Einstein 時空上の複素 Yang-Mills 理論としての Poincaré ゲージ理論について

中　力　真　一
岡山理科大学理学部応用物理学科

（1990年９月30日　受理）

Abstract

一般に重力の理論として解釈されている Poincaré ゲージ理論において，別の一つの解釈を提案する。Poincaré ゲージ理論は普通 Riemann-Cartan 幾何学に依って記述される重力の理論として解釈されているが，この論文に於て我々は林による一般的な Poincaré ゲージ理論より始めて，その特別な場合にそれは Einstein 重力場を伴う複素 Yang-Mills 理論として解釈され得ることを示す。そしてまた，この解釈の立場から Poincaré ゲージ理論におけるアーベリアン解及びモノポール解の存在について言及する。

1. はじめに

我々が対象とする殆ど全ての物理系は何等かの保存量，従ってまたある種の保存則を有するこれらの保存量や保存則は我々がその物理系についてその運動方程式を解いて知る以前に，その系について非常に多くの情報を我々に与えてくれる。ところで，これらの保存量（則）は全て，その系の有する対称性と結び付けられる事がよく知られている。そして，この対称性は数学的にはこれに対応するある種の変換（群をなす）の下での系の作用（ラグランジュアンの時間積分）の不変性として表現される。従って，対称性についての考察は，系の有する保存量や保存則を知る上ばかりでなく，それに伴う変換群（特に、その表現）についての考察を通じてその系全体の振舞いを考える上でも大変重要である。

対称性についての考察は，一般にゲージ不変性と呼ばれる現代物理学（特に，素粒子物理学）にとって不可欠な概念を生み出した。現在，自然界に於て４つの相互作用の存在が知られているが，これらは全てゲージ不変性に基づく理論（ゲージ理論）の立場から（統一的にも，個別にも）記述され得ることが知られている。

ゲージ理論は，それの基づくゲージ対称性の種類によって分類される。ゲージ対称性とは，系が元々持つ（特に変換群として Lie 群を持つ）対称性を拡張して，対応する変換が時空内の各場所に依存する様に変更したものである。当然のこと，これらの拡張された変換の下では元々の系は不変ではあり得ない。不変性を保つためにゲージ場と呼ばれる補

助場が導入される。ゲージ理論とは，これらゲージ場と元の場とから成る系のゲージ不変な理論の総称である。こうして，ゲージ理論は，大きく分けて，アイソスピンやクォークのカラーのような内部自由度のゲージ対称性に基づくものとローレンツ変換のように時間，空間についての座標変換に関わるゲージ対称性に基づくものとの2種類に分けられる。前者に属するものとしては，U(1) 理論や Yang-Mills 理論から GUT（Grand Unified Theory）や超弦理論に至るまで多種多様である。一方，後者に属するものとしては，並進ゲージ理論や Poincaré ゲージ理論がある。これらは，一般に重力のゲージ理論として総称されている。ここで扱う Poincaré ゲージ理論（PGT）は，そのゲージ群が他の理論のゲージ群を部分群として含むという点に於て，それらの中で最も一般的なものと考えられている。

ところで，重力は前述の後者のグループに属する時空の対称性に基づくゲージ理論の専売特許ではないことに注意すべきである。例えば，超重力理論や超弦理論はボソンとフェルミオンとを交換する超対称変換と呼ばれる元々内部自由度に関する変換の下での対称性に基づいて重力を実現している。これに対して，後者の時空の対称性に基づくグループに属するゲージ理論は重力の理論としてのみ解釈されるべきものであろうか。私はそうは思わない。と言うのは，例えば Poincaré ゲージ理論においてゲージ化されたローレンツ変換は，並進ゲージ不変性によって時空の各点に導入された4脚場の局所回転であり，これは内部変換であるスピン変換（SL(2, C)）に連動するものである。つまり，ローレンツ変換はゲージ化されることによって座標変換から内部変換に変わったのである。こうして，ローレンツ変換のゲージ化に伴って要求されるゲージ場（ローレンツ・ゲージ場）は，前述の前者に属するゲージ理論のゲージ場と同種類のものと考えるのが自然であろう。ところが，この様な立場に立って成された仕事を未だ私は知らない。そこで，この論文に於て特に Poincaré ゲージ理論に限ってこの理論の重力の理論としてのみの解釈以外の可能性を調査して，そこから得られる一つの結論について議論したい。

