。以上のことから我々は，チェビシェフ多項式を用いることにした。

n次チェビシェフ多項式は次式のように定義されている。

$$T_n(x)=cos\ n(arccos\ x)$$

この $T_n(x)$ は次の漸化式に従う。

$$\begin{aligned} T_o(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ 2xT_n(x) &= T_{n-1}(x)+T_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

この $T_n(x)$ を用いたチェビシェフ熱多項式を定義する。

定義．1 n 次チェビシェフ熱多項式を $T_n(x)$ を用いて次式のように定義する。

$$C_n(x,t) = exp\left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{T}_n(x) \tag{3.2}$$

ここで,

$$exp\left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{T}_n(x) = T_n(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}T_n^{(2ni)}(x)$$

である。

上の定義式(3.1)式と(3.2)式を用いて，次の定理が得られる。

定理．1（チェビシェフ熱多項式に関する漸化式）

チェビシェフ熱多項式 $C_n(x,t)$ は漸化式

$$C_n(x,t) = 2xC_{n-1}(x,t)+4tC'_{n-1}(x,t)-C_{n-2}(x,t)\ (n\leq 2) \tag{3.3}$$

によって得られる。ただし,

$$\begin{aligned} C_0(x,t) &= 1 \\ C_1(x,t) &= x \end{aligned}$$

である。

((3.3)式の証明)

簡単のため $C_n(x,t) = C_n$ とおく。

ここで，C_0，C_1 は自明であるから $n\geq 2$ を考える。

(3.2)式を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} C_n &= exp\left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{T}_n(x) \\ &= T_n(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}T_n^{(2ni)}(x) \\ &= T_n(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(4nT_{n-1}^{(2i-1)}(x))+2x\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(T_{n-1}^{(2i)}(x))-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(T_{n-1}^{(2i)}(x)) \\ &= T_n(x)-2xT_{n-1}(x)+T_{n-2}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(4iT_{n-1}^{(2i-1)}(x))+2xC_{n-1}-C_{n-2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(4iT_{n-1}^{(2i-1)}(x))+2xC_{n-1}-C_{n-2}$$

ここで，右辺第一項は定義より次式に変形される。

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(4iT_{n-1}^{(2i-1)}(x)) = 4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{(i-1)!}\left(T_{n-1}^{(2i-1)}(x)\right)$$
$$= 4t\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(t-1)^i}{(i-1)!}(T_{n-1}^{2(i-1)}(x))]$$

上式を右辺第１項に代入することによって(3.3)式が証明される。
（証明終わり）

特に４次までのチェビシェフ熱多項式を下に示す。

$$\begin{aligned} C_0(x,t) &= 1 \\ C_1(x,t) &= x \\ C_2(x,t) &= -1+4t+2x^2 \\ C_3(x,t) &= -3x+24tx+4x^3 \\ C_4(x,t) &= 1+96t^2-8x^2+96tx^2-16t+8x^4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

４．初期 — 境界値問題

熱伝導に関する熱伝導方程式に代表される支配方程式は，領域内の局所的な条件から導出されるが，考える位置は任意であるから，領域内全域で成り立つ。しかしその振る舞いを一意的に定めるためには，この支配方程式だけでは十分ではない。それは領域の外から力が作用しているはずであるから，これらの条件を規定しなければならない。このような，まわりの条件を，境界条件と呼ぶ。これに対し，前者は考える対象の内部，すなわち，考える領域について成り立つ関係式である。このように領域内での関係式と境界条件の組み合わせによって一つの問題を考えることができる。ここでは，その領域 Ω として (0,1)×(O,T] をとる。そしてこの領域におけるチェビシェフ熱多項式に関するディリクレ境界条件（第１種境界条件）とノイマン境界条件（第２種境界条件）についての問題を考察する。熱方程式の解を $u(x,t)$ とすると $u(x,t)$ は次式のようになる。

$$u(x,T) = \sum_{i=1}^{\infty}a_i v_i(x,T) \tag{4.1}$$

一般に，ディリクレ境界条件のもとで，熱多項式の初期 — 境界条件は次のようになる。以下，(I.C) は初期条件，(B.C) は境界条件，そして (i=0,1,2,…) とする。このとき初期条件として与えられる関数は，解析的関数である。

$$
\begin{aligned}
&u(x,T)=0 && (x=0\qquad) && (B.C)\\
&u(x,T)=0 && (x=1\qquad) && (B.C)\\
&u(x,T)=sin(\pi x) && (0<x<1,\ T=0) && (I.C)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ここで，$u(x,T)$ の近似解を $u^h(x,T)$ とすると，$u^h(x,T)$ は，次式のようになる。

$$u^h(x,T)=\sum_{i=1}^{n}a_i v_i(x,T) \tag{4.3}$$

このとき，初期 — 境界条件は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&u^h(x_i,T_i)=0 && (x=0\qquad) && (B.C)\\
&u^h(x_i,T_i)=0 && (x=1\qquad) && (B.C)\\
&u^h(x_i,T_i)=sin(\pi x_i)(0<x_i<1,T_i=0) && && (I.C)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

