

分数段境界行列法による熱拡散問題の数値解析

木村 博典*・榎原 道夫**・仁木 淩**

*岡山理科大学大学院応用数学専攻修士課程

**岡山理科大学理学部応用数学科

(1991年9月30日 受理)

1. はじめに

熱の移動は、伝導、対流、輻射によって生ずることはよく知られている。これらの現象は、偏微分方程式で表すことができる。その近似解法として、差分法、境界要素法、有限要素法等が用いられ工夫がなされている¹⁾²⁾。近似解法の目的は、支配方程式と境界条件を連立代数方程式に変換することである。境界要素法は、それを境界積分方程式に置き換えることによって離散化を行う解法で、境界上の要素の節点における未知量だけの問題を取り扱う。このことは、空間において要素分割を考える場合、有限要素法と比較して次元を1つ下げて取り扱えるため、離散化の幾何データを作成することが簡単となる。しかし、多次元問題を取り扱う場合は、1次元問題より困難となる。なぜならば、基本解は特異性を持ち係数行列を計算するために特異積分を数値的に実行しなければならない。またその上、空間の次元が1つ下がるとはいえ離散化によって現れる係数行列が非対称、密であるため、その行列により構成された線形方程式を解くのに時間要する。そのような難点を回避するための1方法として我々は、分数段境界行列法を提案した³⁾。これは、非定常熱伝導問題における解法の1つである時間増分法と分数段法を用いた解法である。時間増分法は、時間項を差分化することにより、解の変化を、遂次近似により計算できるという利点があるが、時間の経過に対して遂次解を求めていくために計算時間が非常に長くなるという難点もある。解析される問題が多次元になるとおさらこの点が問題となるため計算時間の短縮は解析上重要である。その様な観点から解法の効率化をはかる研究が必要とされる。分数段法は、その様な問題の解決に適用されている。この手法の大きな特徴は、大型の代数方程式を解く手間を除く点にある。分数段法へ境界要素法を用いる解法は、1次元問題に還元されることによって、積分方程式中の領域積分や離散化された線形方程式が簡単になるために陽的にこの手法を扱える。また、本手法に用いる基本解は2階の微分方程式の基本解であるために連続関数であり、特異点を有していないという利点を持つ。ここでは、1次元、多次元熱方程式のDirichlet問題に対して、本手法の定式化を示すとともに、簡単な数値実験を行い本手法の有効性を検討する。また、3次元領域に対して解析を行う際、スーパーコンピュータと大型汎用コンピュータで計算したときのCPU-TIMEを比較

し、本手法におけるベクトル処理に対しての有効性を検討する⁴⁾。

2. 1 次元問題に対する境界行列法（BMM）の定式化

1次元問題を、容易に多次元問題に拡張できる分数段境界行列法の特徴を明らかにするために、1次元問題に対しての境界行列法の定式化を行う。未知関数 $u(x,t)$ に関する次の1次元熱方程式の初期値一境界値問題、

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ in } \Omega (= (a,b)) \times (0,T] \quad (1)$$

初期、境界値条件、

$$u(x,0) = u^0(x), u(a) = u(b) = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (2)$$

に対する BMM を考えよう。ここで、 Ω は、1次元空間 R^1 の有界領域であり κ は拡散係数である。式(1)に対して時間項を差分すると、

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = \kappa \left(\theta \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + (1-\theta) \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq 1$ で、 $\theta = 0$ は陽的スキームを、 $\theta = 1/2$ は Crank-Nicholson スキームを、 $\theta = 1$ は陰的スキームをそれぞれ与える。

2. 1 陰解法（BMM-IM）の定式化

式(3)($\theta = 1$)の Dirichlet 問題に対する BMM-IM の定式化について考えよう。BMM-IM で解析する問題は、

$$-\tau \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + U(x) = F(x) \quad (4)$$

で表される 2 点境界値問題である。ここで、 $\tau = \kappa \delta t$ 、 $U(x)$ は未知関数、 $F(x)$ は既知関数である。式(4)に対応する基本解は、

$$-\tau \frac{d^2 E(x-y)}{dx^2} + E(x-y) = \delta(x-y) \quad (5)$$

の解 $E(x-y)$ で、

$$E(x-y) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \exp(-|x-y|/\sqrt{\tau}) \quad (6)$$

である。ここで、 x, y は R^1 内にあり、 $\delta(x-y)$ は x を参照点、 y をソース点にもつ Dirac の

デルタ関数である。式(3)に境界積分方程式を適用すると、

$$-\tau \int_a^b E(x-y) \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} dx + \int_a^b E(x-y) u^{n+1} dx = \int_a^b E(x-y) u^n dx \quad (7)$$

である。式(7)に境界値を組み込むことによって線形方程式が導かれる。BMM-IM のアルゴリズムは次の通りである⁵⁾。

Step. 1

端点における未知な境界値を求める。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\exp(-|b-a|/\sqrt{\tau}) \\ \exp(-|a-b|/\sqrt{\tau}) & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^{n+1}(a) \\ q^{n+1}(b) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \exp(-|x-a|/\sqrt{\tau}) u^n dx \\ \int_a^b \exp(-|x-b|/\sqrt{\tau}) u^n dx \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$q^{n+1}(a) = \frac{du^{n+1}}{dx}(a), \quad q^{n+1}(b) = \frac{du^{n+1}}{dx}(b)$$

