

3 周波交代 FSK 方式の耐マルチパス特性

李 勅*, 小西憲一**, 宮垣嘉也**

*岡山理科大学大学院工学研究科博士課程システム科学専攻

**岡山理科大学工学部電子工学科

(1990年9月30日 受理)

1. まえがき

統合デジタル網 (ISDN) の一環として、高速 (数100Kbps) デジタル移動通信システムの研究開発が行われているが、最大の問題は、マルチパス伝搬に起因する選択性フェージングによるデジタル信号の符号間干渉 (ISI) による伝送信頼度の極端な劣化であり、それを克服する手段として、等化器、誤り訂正符号、ダイバーシチ合成などが検討されているが、これらは効果的であるが相当の代価も要する。他の方策として、デジタル信号や変復調法そのものをマルチパス遅延干渉に強い方式に改善するいわゆる耐マルチパス信号化がある⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。本研究は、その範ちゅうに入るもので、通常の FSK が 2 周波を使用するのに対して、擬似 3 値的に 3 周波で FSK することによってマルチパス干渉を避けようとする試みである。

論文では、まず 3 周波交代 FSK 方式 (以下、3 交代 FSK) の原理と方式の構成を提示し、その伝送誤り率特性を理論的に解析・評価し、2 周波交代 FSK (2 FSK) の計算の結果との比較し、最後にこの方式の問題点と今後の課題について述べている。

2. 3 周波交代 FSK 方式

従来の 2 周波 FSK (2 FSK, 図 1) では、2 進情報に固定的に対応して 2 周波 f_0 , f_1 が送信されるが、3 交代 FSK では、図 2 のように f_0 , f_1 , f_2 の 3 周波を用い、かつ、図 2 に示すような遷移によって 2 進情報と周波数の対応づけを行っている。この遷移は、マルチパス遅延波による干渉を軽減するために、同一周波数の連続送出を避けるようになっている。復調は、判定帰還情報に導かれた 2 周波 FSK 検波を行う。

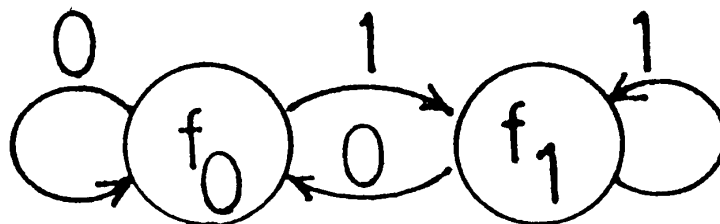


図 1. 2 FSK の遷移図

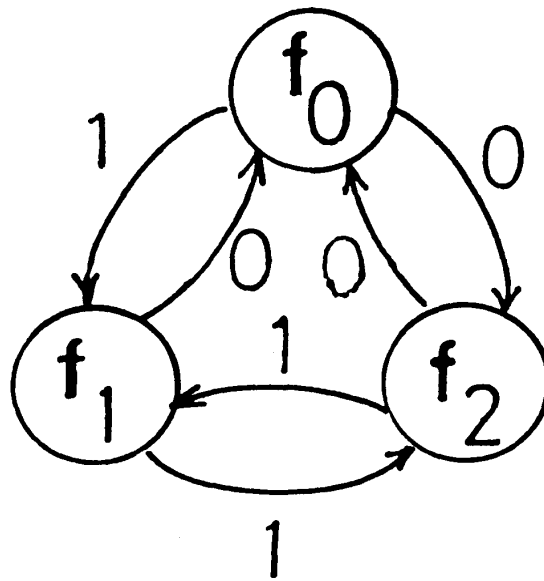


図2. 3交代FSKの遷移図

3. 解析の対象にした3交代FSKシステム

検波方式として、先行判定結果に基づいて (Decision Oriented) 3つのフィルタの内一つを除外して2周波判定を行うものとする。送信側の状態遷移は、先行送出周波数を状態とする単純マルコフ過程となる。また、3周波の配置は図3とする。

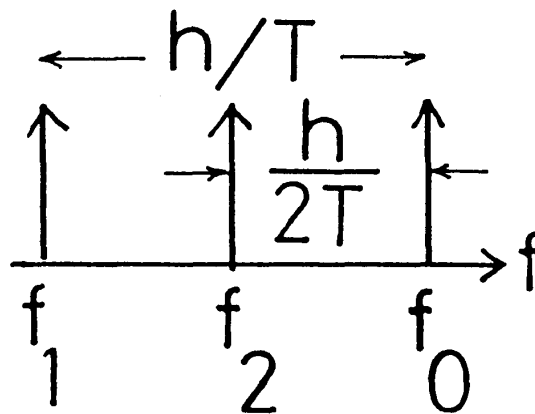


図3. 3周波の配置

具体的には、3つの信号波は

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \exp [j(2\pi f_i t + \phi_i)] \quad i=0, 1, 2 \quad (1)$$

で与えられ (この内、 T はビットの時間長で、 E は信号のエネルギーである。), 更に、 $f_i = f_c + \Delta f_i$ と置くと (f_c は搬送波周波数), 改めてベースバンド信号として

$$S_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \exp [j(2\pi \Delta f_i t + \phi_i)] \quad i=0, 1, 2 \quad (2)$$

と書ける。ここで、以下の計算では次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \Delta f_0 &= h/2T \\ \Delta f_1 &= -h/2T \\ \Delta f_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

従って、この場合、変調信号は

$$m(t) = \frac{h}{2T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i W(t-iT) \tag{4}$$

と表され、被変調波は、 $A = \sqrt{2E/T}$ として

$$C(t) = A \exp [j2\pi (f_c t + \int_{-\infty}^t m(t') dt')] \tag{5}$$

で与えられる。

ここで、 $W(t)$ は単位窓関数 (図4) であり、 b_i は 1, 0, -1 のどれかをとる 3 値系列である。この 3 値系列は 2 値系列 a_i によってプリコードで以下のようにして得られる。