以上の式を適用したチェビシェフ熱方程式の解が次式 $\tilde{u}(x,t)$ である。

$$\tilde{u}(x,T)=\sum_{i=1}^{\infty}\hat{a}_i C_i(x,T) \tag{4.5}$$

このとき初期 — 境界条件は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}(x_i,T_i)=0 && (x=-1\qquad) && (B.C)\\
&\tilde{u}(x_i,T_i)=0 && (x=1\qquad) && (B.C)\\
&\tilde{u}(x_i,T_i)=cos(\frac{\pi x}{2})(-1<x<1,T=0) && && (I.C)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

ここで，近似解を $\tilde{u}^h(x,T)$ とすると近似解 $\tilde{u}^h(x,t)$ は次式のようになる。

$$\tilde{u}^h(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i C_i(x,T) \tag{4.7}$$

このとき，初期 — 境界条件は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}^h(x_i,T_i)=0 && (x_i=-1\qquad) && (B.C)\\
&\tilde{u}^h(x_i,T_i)=0 && (x_i=1\qquad) && (B.C)\\
&\tilde{u}^h(x_i,T_i)=cos(\frac{\pi x_i}{2})(-1<x_i<1,T_i=0) && && (I.C)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

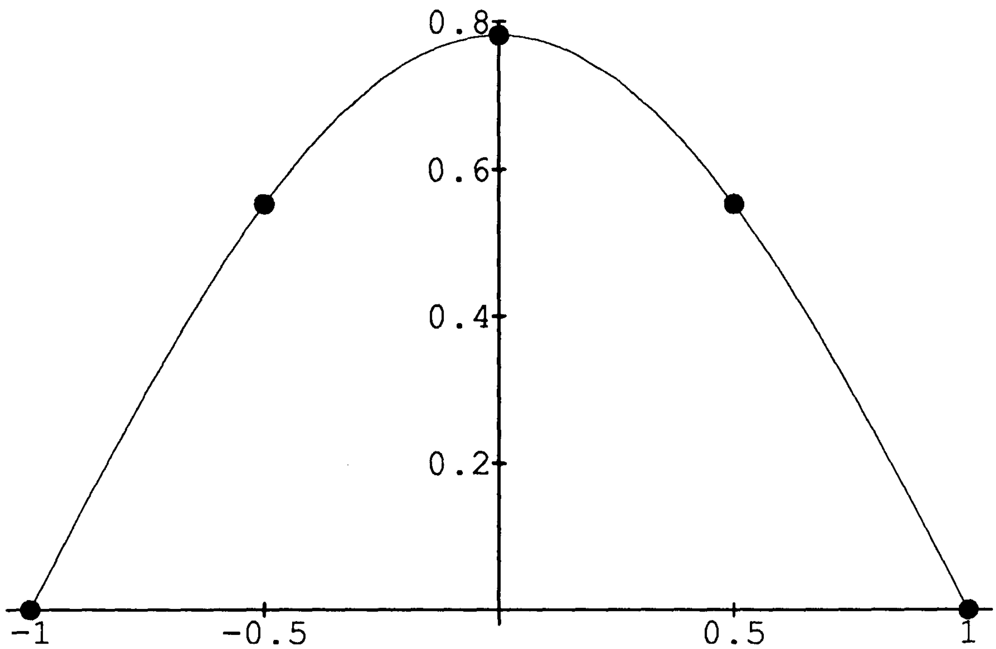
係数 $\hat{a}_i$ は線形方程式

$$C\hat{a}=b \tag{4.9}$$

を解くことにより求まる。ただし，

表1 n＝9，T＝0.1のときの数値例

(x, T)	NUMERICALSOLUTIONS	EXACTSOLUTIONS
(−1.0,0.1)	0.000000	0.000000
(−1/2,0.1)	0.552492	0.552493
(0.0, 0.1)	0.781344	0.781344
(1/2, 0.1)	0.552492	0.552493
(1.0, 0.1)	0.000000	0.000000



図．1 n＝9，T＝0.1のときの数値例
● …Numerical Solutions
— …Exact Solutions

表2 n＝17，T＝0.1のときの数値例

(x, T)	NUMERICALSOLUTIONS	EXACTSOLUTIONS
(−1.0,0.1)	0.000000	0.000000
(−3/4,0.1)	0.299007	0.299007
(−1/2,0.1)	0.552493	0.552493
(−1/4,0.1)	0.721867	0.721867
(0.0, 0.1)	0.781344	0.781344
(1/4, 0.1)	0.721867	0.721867
(1/2, 0.1)	0.552493	0.552493
(3/4, 0.1)	0.299007	0.299007
(1.0, 0.1)	0.000000	0.000000

$$\hat{a} = \{\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n\}^T,$$

$$b = \{b_0, b_1, \cdots, b_n\} \text{：初期 — 境界条件},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0n} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n0} & C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