Poincaré ゲージ理論は，ゲージ化された Poincaré 変換（Lorentz＋4次元並進）の下での不変性に基づくゲージ理論である。この方面での最初の仕事は，内山[1]の理論の拡張として Kibble[2]によりなされた。そして，その後，林[3]により一般化された。このゲージ理論は並進及びローレンツの2種類のゲージ場を有する理論であるが，林の理論は，この2種類のゲージ場の両方についてその場の強さより作られる2次までの全ての不変量を10個の適当な結合定数（$\alpha, \beta, \gamma, a, a_i$ ($i=1, \cdots, 6$)）によって連結したものをラグランジュアンとして採用した点で Kibble の理論と異なる。因に，Kibble はEinstein 理論との比較に力点を置いたためにラグランジュアンとしてローレンツ・ゲージ場の強さについてのただ1個の不変量（1次）しか用いなかった。従って，我々はこの論文に於て，林によるラグランジュアンを採用して議論することにする。

この論文の構成は次の通りである。先ず，次の節に於て，以下の節の準備として普通の

形式での並進及びローレンツ・ゲージ場に対する一般的な場の方程式を我々の記法を用いて書き下す。そして，3節に於て，我々の目的にとって必要な種々の複素量を定義し，それ等を用いて一般的なローレンツ・ゲージ場に対する方程式を書き直す。そして，4節に於て，主題である複素 Yang-Mills 方程式を得るための一つの可能性を提示する。最後の節は結びである。

2. 場の方程式

我々は次の作用を用いて議論する。[1] これは，元々の林[3)]による作用を我々の目的に便利なように書き直したものである。

$$I=\int d^4x\{\mathcal{L}+(2ab\, b^{m\mu}{}^{V}C_m)_{,\mu}\} \tag{1}$$

ここで

$$\mathcal{L}=bL=bL_M+abR+\mathcal{L}_C+\mathcal{L}_F \tag{2}$$

ただし

$$\mathcal{L}_C=b\,L_C=b(C_1{}^{T}C_{kmn}{}^{T}C^{kmn}+C_2{}^{V}C_k{}^{V}C^k+C_3{}^{A}C_k{}^{A}C^k) \tag{3}$$

$$C_1=\alpha+\frac{2}{3}a,\quad C_2=\beta-\frac{2}{3}a,\quad C_3=\gamma+\frac{3}{2}a. \tag{4}$$

この作用から変分法により次の2つの場の方程式が導かれる。これらは，それぞれ並進ゲージ場とローレンツ・ゲージ場に対する方程式である。[2]

$$2a\,\hat{G}^{\mu\nu}=-T^{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$\nabla_\nu H^{km\mu\nu}+K^k{}_{r\nu}H^{rm\mu\nu}+K^m{}_{r\nu}H^{kr\mu\nu}+I^{[km]\mu}=-S_{(M)}{}^{km\mu} \tag{6}$$

ここで

$$T^{\mu\nu}=T_{(M)}{}^{\mu\nu}+T_{(F)}{}^{\mu\nu}+T_{(C)}{}^{\mu\nu} \tag{7}$$

$$\mathrm{T}_{(C)}{}^{\mu\nu}=\nabla_\lambda I^{\mu\nu\lambda}+K_{km}{}^{\mu}I^{[km]\nu}-g^{\mu\nu}L_C \tag{8}$$

$$I^{kmn}=2\,\frac{\partial L_C}{\partial C_{kmn}} \tag{9}$$

ところで，上式は次式によって一般に定義される新たな〝共変微分演算子〞∇_μ を用いて書かれていることに注意すべきである。

$$\nabla_\mu q=q_{,\mu}-(i/2)\Delta_{mn\mu}S^{mn}q \tag{10}$$

---

[1]我々は，ここで原則として参考文献4)で用いられている記法を採用することにする。

[2]文献4)で用いられている記号 J^{kmnp} の代わりに記号 H^{kmnp} が用いられていること，また，$I^{km\mu}$ や $I^{\mu\nu\lambda}$ の様なギリシャ添字を持つ量は，I^{kmn} の様に，対応するラテン添字を持つ量より4脚場 $b_k{}^{\mu}$ を用いて定義されていることに注意。

ここに q は無限小ローレンツ変換の下に $\delta q=(i/2)\omega_{km}S^{km}q$ と変換する任意の局所量である。一方，任意の世界量（ギリシャ添字を持つ量）に対する ∇_μ の作用は補助条件

$$\nabla_\nu b_k{}^\mu=0, \tag{11}$$

を課すことによって確定される。従って，〝共変導関数〞 $\nabla_\lambda H^{km\mu\nu}$ は次のように定義されていることが解る。

$$\nabla_\lambda H^{km\mu\nu}=H^{km\mu\nu}{}_{,\lambda}-\Delta^k{}_{r\lambda}H^{rm\mu\nu}-\Delta^m{}_{r\lambda}H^{kr\mu\nu}+\Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda}H^{km\kappa\nu}+\Gamma^\nu{}_{\kappa\lambda}H^{km\mu\kappa}, \tag{12}$$