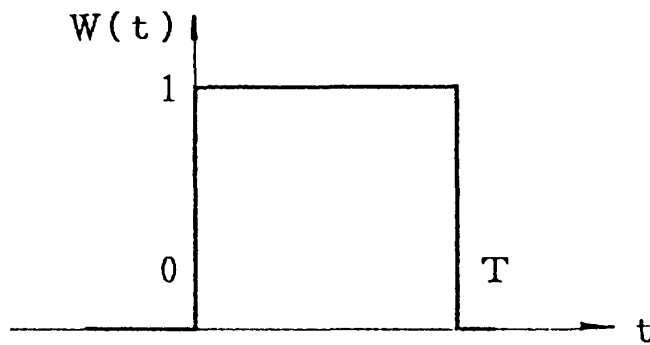


図4. 単位窓関数

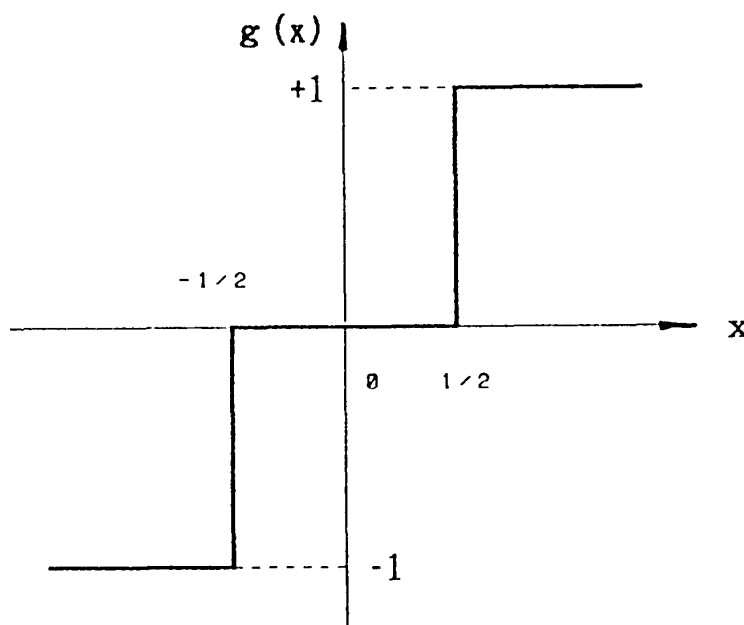


図5. 量子化特性関数

2値系列 a_i として, -1 をとるものを考えると, $g(x)$ を3レベル量子化器 (図5) として

$$b_i = g(a_i - b_{i-1}) \tag{6}$$

によって b_i が与えられる。図6に構成を示す。又, 図7に上のプリコーダによる信号変換例を図7に示す。

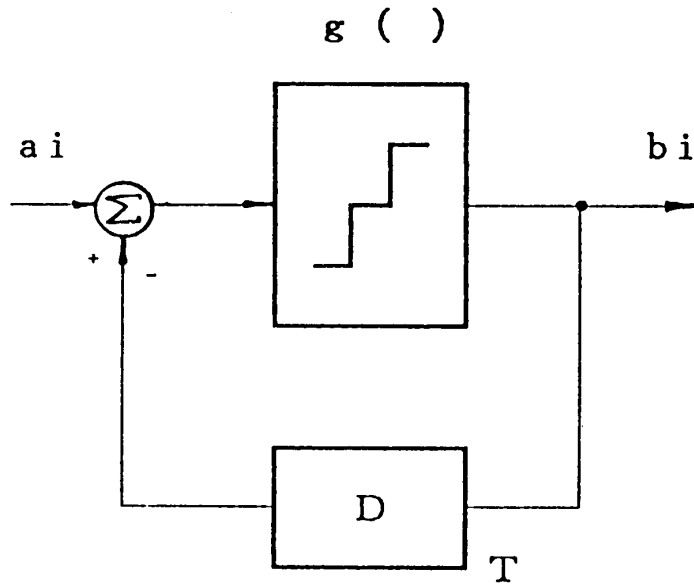


図6. 擬似3値プリコーダ

a_i	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
2FSK	f_1	f_0	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_0	f_0	f_0
b_i	-1	1	-1	0	-1	0	-1	1	0	1
3交代FSK	f_1	f_0	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_0	f_2	f_0

図7. 信号変換例

さて, 上述の信号を非同期検波するときの構成は図8のようになる。局発 f_L は周波数通減のためのもので, 議論の本質と関係ない。選択性フェージング及び雑音のない場合について, 図中の各 u_i を求めると, 時刻 $t = kT$ で以下のようなになる。

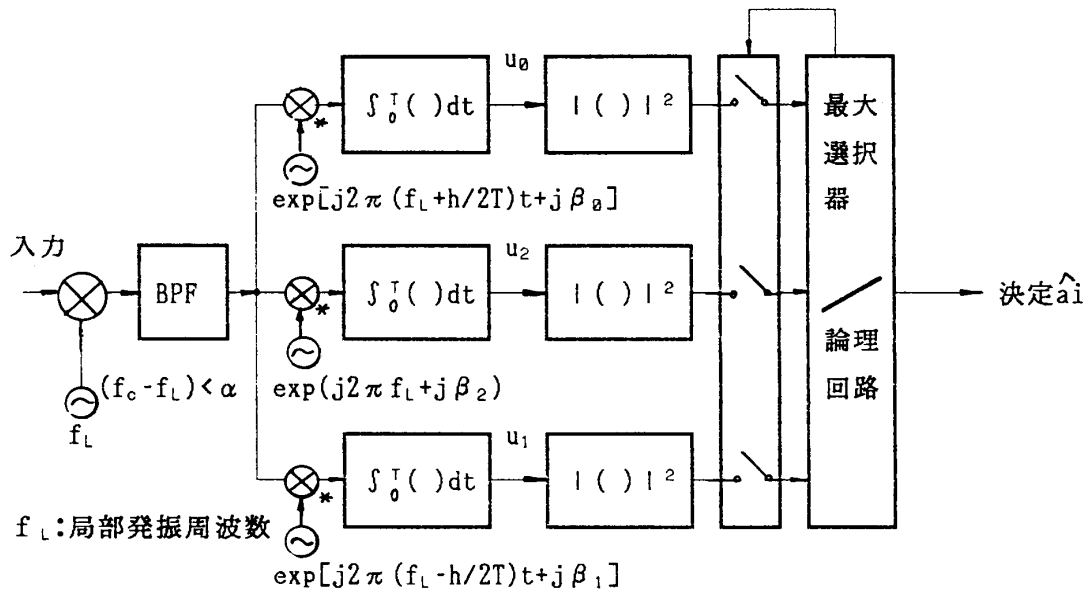


図8. 3周波交代FSK方式の非同期検波回路の構成

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \int_{(k-1)T}^{kT} A \exp [j2\pi (f_L t + \int_{-\infty}^t m(t') dt') - j\alpha] \\
 &\quad \cdot \exp [-j2\pi (f_L + h/2T)t - j\beta_0] dt \\
 &= A \exp [-j(\alpha + \beta_0)] \int_{(k-1)T}^{kT} \exp [j2\pi \int_{-\infty}^t m_0(t') dt'] dt \quad (7)
 \end{aligned}$$