ここで，

$$C_{ij} = C_i(x_j, T_j)(j = 0,1,2,\cdots n) \qquad (4.10)$$

このようにして得られた $\hat{a}_i$ を(4.7)式に代入る。そして，求める近似解 $\tilde{u}^h$ が構成される。ノイマン境界条件(第２種境界条件)の場合は，$x_i = -1$ で $\dfrac{\partial u^n(x,t)}{\partial x} = 0$ という境界条件が与えられ，このときの初期条件は $cos\left(\dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ で与えられる。次節でその具体例を示す。

5．数値解析例

近似式(4.7)，(4.8)を用いて，まずディリクレ条件下での，n＝9，T＝0.1のときの数値例を表．1と図．1に示す。これより数値解と厳密解との誤差がほとんどないことが知

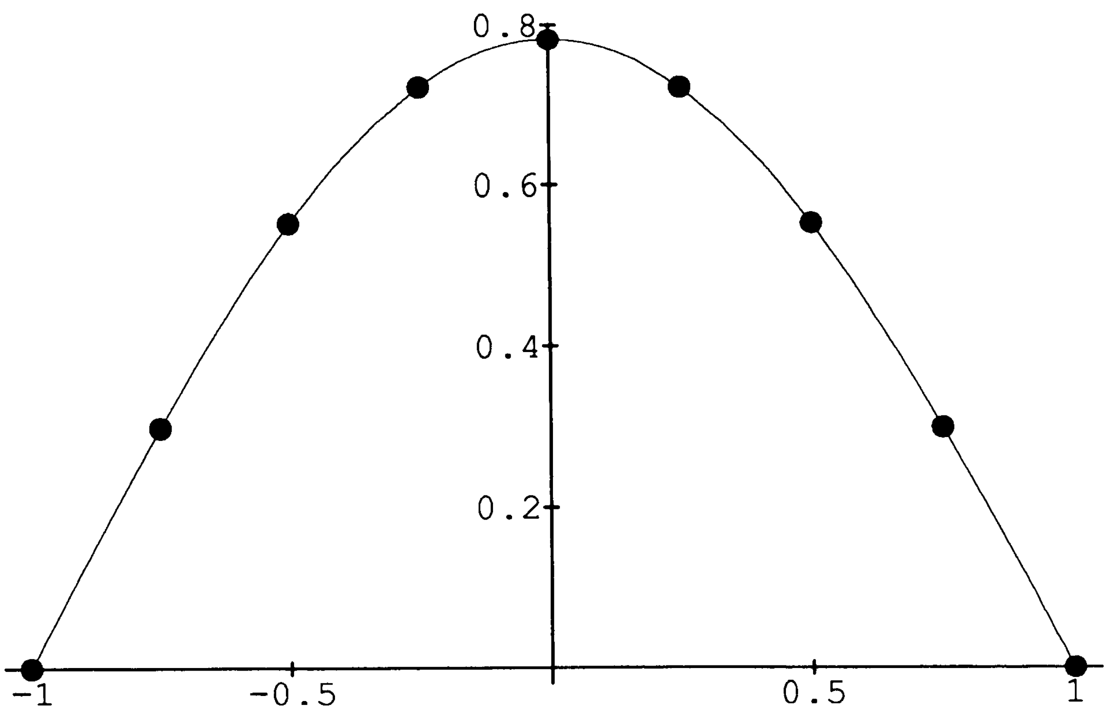


図２　n＝17，T＝0.1のときの数値例

● …Numerical Solutions

— …Exact Solutions

られる。次に同じ条件下での，n＝17，T＝0.1のときの数値例を表．2と図．2に示す。この境界条件のもとでの真の解をＤＥとすると式は次のように与えられる。

$$DE(x,t) = exp\left(\frac{-\pi^2}{4t}\right)cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{5.1}$$

次にノイマン境界条件下での，n＝9，T＝0.1のときの例を表．3，図．3表に示す。この境界条件のもとでの真の解をＮＥとすると式は次のように与えられる

$$NE(x,t) = exp\left(\frac{-\pi^2}{16t}\right)cos\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

これらの結果から，非常に高精度の解が得られることがわかる。

6．行列の条件数

今回の数値実験にFORTRAN77[3]でなく，数式処理言語Mathematicaを用いた理由をここでは示す。行列 $C_i(x_j,T_j)$ の条件数は，次のようにして求める。まず，行列 $C_i(x_j,T_j)$

