LP 問題における Karmarkar 法について

中山貴史・成久洋之*
岡山理科大学大学院理学研究科修士課程電子理学専攻
*岡山理科大学工学部電子工学科

(1990年9月30日　受理)

1．はじめに

線形計画法（Linear Progaramming; LP）とは，線形不等式の制約条件の下で線形の目的関数を最大または最小にするものをいう。ＬＰの解法としては，1947年，G. B. Dantzig によって発明された単体法が40年もの間オペレーションズ・リサーチの中心的な役割を占めてきた。ＬＰの適用範囲は幅広く，工業，商業，軍事など社会全般にわたっている。近年のコンピューター技術の発達により扱われるLP問題の規模はますます大きくなり，条件式や変数の数が数百，数千といった大きなものとなってきている。しかし，単体法では計算の上限が変数や条件式の個数に対して指数オーダーになる場合があり，問題の大規模化に対しては適切な解法とはいえない。これは，ある特定のピボッティング規則に対して可能解が構成する凸多面体のすべての頂点をたどらなければ最適解に到達できない問題が存在し，凸多面体の頂点の数は変数や条件式の数について組み合わせ的に増大するからである。そこで，これまで各種解法が提案されたが，いずれも単体法にはおよばなかった。1979年，ソ連の Khachiyan によって提案された楕円体法が初めて多項式オーダーの解法として発表された。この解法は，結局単体法に比べると大変効率の悪い解法であった。しかし，多項式オーダーの解法を世に示したという点においては大きな意義があったといえる。1984年，Karmarkar によって提案された解法は，前の Khachiyan の方法と同じく多項式オーダーの解法であり，単体法に代わるものとして注目されている。本研究では，この Karmarkar 法が実際にどの程度有効であるのかを比較検討するものである。

2. Karmarkar 法

2. 1　Karmarkar 法の概要

線形計画問題を解く方法として単体法が最も一般的な方法であるが，境界面を迂回しながら最適点に到達するというこの考え方は，線形計画法の初期の頃には効率悪いものと考えられ，凸多面体の内部を進んで行くという内部経路法がいくつか提案された。しかし，そのいずれもが単体法に遠くおよばないことが明らかにされ，線形計画法は単体法を中心

として確立されていった。単体法は最悪の場合の計算量を基準とした計算の複雑度の立場からいえば指数オーダーの解法となるためとても良い解法とはいえない。1984年に提案された Karmarkar による解法は多項式オーダーの解法であり，最近の内部経路法の出発点となる方法である。

次のような LP 問題が与えられているものとする。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{目的関数} & z=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \longrightarrow \min \\ \text{制約条件} & \mathbf{A}\,\mathbf{x}=0 \\ & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=1 \\ & \mathbf{x}\geqq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.\ 1)$$

ここで，$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$，$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathbf{c}\in\mathbf{R}^n$，$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ である。この形は Karmarkar 法の標準形であり，どのような線形計画問題もこの形に書くことができる。この基本問題には次の 3 つの仮定を満足しているものとする。

1. z の最小値は 0 である。
2. $\mathbf{x}^0>\mathbf{0}$ を満たす可能解が与えられている。
3. 制約式が $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ という同次式の形になっている。

これらの仮定を取り除く方法については後で述べることにする。

この問題の実行可能領域は

$$\mathbf{X}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n \mid \mathbf{Ax}=\mathbf{0},\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=1,\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$$

と書かれる。

仮定 2．に対して

$$\mathbf{X}^0=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n \mid \mathbf{x}\in\mathbf{X},\ \mathbf{x}>\mathbf{0}\} \qquad (2.\ 2)$$

を定義する。Karmarkar 法も単体法と同じく，適当な実行解 $\mathbf{x}^0\in\mathbf{X}$ を出発点として

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{k+1}<\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \qquad (2.\ 3)$$

を満たす実行可能解の列を生成していくが，それらが $\mathbf{X}$ の基底解の列ではなく，$\mathbf{X}^0$ の点列，すなわち $\mathbf{x}^k>\mathbf{0}$ を満たす点列を生成していく。

まず，$\mathbf{x}>\mathbf{0}$ に関してポテンシャル関数

$$f(\mathbf{x}\,;\,\mathbf{c})=n\ln\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-\sum_{j=1}^{n}\ln x_j=\ln\frac{(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^n}{x_1\,x_2\cdots x_n} \qquad (2.\ 4)$$