但し,

$$m_0(t) = \frac{h}{2T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (b_i - 1) W(t - iT) \quad (8)$$

である。同様に

$$\begin{aligned}
 u_2 &= A \exp [-j(\alpha + \beta_2)] \int_{(k-1)T}^{kT} \exp [j2\pi \int_{-\infty}^t m_2(t') dt'] dt \\
 m_2(t) &= m(t) = h/2T \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i W(t - iT) \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= A \exp [-j(\alpha + \beta_1)] \int_{(k-1)T}^{kT} \exp [j2\pi \int_{-\infty}^t m_1(t') dt'] dt \\
 m_1(t) &= h/2T \sum_{i=-\infty}^{\infty} (b_i + 1) W(t - iT) \quad (10)
 \end{aligned}$$

となる。

ダイバーシチ受信の場合については、図9のブロックで示すようになる。

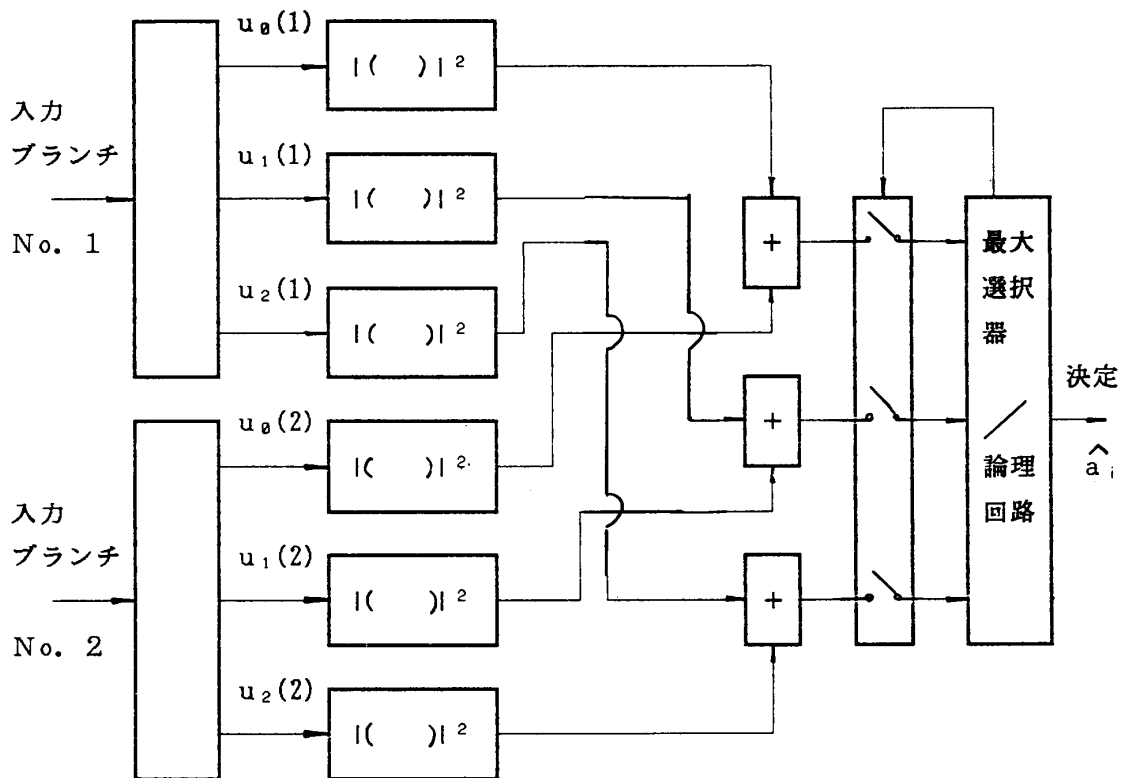


図9. 3周波交代FSK方式のダイバーシチ受信ブロック図

4. 3周波交代FSK方式のBER特性の評価

4.1 誤り率の解析

$R\Delta=1$ までに対処できる上記方式の性能について、 $R\Delta=2$ までのISIを考慮して求める (R はデータレートで、 $R=\log_2 M/T$ 、 M は2進数0と1を使うので2である。即ち、 $M=2$ 。 Δ は遅延プロフィールである。)。要点は Bello⁽⁵⁾ のD関数を求めるにつきる。その際、位相差 ϕ_0 、 ϕ_1 、 ϕ_2 は計算の便宜上、0と仮定しておこう (非同期検波の場合、この位相差は特性にあまり影響を与えない)。対称性 (図3) から、0を送信した時の誤り率を求めればよい。 $R\Delta=2$ までを考慮した干渉パターンは系列 a_i に基づくと表1に示す4通りであり、送信された周波数の可能性は系列 b_i に基づいて表2のようになる。従って、全部8通りの信号パターンの内で、干渉及び検波過程の同じものがいくつかあり (表

表1. 0を送信された時の $R\Delta=2$ までを考慮した可能な先行系列

パターン	先行ビット		現ビット
	$(-2T, -T)$	$(-T, 0)$	$(0, T)$
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	1	1	0

表2. RΔ=2 の場合に可能な干渉系列パターン

	パターン	先行周波	現周波	対抗周波	
(1)	1-A	f ₀ f ₂	f ₀	f ₁	
(2)	1-B	f ₂ f ₀	f ₂	f ₁	*
(3)	2-A	f ₁ f ₀	f ₂	f ₁	
	2-B	f ₂ f ₀	f ₂	f ₁	*
(4)	3-A	f ₀ f ₁	f ₀	f ₂	
(5)	3-B	f ₂ f ₁	f ₀	f ₂	△
	4-A	f ₂ f ₁	f ₀	f ₂	△
(6)	4-B	f ₁ f ₂	f ₀	f ₁	