である。

Step. 2

次式により時刻 $n+1$ における u_i^{n+1} の内点値を求める。

$$u_i^{n+1} = \int_a^b E(x-y) u^n dy + \frac{\sqrt{\tau}}{2} \left[\exp(-|b-x|/\sqrt{\tau}) q^{n+1}(b) - \exp(-|a-x|/\sqrt{\tau}) q^{n+1}(a) \right] \quad (9)$$

u_i^{n+1} の内点値が求まれば $n = n+1$ として *Step. 1* に戻る。

2. 2 Crank-Nicholson 法(BMM-CN)の定式化

式(3)($\theta = 1/2$)の Dirichlet 問題に対する BMM-CN の定式化について考えよう。

BMM-CN で解析する問題は、

$$-\frac{\tau}{2} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + U(x) = F(x) \quad (10)$$

で表される 2 点境界値問題である。ここで、 $\tau = x\delta t$, $U(x)$ は未知関数, $F(x)$ は既知関数である。式(10)に対応する基本解は、

$$-\frac{\tau}{2} \frac{d^2 E(x-y)}{dx^2} + E(x-y) = \delta(x-y) \quad (11)$$

の解 $E(x-y)$ で、

$$E(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \exp(-\sqrt{2}|x-y|/\sqrt{\tau}) \quad (12)$$

である。ここで、 x, y は R^1 内にあり、 $\delta(x-y)$ は x を参照点、 y をソース点にもつ Dirac のデルタ関数である。式(3)に境界積分方程式法を適用すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{2} \int_a^b E(x-y) \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} + \int_a^b E(x-y) u^{n+1} dx \\ &= \frac{\tau}{2} \int_a^b E(x-y) \frac{d^2 u^n}{dx^2} dx + \int_a^b E(x-y) u^n dx \end{aligned} \quad (13)$$

である。式(13)に境界値を組み込むことによって線形方程式が導かれる。BMM-CN のアルゴリズムは次の通りである。

Step. 1

端点における未知な境界値を求める。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} 1 & -\exp(-\sqrt{2}|b-a|/\sqrt{\tau}) \\ \exp(-\sqrt{2}|a-b|/\sqrt{\tau}) & -1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}^{n+1}(a) \\ \tilde{q}^{n+1}(b) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \exp(-\sqrt{2}|x_1-a|/\sqrt{\tau}) u^n dx \\ \int_a^b \exp(-\sqrt{2}|x_1-b|/\sqrt{\tau}) u^n dx \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\tilde{q}^{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{du^{n+1}(a)}{dx} + \frac{du^n(a)}{dx} \right), \quad \tilde{q}^{n+1}(b) = \frac{1}{2} \left(\frac{du^{n+1}(b)}{dx} + \frac{du^n(b)}{dx} \right)$$

である。

Step. 2

次式により時刻 $n+1$ における u_i^{n+1} の内点値を求める。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= 2 \int_a^b E(x-y) u^n dy_1 - u^n \\ &+ \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \left[\exp\left(\frac{-\sqrt{2}|b-x|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{q}^{n+1}(b) - \exp\left(\frac{-\sqrt{2}|a-x|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{q}^{n+1}(a) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

u_i^{n+1} の内点値が求まれば $n = n+1$ として Step. 1 に戻る。

3. 多次元問題に対する分数段境界行列法 (FSBMM)

次の 3 次元熱方程式の初期値一境界値問題、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \Delta v \text{ in } \Omega \times (0, T] \quad (16)$$

初期、境界条件、

$$v(x_1, x_2, x_3, 0) = v^0(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}(x_1, x_2, x_3) \text{ on } \partial\Omega \quad (17)$$

に対するFSBMMを考えよう。ここで、 Ω は、3次元空間 R^3 の有界領域であり、 Δ は、3次元ラプラス作用素を示す。多次元問題の解析に対して有効な手法の1つである差分法のL.O.D.- θ 法のスキームを利用する。式(16)に対するL.O.D.- θ 法の差分スキームは、次のように与えられる。

$$\frac{v^{n+1/3} - v^n}{\delta t} = \chi \left(\theta \frac{\partial^2 v^{n+1/3}}{\partial x_1^2} + (1-\theta) \frac{\partial^2 v^n}{\partial x_1^2} \right) \quad (18a)$$

$$\frac{v^{n+2/3} - v^{n+1/3}}{\delta t} = \chi \left(\theta \frac{\partial^2 v^{n+2/3}}{\partial x_2^2} + (1-\theta) \frac{\partial^2 v^{n+1/3}}{\partial x_2^2} \right) \quad (18b)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+2/3}}{\delta t} = \chi \left(\theta \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x_3^2} + (1-\theta) \frac{\partial^2 v^{n+2/3}}{\partial x_3^2} \right) \quad (18c)$$

ここで、 $\gamma = \chi \delta t$, $0 \leq \theta \leq 1$ で、 $\theta = 0$ のとき陽的スキームを、 $\theta = 0.5$ のときCrank-Nicholsonスキームを、 $\theta = 1$ のとき陰的スキームにそれぞれ対応するものとなる。この手法は、中間段階に $v^{n+1/3}, v^{n+2/3}$ の関数を導入することで、各空間方向 x_1, x_2, x_3 を独立して考えることより1次元問題の組み合わせで近似解を得る方法である。この解法において、陰的スキームが与えられたとき1次元問題のときと同じように3重対角行列をそれぞれの方向で解くことによって解が得られるという特徴を有する。