を考える。$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*=0$ を満たす x の点 X^* を求めることが目的であるが $f(\mathbf{x}\,;\mathbf{c})$ の最小化を考えることにより間接的に $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$ を減少させ，最適解を求めていこうとするものである。

さて，(2. 4) より

$$\exp\ f(\mathbf{x}\,;\mathbf{c})=\frac{(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^n}{x_1\,x_2\cdots x_n} \qquad (2.\ 5)$$

であるから，$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ を0に近づけるには $x_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ なので，$\exp f(\mathbf{x};\mathbf{c})$ を0に近づければ良い。$\exp f(\mathbf{x};\mathbf{c})$ を0に近づけるためには $f(\mathbf{x};\mathbf{c})$ をマイナス方向に大きくしてやれば良いので，$f(\mathbf{x};\mathbf{c})$ を1ステップごとに一定値以上減らすことができるなら，それは $\mathbf{x}$ が境界に近づくか否かにかかわらず，$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ の値を最小値0に近づけることができる。

Karmarkar 法では，$\mathbf{X}^0$ の点列 $\mathbf{x}^k$ $(k=1, 2,\cdots, n)$ を生成するために射影変換と呼ばれるものを使う。この射影変換は

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{n}{\mathbf{e}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}, \tag{2. 6}$$

と書かれる。ここで，$\mathbf{D}=\mathrm{diag}(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ である。この変換により，x 空間の単体Sは x' 空間の単体 S' に移り，逆に S' から S へは逆変数 T^{-1} により移る。逆変換 T^{-1} は次のように表される。

$$\mathbf{x} = \frac{n}{\mathbf{e}^T\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{x}}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} \tag{2. 7}$$

変換T, T^{-1} により単体SとS' の間は1対1対応となり，S_n の第j頂点はそれ自身に射像される。さらに点 $\mathbf{x}^0$ には単体 S' の重心が対応する。

2.2　アルゴリズム

(2. 1) 式で与えられた基本問題を解くために点列 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \cdots, \mathbf{x}^n$ を規則

$$\mathbf{x}^{k+1} = \phi(\mathbf{x}^k)$$

により生成する。一般に入力 $\mathbf{a}(=(a_1, a_2, \cdots a_n))$ から出力 $\mathbf{b}=\phi(a)$を得る手順を次に示す。

STEP　1

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\,\mathbf{D} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{e}^T \end{bmatrix}$$

とする。

ここに

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^T = (1, 1, \cdots, 1)$$

とする。

STEP　2

目的関数の係数ベクトル $\mathbf{Dc}$ を S' 上へ直交投影する。

$$\mathbf{c}_p = [\mathbf{I} - \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}]\ \mathbf{Dc}$$

STEP 3

$\mathbf{c}_p$ を正規化する。

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_p / |\mathbf{c}_p|$$

STEP 4

$$\mathbf{b}' = \mathbf{a}_0 - \alpha r \bar{\mathbf{c}}$$

とする。

ここに $$\mathbf{a}_0 = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^T$$

$$r = \frac{1}{(n(n-1))^{1/2}}$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

STEP 5

逆変換を行う。

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{b}'}{\mathbf{e}^T \mathbf{D}\mathbf{b}'}$$

STEP 6

収束判定する。判定基準を満たしているなら終了する。

満たしていないなら STEP1 へもどる。

このSTEPの中で最も計算量の多い部分はSTEP2である。このSTEP2には $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$ という計算が含まれ，これをまともに解いていたのではかなり多くの時間がわかってしまう。そこで，これを近似値の形で解こうという様々な研究がなされている。

2. 3 仮定除去

上のアルゴリズムは，（2．1）の基本問題において3つの仮定が成り立つという前提のもとで Karmarkar 法を使うことができた。しかし，この3つの仮定は次の方法でそれぞれはずすことができる。

2. 3. 1 同次形にする（仮定3をはずす）。

まず，次の線形計画問題が与えられているものとする。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{目的関数} & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \longrightarrow \min \\ \text{制約条件} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (2.\ 8)$$