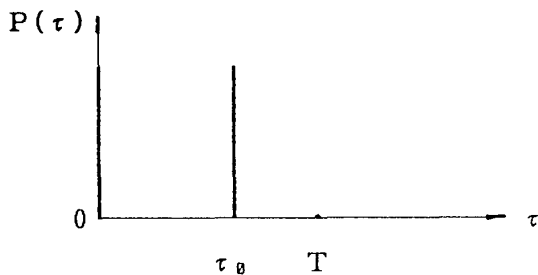
2の右辺*及△印), その重複を排すると, 計算の対称となるものは表2左辺番号に示す6通りとなり, 従って, 計算されるべきD関数の数は12個となる。それらに基づいて文献(5)に従って6つの誤り率 P_{1A}, P_{1B}, P_{2A}, P_{3A}, P_{3B}, P_{4B} を計算すると (具体的計算式は付録A, B, Cを参照), 総合の誤り率は, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1/2 (P_0 + P_1) = P_0 \\
 &= 1/4 (P_{000} + P_{100} P_{010} + P_{110}) \\
 &= 1/8 (P_{1A} + P_{1B} + P_{2A} + P_{2B} + P_{3A} + P_{3B} + P_{4A} + P_{4B}) \\
 &= 1/8 (P_{1A} + 2P_{1B} + P_{2A} + P_{3A} + 2P_{3B} + P_{4B}) \tag{11}
 \end{aligned}$$

4.2 計算の数値例

計算の実例として, 遅延分布 P(τ) が下の図10と図11のような場合をとりあげる。

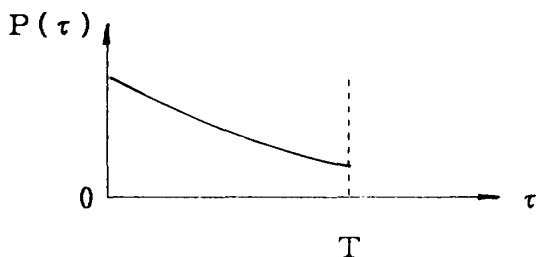
①. P(τ) がダブルスパイク型:



$$P(\tau) = \frac{1}{2} \delta(\tau) + \frac{1}{2} \delta(\tau - \tau_0)$$

図10. ダブルスパイク遅延分布

②. P(τ) が指数分布型:



$$P(\tau) = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha T)} e^{-\alpha \tau}$$

図11. 指数型の連続遅延分布

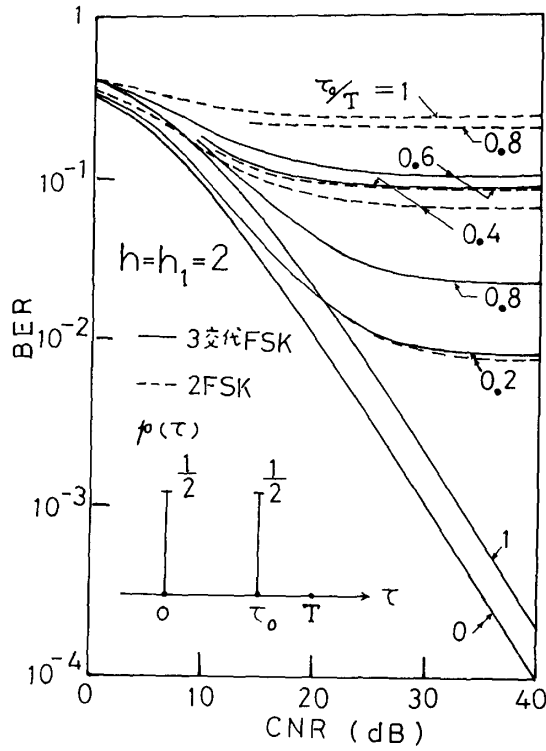


図12. 2波の場合 ($h=h_1=2$)

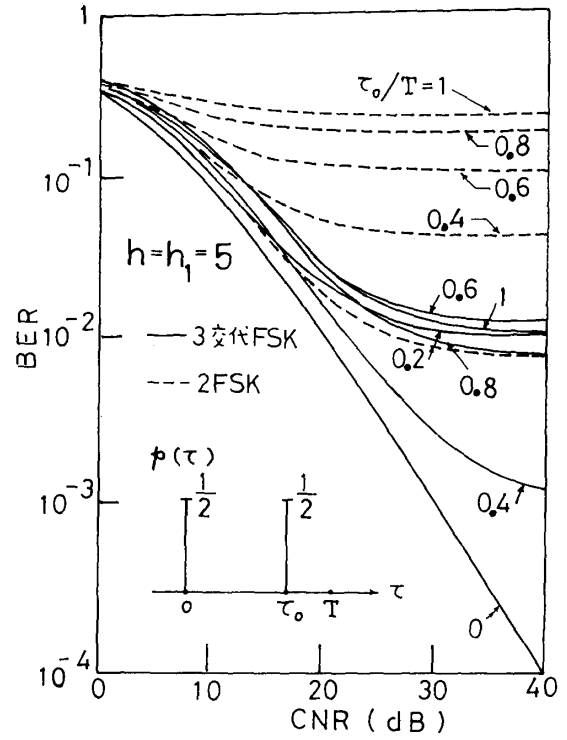


図13. 2波の場合 ($h=h_1=5$)

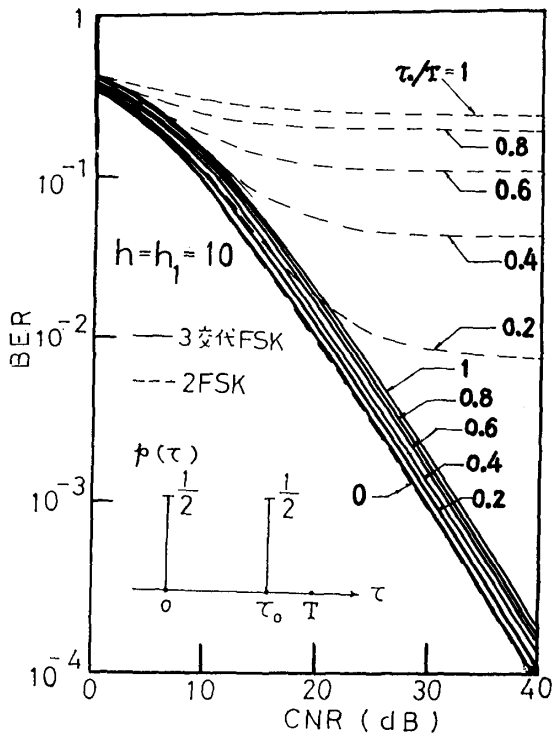


図14. 2波の場合 ($h=h_1=10$)