式(16)のDirichlet問題に対するFSBMM-CNの定式化について考えよう。FSBMM-CNで解析する問題は、L.O.D.- θ 法($\theta = 1/2$)を適用するので、1次元の場合と同様に式(10)の2点境界値問題である。式(10)に対応する基本解は、式(11)の解で式(12)である。まず、式(18a)について得られる半離散形に対して基本解を作用させると、

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{2} \int_a^b E(x_1 - y) \frac{d^2 v^{n+1/3}}{dx_1^2} dx_1 + \int_a^b E(x_1 - y) v^{n+1/3} dx_1 \\ &= \frac{\tau}{2} \int_a^b E(x_1 - y) \frac{d^2 v^n}{dx_1^2} dx_1 + \int_a^b E(x_1 - y) v^n dx_1 \end{aligned} \quad (19)$$

を得る。式(19)に境界条件(17)を組み込むことによって線形方程式が導かれる。

FSBMM-CNのアルゴリズムは次の通りである。

Step. 1

端点における未知な境界値を求める。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\exp(-\sqrt{2}|b-a|/\sqrt{\tau}) \\ \exp(-\sqrt{2}|a-b|/\sqrt{\tau}) & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1^{n+1/3}(a) \\ \tilde{q}_1^{n+1/3}(b) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau}} \begin{bmatrix} -1 & \exp(-\sqrt{2}|b-a|/\sqrt{\tau}) \\ \exp(-\sqrt{2}|a-b|/\sqrt{\tau}) & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_1^{n+1/3}(a) \\ \tilde{v}_1^{n+1/3}(b) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \exp(-\sqrt{2}|x_1 - a|/\sqrt{\tau}) v^n dx_1 \\ \int_a^b \exp(-\sqrt{2}|x_1 - b|/\sqrt{\tau}) v^n dx_1 \end{array} \right\} \quad (20)$$

ここで、 $\tilde{q}_1^{n+1/3}(x_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{dv^{n+1/3}(x_1)}{dx_1} + \frac{dv^n(x_1)}{dx_1} \right)$, $\tilde{v}_1^{n+1/3}(x_1) = \frac{1}{2}(v_1^{n+1/3}(x_1) + v_1^n(x_1))$ である。

Step. 2

次式により中間段階 $n+1/3$ における $v_{x_1}^{n+1/3}$ の内点値を求める。

$$\begin{aligned} v_{x_1}^{n+1/3} = & 2 \int_a^b E(x_1 - y) v^n dy - v^n \\ & + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \left[\exp\left(\frac{-\sqrt{2}|b-x_1|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{q}_1^{n+1/3}(b) - \exp\left(\frac{-\sqrt{2}|a-x_1|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{q}_1^{n+1/3}(a) \right] \\ & - \left[-\exp\left(\frac{-\sqrt{2}|b-x_1|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{v}_1^{n+1/3}(b) - \exp\left(\frac{-\sqrt{2}|a-x_1|}{\sqrt{\tau}}\right) \tilde{v}_1^{n+1/3}(a) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