ここで，$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ である。

この制約条件を同次形にし，かつ $\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1$, $\mathbf{e}^T = (1, 1, \cdots, 1)$ となるようにするためには次のような変形をおこなう。まず，十分大きなMに対して

$$\mathbf{e}^T \mathbf{x} \leqq M \qquad (2.\ 9)$$

として，スラックス変数 $\mathbf{x}_{n+1}$ を導入して

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}_{n+1} = \mathrm{M} \tag{2. 10}$$

とする。次に

$$\mathbf{x}_i' = \frac{x_i}{\mathrm{M}} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1) \tag{2. 11}$$

となる。

$$\mathbf{e}^T\mathbf{x}' + \mathbf{x}'_{n+1} = 1 \tag{2. 12}$$

（2. 8）の制約式の第1式は

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_i' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{M}}\mathbf{b} \tag{2. 13}$$

となり

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_i' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} - \frac{1}{\mathrm{M}}\mathbf{b}\,(\mathbf{e}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}'_{n+1}) = \mathbf{0} \tag{2. 14}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \vdots \mathbf{0} \end{bmatrix} - \frac{1}{\mathrm{M}}\mathbf{b}\mathbf{e}^T$$

とすると（2.14）式は

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

が得られる。よって，すべての線形計画問題は同次形にすることができる。

2. 3. 2 初期可能解を求める（仮定２をはずす）。

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ を満たす可能解を求めるために，任意に $\mathbf{x}^0 > \mathbf{0}$ を選び次のようなLP 問題を作る。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \lambda \longrightarrow \min \\ \text{制約条件} & (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{Ax}^0 - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{2. 16}$$

この LP 問題を $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ，$\lambda = 1$ という正の可能解をもっている。これを同次形に直して前の Karmarkar 法を適用する。$\lambda \longrightarrow 0$ になったとき，$\mathbf{x}$ は原問題の初期可能解となっている。$\lambda \rightarrow 0$ にならないときは，不能とする。

2. 3. 3 最適解を０にする（仮定１をはずす）。

最小値が０とならない場合，最も簡単なのはその問題の双対問題を考えることである。(2. 8) で与えられた問題は次の LP 問題を解くことにより，最適解が得られる。

$$\left.\begin{array}{lll} \text{目的関数} & f(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}-\mathbf{b}^T\mathbf{y} & \longrightarrow\ \min \\ \text{制約条件} & \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} & \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y}\leqq\mathbf{c} & \\ & \mathbf{x}\geqq\mathbf{0} & \end{array}\right\} \qquad (2.\ 17)$$

しかし，この方法では双対変数 $\mathbf{y}$ をつけ加わえるために問題の規模がかなり大きくなるため有効な方法とはいえない。そこで

$$z^*=\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\in X\} \qquad (2.\ 18)$$

とする。z^* の下限値を 1 とし，(2. 4) 式を

$$f(\mathbf{x}\,;\mathbf{c})=n\ln(\mathbf{c}^T\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{n}\ln x_j \qquad (2.\ 19)$$

とすれば，下限値 1 を次第に z^* に近づけることにより

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^k \longrightarrow z^* \qquad (2.\ 20)$$

となり，最適解を得ることができる。

2. 4 数値計算例

ここでは，まず Karmarkar 法の働きについて述べるため仮定はすべて満足しているような簡単な例をあげる。

次の線形計画問題が与えられているものとする。

$$\begin{array}{lll} \text{目的関数} & Z=x_1+2x_2 & \longrightarrow\ \min \\ \text{制約条件} & x_1+x_2+x_3=1 & \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geqq 0 & \end{array}$$

また，初期可能として

$$x_1^0=0.\ 2$$
$$x_2^0=0.\ 3$$
$$x_3^0=0.\ 5$$

が与えられているものする。制約条件を満たしている実行可能領域は図 1 に示される正三角形である。これを単体 S とする。

次に，(2. 6) で与えられている射影変換により x 空間の単体 S は x' 空間の単体 S ' に移る。これを図 2 に示す。このとき，A は A' に，B は B' に，C は C' に対応している。