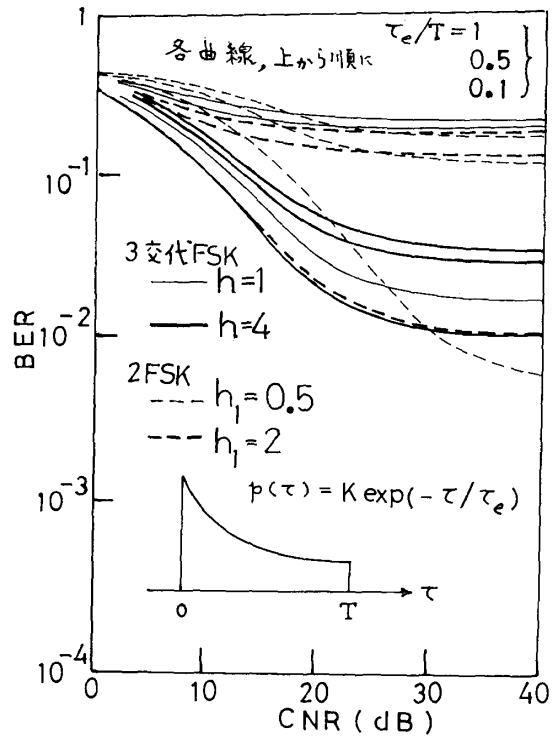


図15. 連続分布の場合

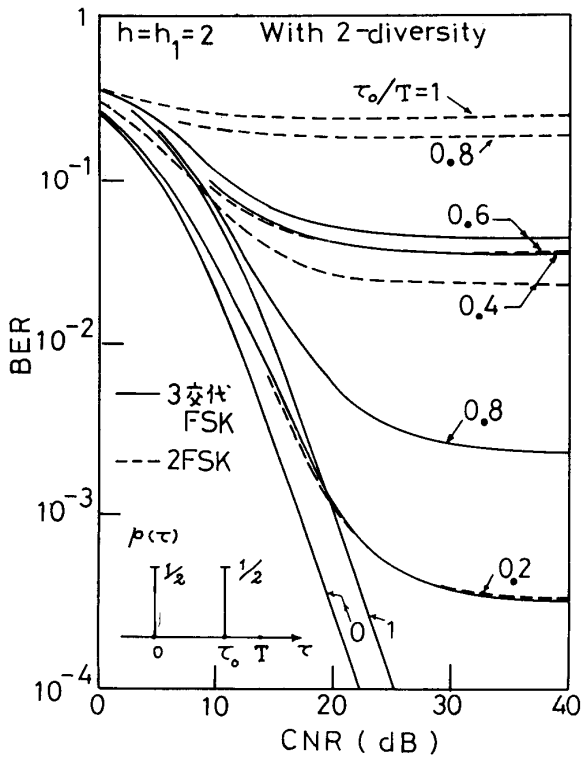


図16. 2波の場合 ($h=h_1=2$)

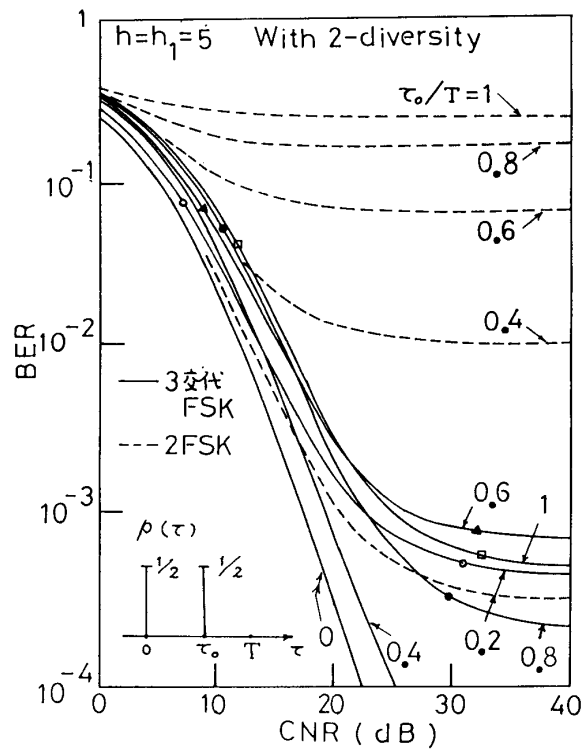


図17. 2波の場合 ($h=h_1=5$)

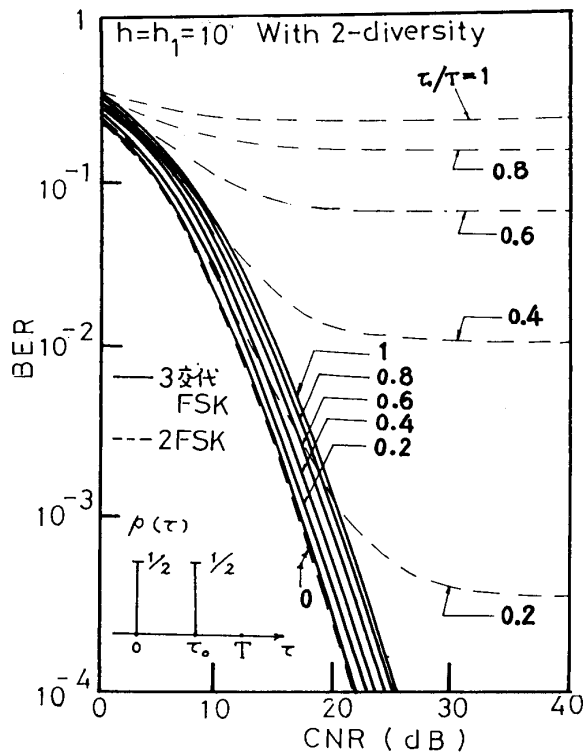


図18. 2波の場合 ($h=h_1=10$)