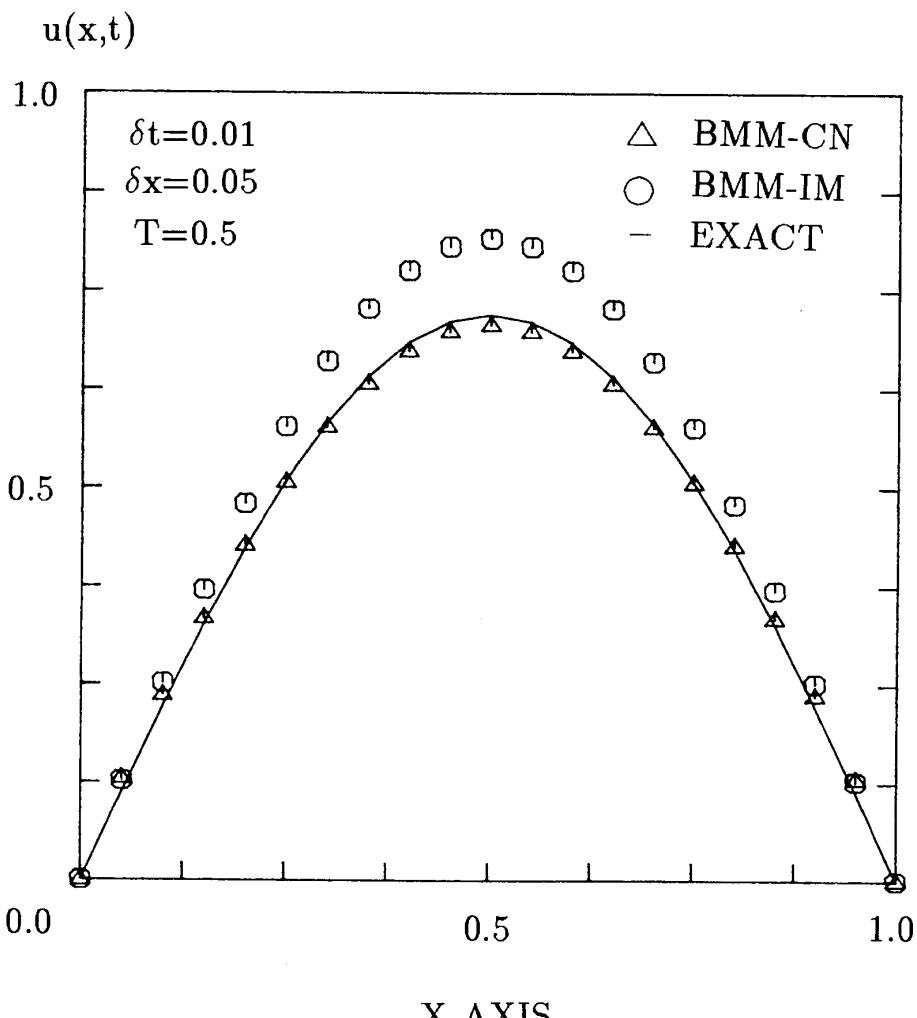


図 1 例題 1 の数値結果

である。 $v_{x_1}^{n+1/3}$ の内点値が求まれば式(18b)についても同様に行う。

4. 数 値 実 験

例題 1

1次元熱方程式に対して次の境界一初期値条件,

$$u(0) = u(1) = 0 \text{ on } \partial\Omega, u(x,0) = 100\sin(\pi x)$$

に対するBMM-IM, CNを考えよう。時間刻み幅 $\delta t = 0.01$, 空間刻み幅 $\delta x = 0.05$, 時間 $T = 0.5$ で厳密解,

$$f = 100\exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$$

と比較したものが、図1である。

例題 2

3次元領域(図2)に対して、次の境界一初期条件,

$$v(x,t) = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

$$v(x,0) = 100\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)$$

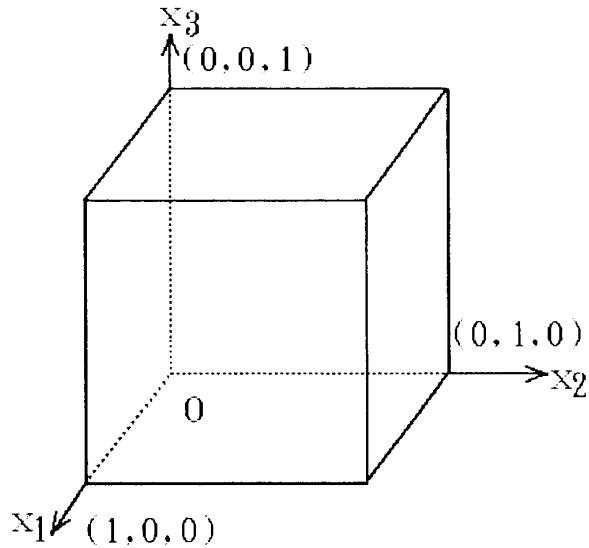


図2 例題2で解析する3次元領域

表1 $\delta t = 0.01$, $\delta x = 0.05$, $x = 0.5$, $T = 0.5$, $\kappa = 0.5$ におけるFSBMMとL.O.D.法の教値解

exact solution = 0.3719872E-04			
FSBMM-CN	FSBMM-IM	LOD-CN	LOD-IM
0.3516396E-04	0.5432556E-04	0.3789032E-04	0.7591980E-04

が与えられたとき, FSBMM-IM, L.O.D.- θ 法で解析する。時間刻み幅 $\delta t = 0.01$, 空間刻み幅 $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3 = 0.05$ で一様分割し, $x = 0.5$, 時間 $T = 0.5$ のとき厳密解,

$$f = 100 \exp(-3\pi^2 t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3)$$