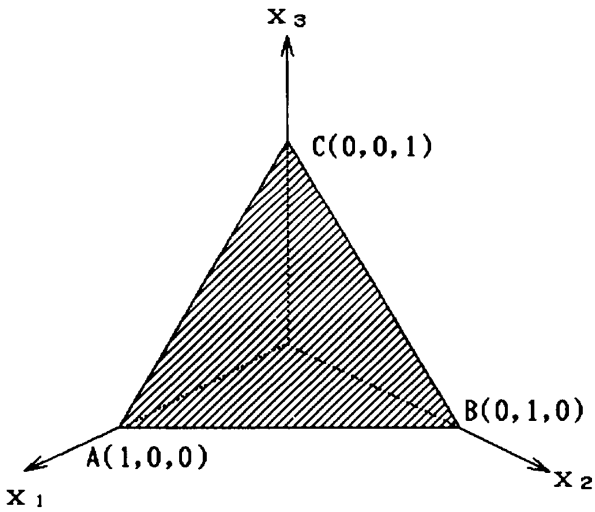

図1　実行可能領域.

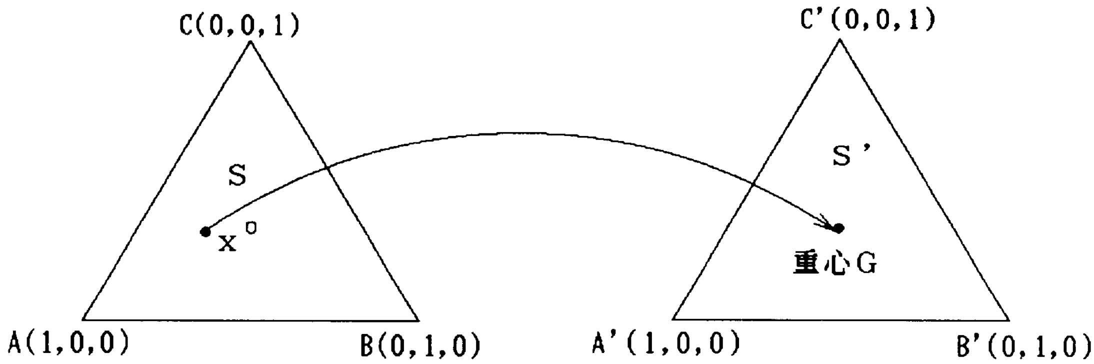

図2　射影変換.

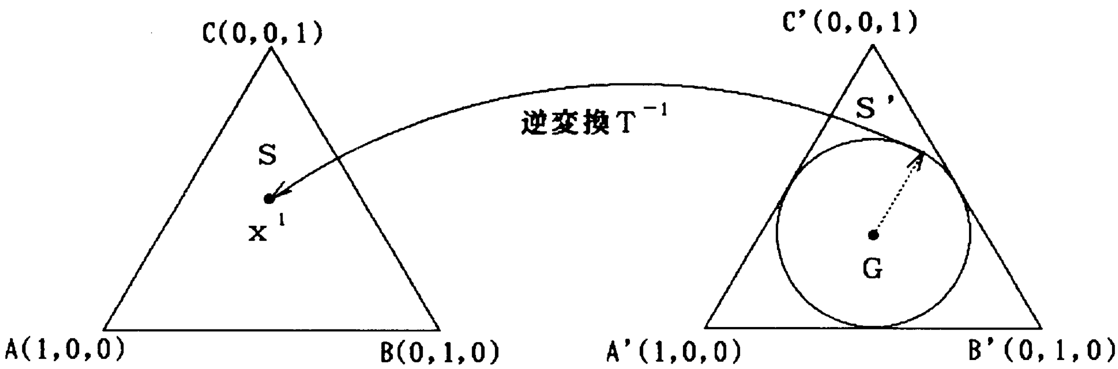

図3　内接円での最小化および逆変換.

さらに，$\mathbf{x}^0=(\mathbf{x}_1{}^0, \mathbf{x}_2{}^0, \mathbf{x}_3{}^0)$ は単体 S' の重心 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ に射影される。

よって，上の問題は次のような問題に射影される。

目的関数　$Z=\dfrac{0.2\,x_1'+0.6\,x_2'}{0.2\,x_1'+0.3\,x_2'+0.5\,x_3'} \longrightarrow \min$