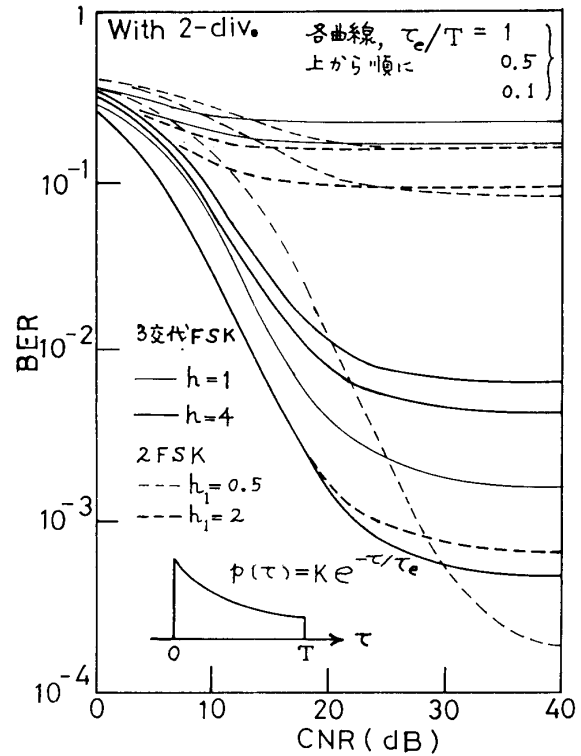


図19. 連続分布の場合

図12—図15でダイバーシチなしの場合を示す。その中で、図12, 13, 14が2波, 図15が連続の遅延プロフィールの場合である。図中には、変調指数が h_1 の2 FSK の特性も比較のため併記してある。これらの結果から、 $h \leq 3$ では改善がなく、 $h \geq 4$ でマルチパス改善が得られることが分かった。

図16—図19には、2重ダイバーシチ受信の場合を示す。図16, 17, 18が2波, 図19が連続の遅延プロフィールの場合である。これらの結果から、 $BER < 10^{-2}$ で $h \geq 3$ (2波の $P(\tau)$), $h \geq 4$ (連続の $P(\tau)$), $BER < 10^{-3}$ で $h \geq 5$ (2波), $h \geq 7$ (連続) が必要ながことが分かった。

5. むすび

耐マルチパス変調方式としての3周波交代FSKのビット誤り率特性を理論的に求めた。その結果、3周波交代FSKの特性はその変調指数 h と密接な関係がある。大略的に見て2周波FSKに比して、 $h \geq 4$ ではマルチパス改善がある。今後の課題として、実用化のために、 $h \leq 3$ における特性の改善、判定帰還による誤り伝搬の防止が必要である。

参考文献

- 1) G.L. Turin: Commutation signaling—An antimultipath technique, IEEE, SAC-2, 4 (July 1984).
- 2) 吉田, 池上: 多重波フェージングに強い変調方式, SAT86-22.
- 3) 高井: 耐多重波変調方式の一提案, SAT86-23.
- 4) 原, 森永: 可変サンプルタイミングを用いた耐周波数選択性フェージング変調方式に関する一考察, SAT88-18.
- 5) P.A. BELLO and B.D.: "The effect of frequency selective fading on the error probabilities of incoherent and differentially coherent matched filter receivers", IEEE Trans. Commun. Syst., CS-11, pp. 170-186, (June 1963).

Performance of Antimultipath Three-frequency Commutation FSK Signaling

Qing LI*, Ken-ichi KONISHI**, and Yoshiya MIYAGAKI**

**Graduate School, Okayama University of Science
1-1 Ridaicho, Okayama 700 Japan*

***Faculty of Engineering, Okayama University of Science*

(Received September 30, 1990)

Abstract

There have been many researches and developments for high-speed (more than several hundred kb/s) digital mobile radio systems to construct Integrated Services Digital Network (ISDN). It arises, however, a serious problem of performance degradation due to intersymbol interference (ISI) caused by multipath fading in high-speed digital transmission. There are many strategies (e.g., equalizers, diversity combining techniques, error correcting codes, etc.) to combat multipath. But these techniques are very expensive to implement. Alternative inexpensive methods, using antimultipath signaling, have also been proposed. We consider one of such antimultipath techniques.

In this paper, we analyze performance of three-frequency commutation FSK in contrast to traditional two-frequency FSK. We analytically calculate bit error probabilities for three-frequency commutation FSK and compare results with those for traditional FSK. We also discuss about improvement of our antimultipath commutation signaling.

付録 A :

D 関数の計算 (相関関数):

(1). P_{10} を計算するための D 関数

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_0}(\tau) \quad \text{と} \quad \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_1}(\tau) \\
 & \text{-----} \\
 & 0 < \tau < T \text{ の時:} \\
 & \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_0}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_0 & f_2 & f_0 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \hline f_0 \end{array} + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{-j\pi h x}) + 1 - X \right\} \quad (1) \\
 & \qquad \qquad \qquad [\text{Put } X \triangleq \frac{\tau}{T}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_1}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_0 & f_2 & f_0 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \hline f_1 \end{array} = 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{j\pi h x}) \right\} \\
 & + j \frac{1}{2\pi h} (e^{-j2\pi h(1-x)} - 1) \quad (2)
 \end{aligned}$$

 $T < \tau < 2T$ の時:

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_0}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_0 & f_2 & f_0 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \hline f_0 \end{array} + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{j\pi h x} \left\{ X - 1 - j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(x-1)} - e^{-j\pi h}) \right\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_0 f_2 f_0}{Df_1}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_0 & f_2 & f_0 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \hline f_1 \end{array} + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T*(t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{2\pi h} (e^{j2\pi h} - e^{j2\pi h x}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h(x-1)} - e^{j\pi h}) \quad (4)$$