と比較したのが表 1 である。

例題 3

3 次元領域(図3)に対して, 次の境界—初期条件,

$$v(x,t) = 0 \text{ on } \partial\Omega, v(x,0) = 100$$

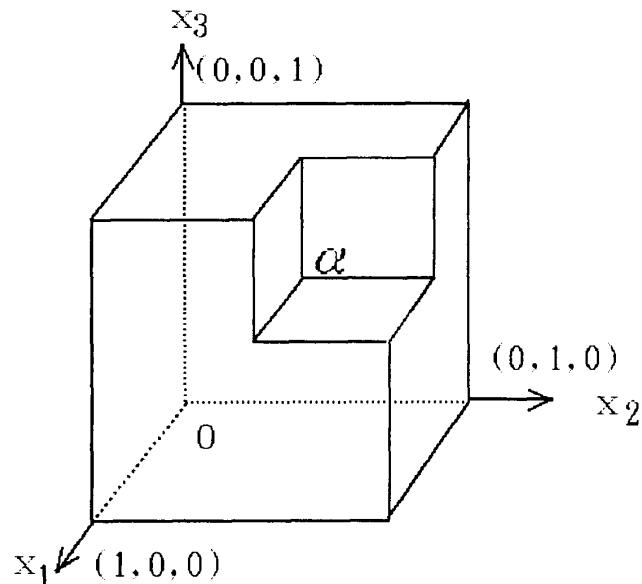


図3 例題3で解析する3次元領域 $\alpha = (0.5, 0.5, 0.5)$

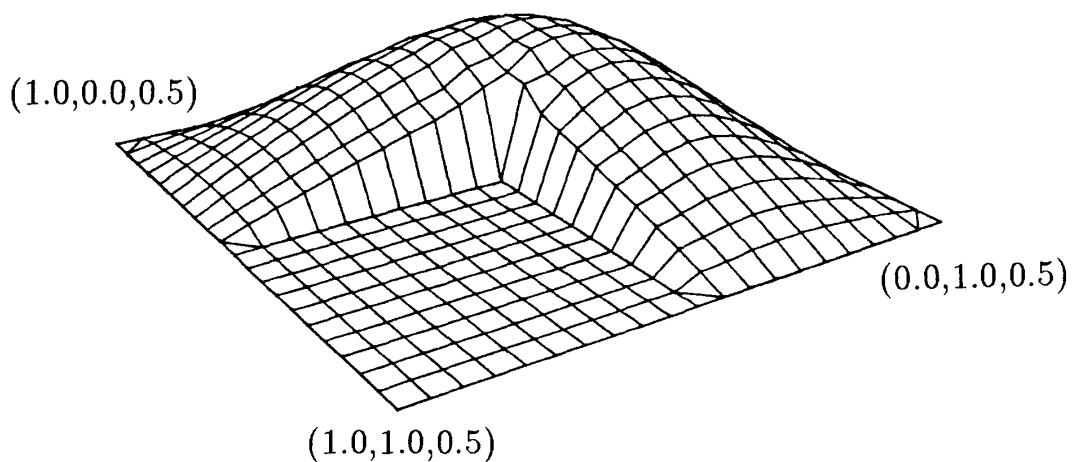
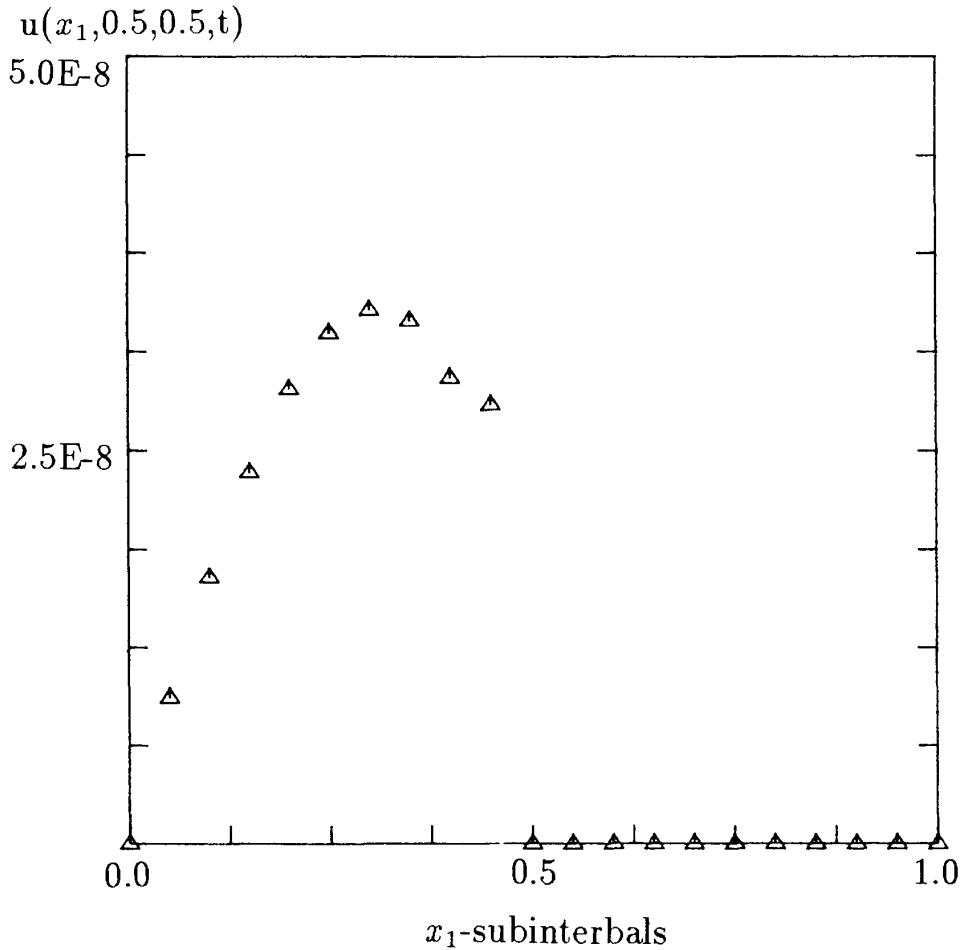


図4 $T=0.5, x_3=0.5$ における $\{x_1, x_2\}$ 平面の数値結果

図 5 図 4 における $T = 0.5, x_2 = 0.5$ の x_1 の数値解

が与えられたとき FSBMM-CN で解析する。時間刻み幅 $\delta t = 0.005$, 空間刻み幅 $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3 = 0.05$ で一様分割し, 時間 $T = 0.5$ のときの結果を, 図 4, 5 に示す。図 4 は, $x_3 = 0.5$ のときの $\{x_1, x_2\}$ 平面での数値解を示し, 図 5 は, 図 4 における $x_2 = 0.5$ のときの x_1 の数値解を示す。

例題 4

2 次元 L 字型領域(図6)に対して FSBMM-CN で解析する。初期条件, 境界条件は図 6 に示すように仮定する。 $\delta t = 0.01, \delta x_1, \delta x_2 = 0.1$ のときの結果を図 7 に, $\delta t = 0.005, \delta x_1, \delta x_2 = 0.1$ のときの結果を図 8 に示す。結果の時間は, それぞれ $T = 0.5$ である。図 7, 8 において $x_2 = 0.4$ ときの x_1 の数値解を図 9 に示す。

5. ベクトル化率

分数段法を適用した本手法は, 多次元問題を 1 次元問題に還元することによって, 各時間ステップ毎の各空間方向の解が互いに独立し干渉しない。しかも, 解析的に求められる