制約条件　$x_1+x_2+x_3=1$

$x_1',\ x_2',\ x_3'\geqq 0$

ここで，分母を無視して分子

$$0.2\,x_1' + 0.6\,x_2'$$

ここで単体S’の内接円上で最小化することにする。そのためには目的関数の勾配方向を単体S’上に直角により投影してその逆方向により進み内接円に点を求めれば良い。そして，(2. 6) によって投影された点は

$$x_1^{1\prime}=0.214$$
$$x_2^{1\prime}=0.124$$
$$x_3^{1\prime}=0.663$$

となる。これを (2. 7) によって逆変換し，x空間にもどすと

$$x_1^1=0.386$$
$$x_2^1=0.134$$
$$x_3^1=0.479$$

を得る。このときの内接円での最小化と逆変換の様子を図で示すと図3となる。得られた $\mathbf{x}^1=(x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1)$ を前と同じように射影変換し，これを元に戻す。この操作を繰り返すと，x^k は次のような点列を生成していき，次第に最適点に近づいていく。

x空間	x’空間
$\mathbf{x}^0=(0.5,\ 0.3,\ 0.2\ )$	
$\mathbf{x}^1=(0.386,\ 0.134,\ 0.479)$	$\mathbf{x}^{1\prime}=(0.214,\ 0.124,\ 0.663)$
$\mathbf{x}^2=(0.090,\ 0.092,\ 0.819)$	$\mathbf{x}^{2\prime}=(0.088,\ 0.260,\ 0.652)$
$\mathbf{x}^3=(0.056,\ 0.007,\ 0.937)$	$\mathbf{x}^{3\prime}=(0.337,\ 0.043,\ 0.620)$
$\mathbf{x}^4=(0.001,\ 0.006,\ 0.993)$	$\mathbf{x}^{4\prime}=(0.010,\ 0{,}423,\ 0.567)$
$\mathbf{x}^5=(0.001,\ 0.000,\ 0.999)$	$\mathbf{x}^{5\prime}=(0.474,\ 0.001,\ 0.524)$
$\mathbf{x}^6=(0.000,\ 0.000,\ 1.000)$	$\mathbf{x}^{6\prime}=(0.000,\ 0.493,\ 0.507)$
$\mathbf{x}^7=(0.000,\ 0.000,\ 1.000)$	$\mathbf{x}^{7\prime}=(0.498,\ 0.000,\ 0.502)$

3．実験結果の比較検討

本研究では，Karmarkar 法と単体法との平均実行処理時間の比較を行った。使用したコンピューターは，富士通M380である。ＬＰ問題は一様乱数によるシミュレーション問

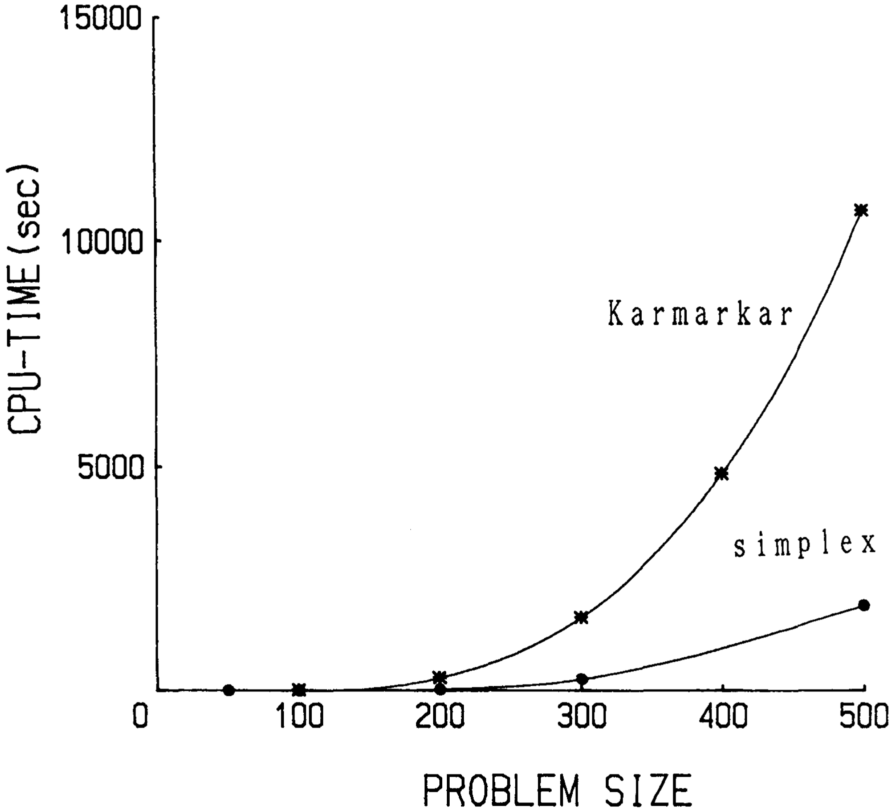

図4　Karmarkar 法と単体法の比較.