(2). P_{1B} を計算するための D 関数

$$Df_2^{f_2 f_0 f_2}(\tau) \quad \text{と} \quad Df_1^{f_2 f_0 f_2}(\tau)$$

$0 < \tau < T$ の時:

$$Df_2^{f_2 f_0 f_2}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt$$

$$= 2E \left\{ j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{j\pi h x}) + 1 - X \right\} \quad (5)$$

$$Df_1^{f_2 f_0 f_2}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$+ \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$= 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{2\pi h} (1 - e^{j2\pi h x}) + j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(1-x)} - 1) \right\} \quad (6)$$

$T < \tau < 2T$ の時:

$$Df_2^{f_2 f_0 f_2}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt$$

$$= 2E \left\{ X - 1 + j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h(x-1)} - e^{j\pi h}) \right\} \quad (7)$$

$$Df_1^{f_2 f_0 f_2}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$+ \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$= 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h} - e^{j\pi h x}) \right.$$

$$\left. + j \frac{1}{2\pi h} (e^{j2\pi h(x-1)} - e^{j2\pi h}) \right\} \quad (8)$$

(3). P_{2A} を計算するための D 関数

$$Df_2^{f_1 f_0 f_2}(\tau) \quad \text{と} \quad Df_1^{f_1 f_0 f_2}(\tau)$$

0 < τ < Tの時:

$$\begin{aligned}
 Df_2^{f_1 f_0 f_2}(\tau) &= \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt \\
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_1 & f_0 & f_2 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \begin{array}{|c|} \hline f_2 \\ \hline \end{array} \end{array} &= 2E \left\{ j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{j\pi h x}) + 1 - X \right\} \\
 &= Df_2^{f_2 f_0 f_2}(\tau)
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 Df_1^{f_1 f_0 f_2}(\tau) &= \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_1 & f_0 & f_2 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \begin{array}{|c|} \hline f_1 \\ \hline \end{array} \end{array} &+ \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &= 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{2\pi h} (1 - e^{j2\pi h x}) \right. \\
 &\quad \left. + j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(1-x)} - 1) \right\} \\
 &= Df_1^{f_2 f_0 f_2}(\tau)
 \end{aligned} \tag{10}$$

T < τ < 2Tの時:

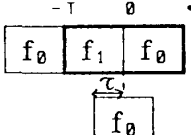
$$\begin{aligned}
 Df_2^{f_1 f_0 f_2}(\tau) &= \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt \\
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_1 & f_0 & f_2 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \begin{array}{|c|} \hline f_2 \\ \hline \end{array} \end{array} &= 2E \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h} - e^{-j\pi h x}) \right. \\
 &\quad \left. + j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h(x-1)} - e^{j\pi h}) \right\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

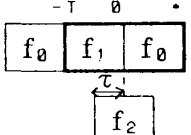
$$\begin{aligned}
 Df_1^{f_1 f_0 f_2}(\tau) &= \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_1 & f_0 & f_2 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \tau \\ \begin{array}{|c|} \hline f_1 \\ \hline \end{array} \end{array} &+ \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &= 2E e^{-j\pi h x} \left\{ X - 1 + j \frac{1}{2\pi h} (e^{j2\pi h(x-1)} - e^{j2\pi h}) \right\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

(4). P_{3A}を計算するためのD関数

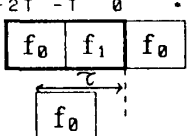
$$\underline{Df_0^{f_0 f_1 f_0}(\tau)} \quad \text{と} \quad \underline{Df_2^{f_0 f_1 f_0}(\tau)}$$

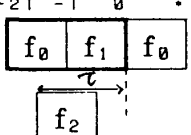
0 < τ < Tの時:

$$\begin{aligned}
 Df_0^{f_0 f_1 f_0}(\tau) &= \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &+ \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &= 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{2\pi h} (1 - e^{-j2\pi h x}) + 1 - X \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 Df_2^{f_0 f_1 f_0}(\tau) &= \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt \\
 &= 2E \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{-j\pi h x}) + j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(1-x)} - 1) \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$


$T < \tau < 2T$ の時:

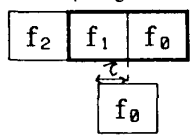
$$\begin{aligned}
 Df_0^{f_0 f_1 f_0}(\tau) &= \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &+ \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &= 2E e^{j\pi h x} \left\{ X - 1 - j \frac{1}{2\pi h} (e^{-j2\pi h(x-1)} - e^{-j2\pi h}) \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 Df_2^{f_0 f_1 f_0}(\tau) &= \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt \\
 &= 2E \left\{ j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h} - e^{j\pi h x}) - j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(x-1)} - e^{-j\pi h}) \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$


(5). P_{3B} を計算するためのD関数

$$Df_0^{f_2 f_1 f_0}(\tau) \quad \text{と} \quad Df_2^{f_2 f_1 f_0}(\tau)$$

$0 < \tau < T$ の時:

$$\begin{aligned}
 Df_0^{f_2 f_1 f_0}(\tau) &= \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &+ \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 &= 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{2\pi h} (1 - e^{-j2\pi h x}) + 1 - X \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$


$$= Df_0^{f_0 f_1 f_0}(\tau)$$

$$Df_2^{f_2 f_1 f_0}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt$$

$$= 2E \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{-j\pi h x}) + j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(1-x)} - 1) \right\} \quad (18)$$

$$= Df_2^{f_0 f_1 f_0}(\tau)$$

$T < \tau < 2T$ の時:

$$Df_0^{f_2 f_1 f_0}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$+ \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$= 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h} - e^{-j\pi h x}) - j \frac{1}{2\pi h} (e^{-j2\pi h(x-1)} - e^{-j2\pi h}) \right\} \quad (19)$$

$$Df_2^{f_2 f_1 f_0}(\tau) = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt + \int_{-T}^{T-\tau} \frac{2E}{T} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} dt$$

$$= 2E \left\{ X - 1 - j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(x-1)} - e^{-j\pi h}) \right\} \quad (20)$$

(6). P_{4B} を計算するためのD関数

$$Df_0^{f_1 f_2 f_0}(\tau) \quad \text{と} \quad Df_1^{f_1 f_2 f_0}(\tau)$$

$0 < \tau < T$ の時:

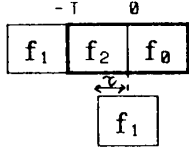
$$Df_0^{f_1 f_2 f_0}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$+ \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

$$= 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{-j\pi h x}) + 1 - X \right\} \quad (21)$$