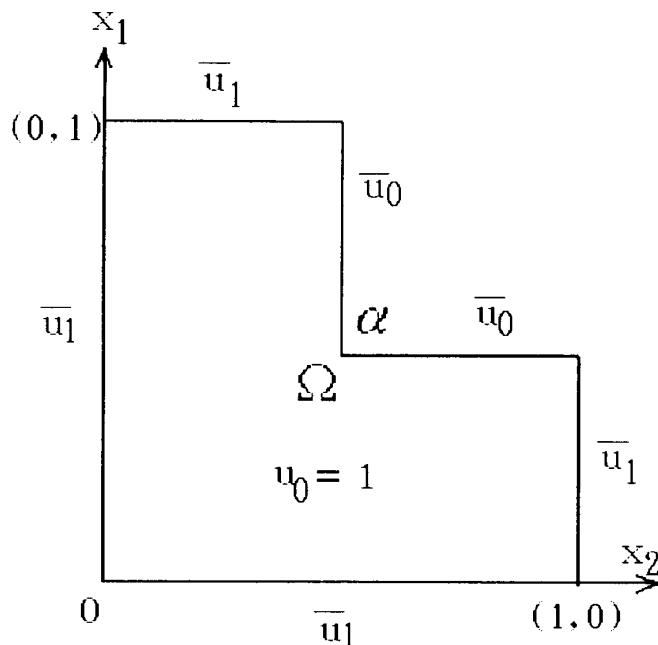


図6 例題4で解析する2次元L字型領域 $\alpha = (0.5, 0.5)$, I.C. $v_0 = 1.0$
B.C. $\bar{v}_0 = 0.0, \bar{v}_1 = 1.0$