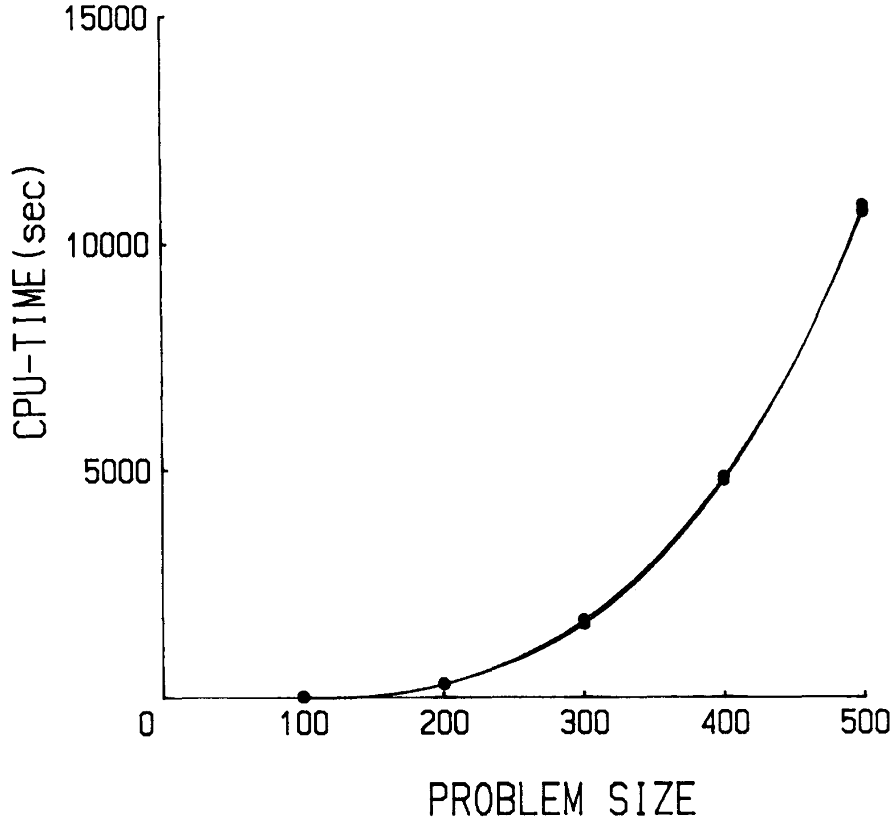

図5　零の割合に対する比較（Karmarkar 法）.