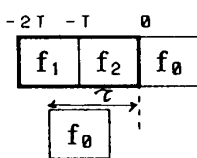
$$= Df_0^{f_0 f_2 f_0}(\tau)$$

$$Df_1^{f_1 f_2 f_0}(\tau) = \int_{-\tau}^0 \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt$$

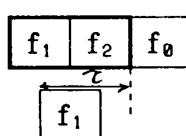


$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{-j\pi h x} \left\{ j \frac{1}{\pi h} (1 - e^{j\pi h x}) \right. \\
 & \quad \left. + j \frac{1}{2\pi h} (e^{-j2\pi h(1-x)} - 1) \right\} \quad (22) \\
 & = D_{f_1 f_2 f_0}(\tau)
 \end{aligned}$$

$T < \tau < 2T$ の時:



$$\begin{aligned}
 D_{f_1 f_2 f_0}(\tau) & = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 & \quad + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{j\pi h x} \left\{ -j \frac{1}{2\pi h} (e^{-j2\pi h} - e^{-j2\pi h x}) \right. \\
 & \quad \left. - j \frac{1}{\pi h} (e^{-j\pi h(x-1)} - e^{-j\pi h}) \right\} \quad (23)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 D_{f_1 f_2 f_0}(\tau) & = \int_{-\tau}^{-T} \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 & \quad + \int_{-T}^{T-\tau} \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * (t+\tau)} dt \\
 & = 2E e^{-j\pi h x} \left\{ X - 1 + j \frac{1}{\pi h} (e^{j\pi h(x-1)} - e^{j\pi h}) \right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

以上で、必要なすべてのD関数が求まれた。以下、更に、これらを整理する（実部、虚部に分離したり、同じものを等置する）。

付録 B:

m (モーメント関数) 値に付随する E_{rs} 及びその他の整理について:

(1). P_{10} を計算するための m 関数

$$\begin{array}{c} \frac{f_0 f_2 f_0}{m f_0 f_0}, \quad \frac{f_0 f_2 f_0}{m f_1 f_1}, \quad \frac{f_0 f_2 f_0}{m f_0 f_1} \\ \hline E f_0 f_0 = \int_0^T \left| \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} \right|^2 dt = 2E \\ E f_1 f_1 = \int_0^T \left| \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{-j\pi h/T * t} \right|^2 dt = 2E \\ E f_0 f_1 = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} dt \\ = 2E \left(\frac{\sin 2\pi h}{2\pi h} + j \frac{1 - \cos 2\pi h}{2\pi h} \right) \end{array}$$

(2). P_{10} を計算するための m

$$\begin{array}{c} \frac{f_2 f_0 f_2}{m f_2 f_2}, \quad \frac{f_2 f_0 f_2}{m f_1 f_1}, \quad \frac{f_2 f_0 f_2}{m f_2 f_1} \\ \hline E f_2 f_2 = \int_0^T \left| \sqrt{\frac{2E}{T}} \right|^2 dt = 2E \\ E f_1 f_1 = 2E \\ E f_0 f_1 = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} * \sqrt{\frac{2E}{T}} e^{j\pi h/T * t} dt \\ = 2E \left\{ \frac{\sin \pi h}{\pi h} + j \frac{1 - \cos \pi h}{\pi h} \right\} \end{array}$$

(3). P_{20} を計算するための m

$$\begin{array}{c} \frac{f_1 f_0 f_2}{m f_2 f_2}, \quad \frac{f_1 f_0 f_2}{m f_1 f_1}, \quad \frac{f_1 f_0 f_2}{m f_2 f_1} \\ \hline E_{rs} \text{ は (2) と同じである。} \end{array}$$

(4). P_{30} を計算するための m

$$\begin{array}{c} \frac{f_0 f_1 f_0}{m f_0 f_0}, \quad \frac{f_0 f_1 f_0}{m f_2 f_2}, \quad \frac{f_0 f_1 f_0}{m f_0 f_2} \\ \hline E_{rs} \text{ は (2) と同じである。} \end{array}$$

(5). P_{30} を計算するための m

$$\begin{array}{c} \frac{f_2 f_1 f_0}{m f_0 f_0}, \quad \frac{f_2 f_1 f_0}{m f_2 f_2}, \quad \frac{f_2 f_1 f_0}{m f_0 f_2} \\ \hline E_{rs} \text{ は (2) と同じである。} \end{array}$$

(6). P_{4B} を計算するための m

$$\frac{f_1 f_2 f_0}{m f_0 f_0}, \quad \frac{f_1 f_2 f_0}{m f_1 f_1}, \quad \frac{f_1 f_2 f_0}{m f_0 f_1}$$

E_{rs} は(1)と同じである。

以上より、 E_{rs} の組の種類は、 E_{01} が異なる2組のみである。

付録 C :

諸量の正規化 :

mより γ を求める式はmについて同次式なので、mを共通の値で正規化しておいても値は変わらない。即ち、

- ・ D関数はすべて2Eで正規化する, $D(\tau) \rightarrow \widetilde{D}(\tau)$
- ・ $P(\tau)$ は $2\sigma^2$ で正規化する, $P(\tau) \rightarrow \widetilde{P}(\tau)$
- ・ E_{rs} は $2E'$ で正規化する, $E_{rs} \rightarrow \widetilde{E}_{rs}$
- ・ mは $8N_0E$ で正規化する, $m_{rs} \rightarrow \widetilde{m}_{rs}$

とすると、

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_{rs} &= \frac{m_{rs}}{8N_0E} = \frac{1}{8N_0E} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 \widetilde{P}(\tau) * 2E \widetilde{D}_r(\tau) * 2E \widetilde{D}_s^*(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{8N_0E} 4N_0 * 2E * \widetilde{E}_{rs} \\ &= \frac{\sigma^2 E}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{P}(\tau) \widetilde{D}_r(\tau) \widetilde{D}_s^*(\tau) d\tau + \widetilde{E}_{rs} \\ &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{P}(\tau) \widetilde{D}_r(\tau) \widetilde{D}_s^*(\tau) d\tau + \widetilde{E}_{rs} \end{aligned}$$

となる。