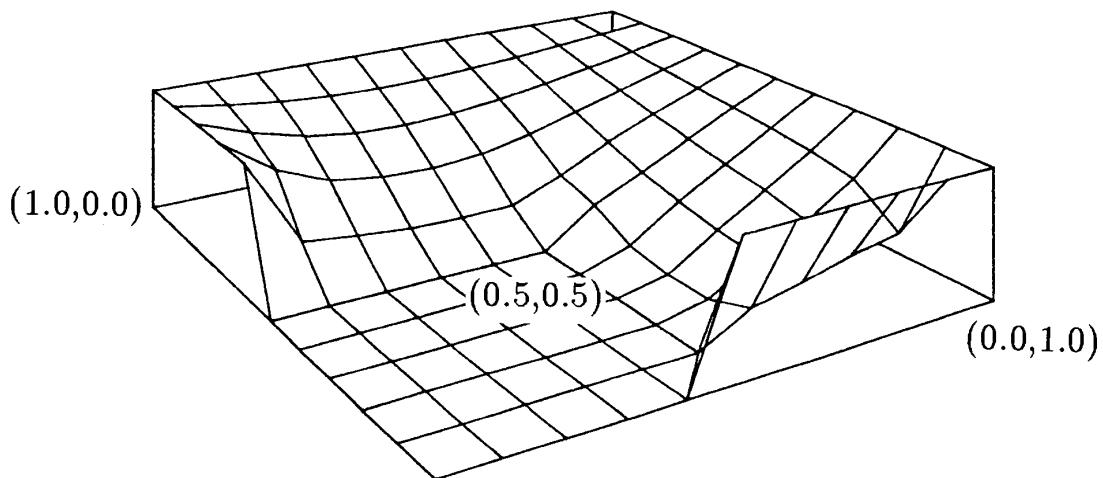
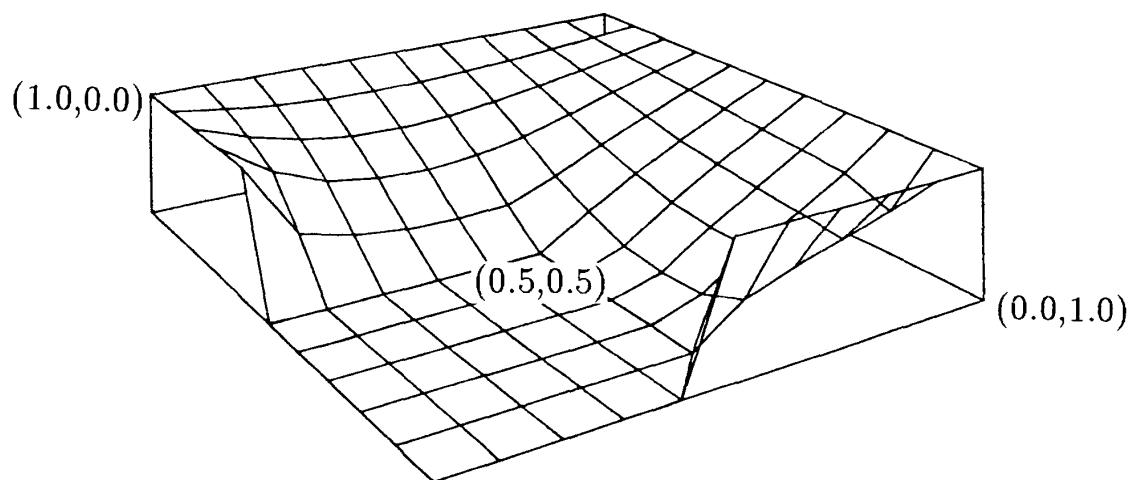
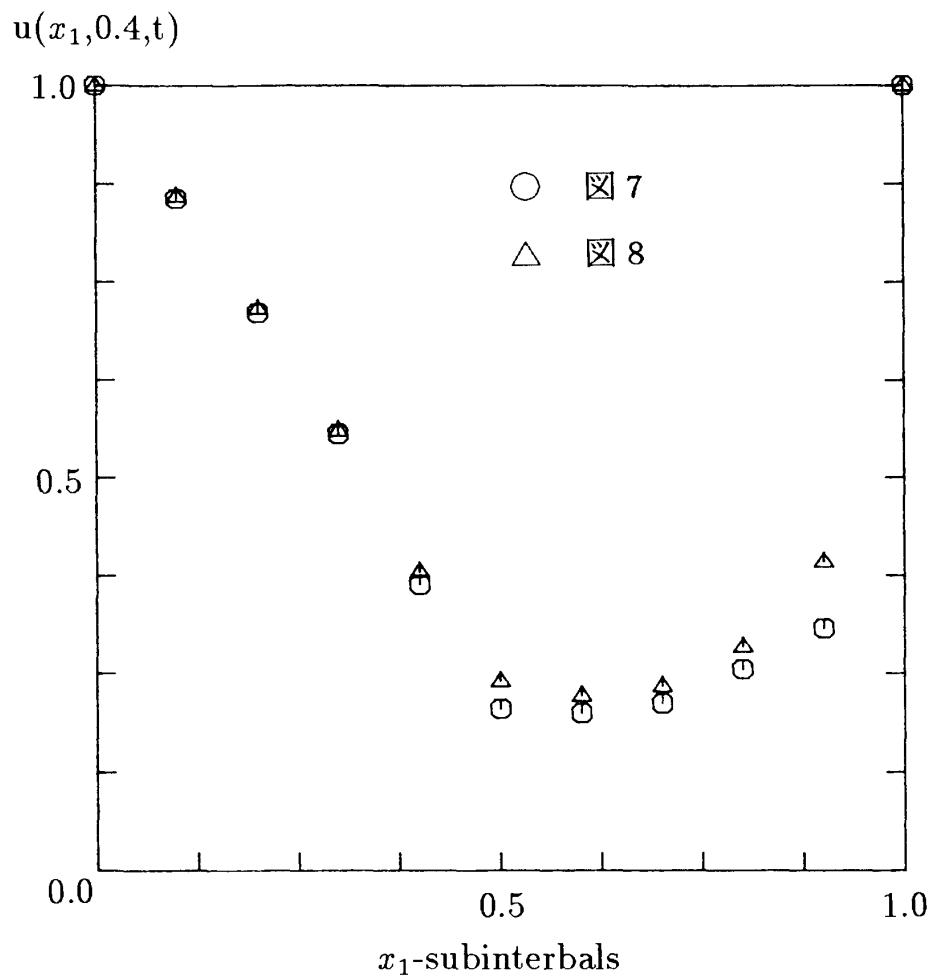