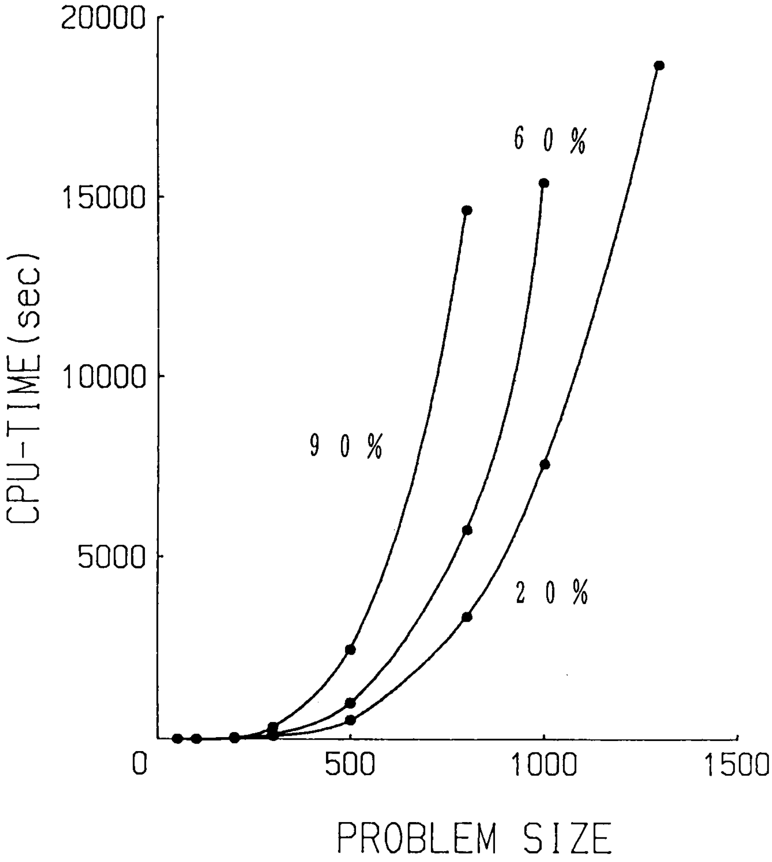

図6 零の割合に対する比較（単体法）.

題であり，係数要素は−10から10，定数は2500から8500，目的関数の係数要素は−30から30までとった。また，係数要素に含まれる零は全要素に対して60%とし，負の要素は非零要素に対して10%とした。その結果を図4に示す。ここで，問題の規模とは変数の数および条件式の数を表している。Karmarkar 法は単体法に対して有効性を示さなかった。

次に，係数要素の零の割合を変えて両者の比較を行った。その結果を図5，図6に示す。図5は単体法であり，図6は Karmarkar 法である。零の割合はそれぞれ20%，60%，90%をとった。単体法は零の含有率が大きくなると，処理時間は大きくなっているが，Karmarkar 法についてはその傾向がみられない。一般に，問題の規模が大きくなると零の割合は増加する。Karmarkar 法は零の含有率の大きな問題に対してはより有効であると考えられる。

4．考察および今後の課題

本研究においては，Karmarkar 法が単体法に比べてどの程度有効であるのかを調べた。まず，問題の規模に対する比較であるが，Karmarkar 法は単体法に対して有効性は示さなかった。今回の実験では，αを1とし，収束条件は目的関数が10^{-6}以下となるようにした。αを変えてよりはやく収束する値を見つければもっと良いものになっていたであろう。

しかし，Karmarkar 法が単体法よりも有効性がないにしてもKarmarkar 法は多項式オーダーで処理時間が抑えられるのに対して，単体法の場合は平均的には多項式オーダーになっているが，最悪の場合を考えると指数オーダーになってしまうという欠点がある。このことはKarmarkar 法にとってはかなり有利なことといえる。これは，Karmarkar 法のアルゴリズムの中で（$(\mathbf{BB}^T)^{-1}$）を求める部分の計算がかなり多くの時間を費やしているものと考えられ，この部分の改良が Karmarkar 法をさらに有効なものとすることができる。現在，この種の数多くの論文がでているが，これらのアルゴリズムとの比較は今後の課題となる。

参考文献

1) G. B. Dantzing : "Application of the Simplex Method to Transportation Problem," in K－9(1951).
2) N.Karmarkar, "A new polynomical-time algorithm for linear programming", Proceedings of 16 th Annual ACM Symposium of Theory of Computing, Washington D. C., (1984).
3) 刀根薫："Karmarkarの新ＬＰ解法"，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 30, No.3－4(1985).4) 今野浩："線形計画法"，日科技連，1987.

On the Efficiency on the Karmarkar Algorithm for Linear Program

Takafumi NAKAYAMA* Hiroyuki NARIHISA**
*Graduate School of Science,
**Faculty of Engineering
Okayama University of Science,
Ridaicho 1-1, Okayama 700, JAPAN

(Received September 30, 1990)

Since G.B.Dantzig proposed Simplex Method for solving the linear programming problems, a lot of extensions and versions of the simplex method have been presented. However the simplex method is basically considered to be most efficient and stout algorithm at the point of pratical algorithm. Nevertheless, the simplex method is said to be the exponential type algorithm esentially for the large scale linear programs. In 1984,Karmarkar proposed a polynomial type algorithm. In these days, the polynomial type algorithm is very attractive algorithm comparing with the exponential one.

In this paper,we present the basic concept of Karmarkar s algorithm and discuss the efficiency of the classical simplex method and Karmarkar's one as a actual use of practical algorithm. As a results of our numerical simulation, we conclude that Karmarkar s algorithm is not so good at the points of practical usgein spite of its attractiveness in theory.