表3　n＝9，T＝0.1のときの数値例

(x, T)	NUMERICALSOLUTIONS	EXACTSOLUTIONS
(−1.0,0.1)	0.940179	0.940179
(−1/2,0.1)	0.868612	0.868612
(0.0,　0.1)	0.664807	0.664807
(1/2,　0.1)	0.359791	0.359791
(1.0,　0.1)	0.000000	0.000000

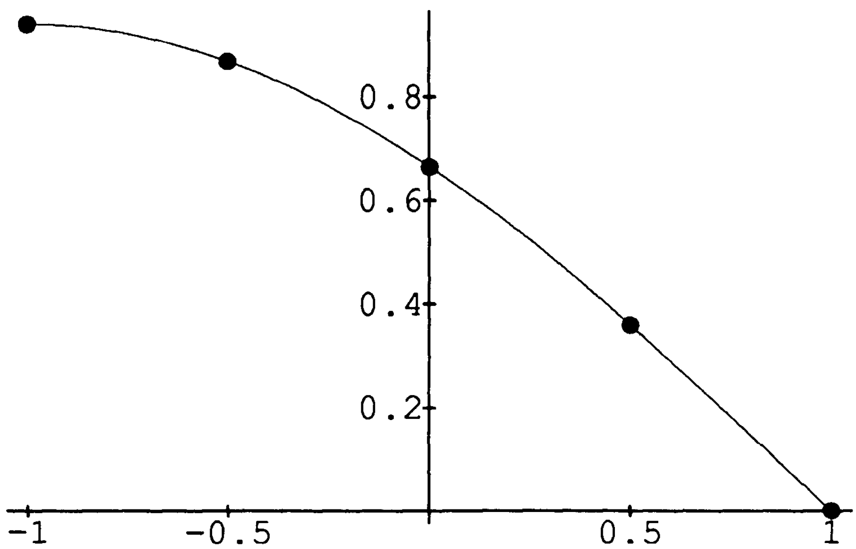


図3　n＝9，T＝0.1のときの数値例
●　…Numerical Solutions
—　…Exact Solutions

表4　T＝0.1としたときのnの各点の条件数

n	T	条件数
5	0.1	11.1981
9	0.1	760.047
13	0.1	185391.0
17	0.1	1.18712E+12

表5　n＝17としたときのTの各点の条件数

T	n	条件数
0.1	17	5.23299 E+07
0.3	17	4.24107 E+10
0.5	17	2.72504 E+11
0.7	17	1.14194 E+13
1.0	17	1.32967 E+14

の固有値を求め，それぞれの固有値の，原点Oからの距離を求める。そしてそのなかで最大の距離と最小の距離の比が行列 $C_i(x_j, T_j)$ の条件数である。これを用いて T＝0.1としたときのn＝5，n＝9，n＝13，n＝17の場合の条件数を表．4に示す。明らかに条件数が悪い。次にn＝17としたときのT＝0.1，T＝0.3，T＝0.5，T＝0.7，T＝1.0を表．5に示す。このときも条件数が非常に悪い。このことから，チェビシェフ熱多項式の条件数が非常に悪いことが知られる。このように，条件数が悪くなると FORTRAN 7 7のようなプログラム言語ではオーバーフローを生ずる。以上の理由により数式処理言語 Mathematica が必要である。

参考文献

1）P. C. Rosenbloom and D. V. Widder, Expansion in terms of heat polynomials and associated functions, Transactions of the American Mathematical Society vol. 92 (1959), pp. 220-266.

2）Theodore. J.Rivlin, The chebyshev polynomials, A wiley-intercience publication (1974).

3）三好俊郎，有限/境界要素解析プログラミング，サイエンス社（1986）.

Approximate Solution of Heat Equation with Chebyshev Heat Polynomial

Akinori IGUCHI・Michio SAKAKIHARA* and Hiroshi NIKI*

Department of Applied Mathematics, the Graduate School of Science,

Okayama University of Science.

**The Department of Applied Mathematics,*

Okayama University of Science.

1-1 Ridai-cho, Okayama 700 Japan

(Recedved September 30, 1991)

Heat polynomials have been applied to study the analytic solution of the initial value problem of the heat equation. Since the polynomials satisfy the heat equation the approximate solution of the initial value problem by using the polynomials become an interpolation problem. Therefore the approximate solution is determined from the given initial data since the solution method involves no integration and no discretization with respect to the time-space domain. In order to apply the approach to an initial-boundary value problem, we present an approximation method with Chebyshev heat polynomials which are proposed in this paper. A recurrence formula to generate Chebyshev heat polynomials is presented. Moreover we show that the present method give accurate approximate solutions by numerical experiments.