図7 $\delta t = 0.01, \delta x = 0.1, T = 0.5$ の数値結果

部分が多く計算も簡単であるために、プログラムの改良に手間がかからない。したがって、本手法はこれまでの境界要素法と比べベクトル処理に適していると思われる。FSBMMの具体的な計算手順は、図10に示すフローチャートに従って行われる。

- 1) 初期、境界値、拡散係数、時間刻み幅、空間刻み幅、目的時間を設定する。
- 2) x_d 方向に対して、式(20)の右辺の領域積分を行う。
- 3) 式(20)より、左辺の逆行列は解析的に求めることができるので、手計算を行い代入によって未知な境界値を求める。

図8 $\delta t=0.005, \delta x=0.1, T=0.5$ の数値結果図9 図7, 8の $T=0.5, x_2=0.4$ の x_1 の数値結果

- 4) 式(21)に従って領域内の内点値を求める。
- 5) $d=d+1$ ($d \leq 3$)として処理2)に戻る。

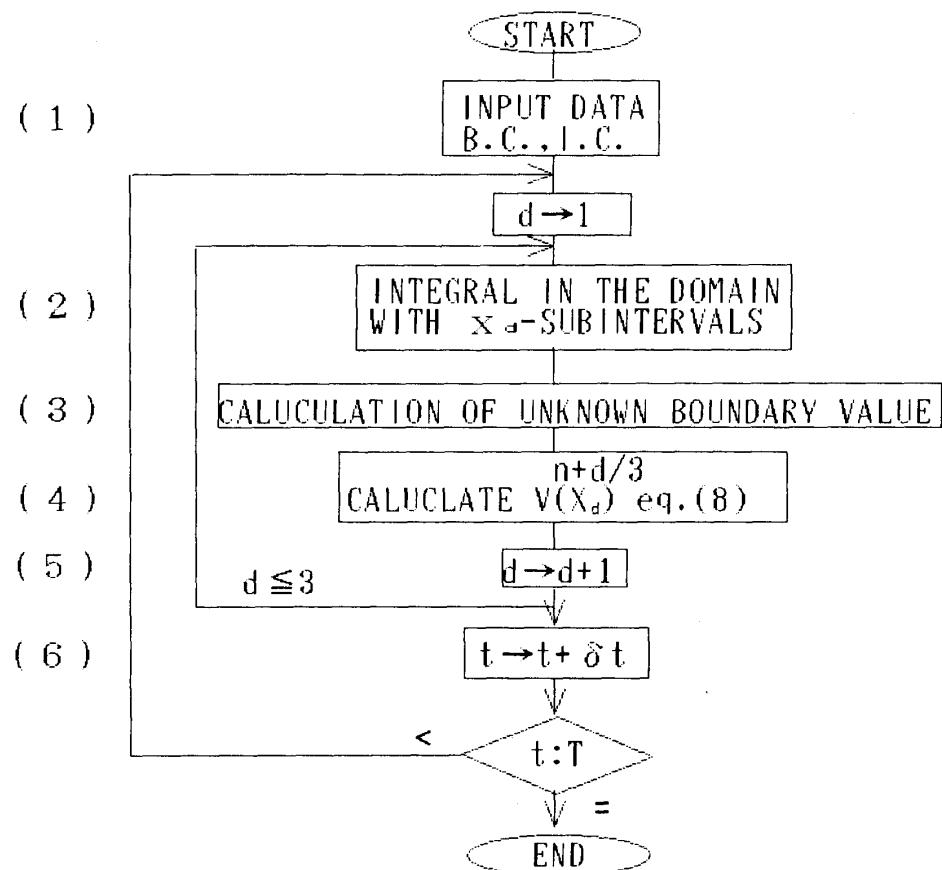


図10 FSBMM の流れ図, T : 必要な結果時間

表2 M380と VP30E の CPU-TIME の比較

N	10	20	30	40
M380	18.88	323.59	1665.14	—
VP30E(A)	9.70	92.61	373.94	985.42
VP30E(B)	2.59	20.16	80.38	251.39
VP30E(C)	0.14	9.20	49.09	145.29

6) 時間増分を行い必要な結果の時間まで処理 2) に戻ることを繰り返す。

例題 2 に対して FSBMM で解析を行ったときの計算時間について検討する。領域は一様に N 分割し T = 0.5までの計算時間の結果を表 2 に示す。使用した計算機は、富士通のスーパーコンピュータ VP30E, 大型汎用コンピュータ M380である。ベクトル計算機での処理速度向上のためのプログラムの改良過程を (A), (B), (C) とし,

(A) M380で解析を行ったプログラムの各計算過程 (図10の 2, 3, 4) を 2 重にした場合

(B) (A)のプログラムの領域積分中の指數関数值を配列に読み込んでリストアップした

場合

(C) (B)で解析を行ったプログラムの各計算過程(図10の2, 3, 4)を10重にした場合である。

6. おわりに

ここでは、非定常熱拡散方程式の初期一境界値問題に対して、境界行列法、分数段境界行列法の定式化を行った。この手法の特徴は、用いる基本解が連続関数で特異積分を必要としないこと、積分方程式により離散化されて現れた代数方程式が、 2×2 行列になり簡単な手計算で逆行列を求めることができる。また、陰的スキームを用いているにもかかわらず陽的のように扱える点である。上記の特徴はプログラム組むときアルゴリズムを単純にするので、内部ループにおいて同一処理の本数を簡単に増加することができた。スーパーコンピュータ VP30E で解析を行った結果、大型汎用コンピュータ M380 に比べ CPU TIME で約34倍、ベクトル化率は、99.6%まで高めることができた。このことは、多次元問題の解析に対して有効であると思われる。本手法により得られた数値例では、Crank-Nicholson スキームを用いたとき良い結果が得られることが分かった。領域がかけた場合の数値解は、時間刻み幅に解が依存している。今後は、時間刻み幅と空間刻み幅の関係が数値解にどのような影響を与えていくか調べてゆくと共に、移流拡散、非線形問題に適用することにより本手法の有効性を明らかにして行きたい。

参考文献

- 1) 境界要素法研究会編：境界要素法の理論と応用、pp. 158—176、コロナ社 (1986)。
- 2) 矢嶋信夫、野木達夫：発展方程式の数値解析、pp. 213—215、岩波書店 (1977)。
- 3) 木村、榎原、仁木：熱方程式に対する分数段境界行列法、pp. 153—158、境界要素法論文集第7巻 (1990)。
- 4) 木村、榎原、仁木：ベクトル計算機における熱方程式に対する分数段境界行列法について、pp. 21—26、BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集第1巻 (1991)。
- 5) Kesavan, S. and Vasudevamurthy S.A.: On Some Boundary Element Methods for the Heat Equation, Numer. Math., 46, pp. 101—120, 1985

Boundary Matrix Method with Method of Fractional Steps for Heat Equation

Hironori KIMURA*, Michio SAKAKIHARA** and Hiroshi NIKI**

**Department of Applied Mathematics, the Graduate School of Science,
Okayama University of Science.*

***The Department of Applied Mathematics,
Okayama University of Science.
1-1 Ridai-cho, Okayama 700 Japan*

(Received September 30, 1991)

The paper presents a numerical method for solving an initial-boundary value problem of heat equations. The boundary matrix method, which is a kind of boundary element method, is formulated for the one-dimensional problem. The solution procedure is applied to two-and three-dimensional problems with the local one-dimensional method. Although the present method is a kind of implicit method, it is easy to describe it with an explicit form. It means that it is unnecessary to solve a large linear system to proceed the numerical time integration. The present algorithm suits a vector computer since two-and three-dimensional problems are reduced to one-dimensional problems. We show some numerical examples to verify the method, numerically and discuss the ratio of vectorization on the supercomputer VP30E. Consequently, we develop the program which has 99.6% vectorization.