ここで，Γ は Christoffel 記号である。

PGT における Bianchi 恒等式は〝共変微分演算子〞 ∇_μ を用いて今や次の様に書かれる。

$$\nabla_\nu F^{\dagger km\mu\nu}+K^k{}_{r\nu}F^{\dagger rm\mu\nu}+K^m{}_{r\nu}F^{\dagger kr\mu\nu}=0 \tag{13}$$

ここに $F^{\dagger km\mu\nu}$ は $F^{km\mu\nu}$ の右対偶（right dual）である。

最後に，方程式(6)と Bianchi 恒等式(13)より次の方程式が得られることに注意しよう。我々は以後この式を方程式(6)に代わって用いることにする。

$$\nabla_\nu J^{km\mu\nu}+K^k{}_{r\nu}J^{rm\mu\nu}+K^m{}_{r\nu}J^{kr\mu\nu}+I^{[km]\mu}=-S_{(M)}{}^{km\mu}, \tag{14}$$

上式に於て，新たな量 $J^{km\mu\nu}$ が任意定数 C を用いて定義されていることに注意すべきである。

$$J^{km\mu\nu}=H^{km\mu\nu}+CF^{\dagger km\mu\nu} \tag{15}$$

3. 複素形式での場の方程式

並進ゲージ場に対する方程式(5)は，そのままにしてローレンツ・ゲージ場に対する方程式を我々の目的にとって便利な形に書き直そう。そのために先ず電磁場における例

$$A_\mu=(\phi,\ \boldsymbol{A}),\qquad F_{\mu\nu}=(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}) \tag{16}$$

に習って次の場の組を定義する。

$$A_{km\mu}=(\vec{v}_\mu,\ \vec{a}_\mu),\qquad F_{km\mu\nu}=(\vec{F}^P{}_{\mu\nu},\ \vec{F}^A{}_{\mu\nu}) \tag{17}$$

ただし

$$\vec{v}_\mu\Leftrightarrow v_{(a)\mu}=A_{0a\mu},\qquad \vec{a}_\mu\Leftrightarrow a_{(a)\mu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}A_{bc\mu}, \tag{18}$$

$$\vec{F}^P{}_{\mu\nu}\Leftrightarrow\vec{F}^P{}_{(a)\mu\nu}=F_{0a\mu\nu},\qquad \vec{F}^A{}_{\mu\nu}\Leftrightarrow\vec{F}^A{}_{(a)\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F_{bc\mu\nu}$$

ここで，添字 $a,b,c,\cdots$ は 1，2，3 の何れかの値しか取り得ない。また $\varepsilon_{\rm abc}$ は 3 元 Levi-Civita 記号である。

上の諸量を用いてローレンツ・ゲージ場とその強さに対して，それらに代わる次の複素

量を定義する。

$$\vec{\mathcal{A}}_{\mu}=\vec{v}_{\mu}+i\vec{a}_{\mu} \tag{20}$$

$$\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu}=\vec{F}^{P}{}_{\mu\nu}+i\vec{F}^{A}{}_{\mu\nu} \tag{21}$$

また，$J_{km\mu\nu}$ や $I_{[km]\mu}$ そして $S_{(M)km\mu}$ 等の量に対しても同様な仕方で対応する複素量を定義することができる。そして，それらの各々を $\vec{\mathcal{J}}_{\mu\nu}$ や $\vec{\mathcal{I}}_{\mu}$ そして $\vec{\mathcal{S}}_{(M)\mu}$ 等の記号によって表すことにする。

上で定義された諸量を用い，また，$K_{km\mu}=A_{km\mu}+\Delta_{km\mu}$ なる関係式に注意して，方程式(14)と Bianchi 恒等式(13)より，今やこれらに代わる次の複素方程式を得ることができる。

$$\vec{\mathcal{J}}^{\mu\nu}{}_{;\nu}-i\vec{\mathcal{A}}_{\nu}\times\vec{\mathcal{J}}^{\mu\nu}+\vec{\mathcal{I}}^{\mu}=-\vec{\mathcal{S}}_{(M)}{}^{\mu} \tag{22}$$

$$\vec{\mathcal{F}}^{\dagger\mu\nu}{}_{;\nu}-i\vec{\mathcal{A}}_{\nu}\times\vec{\mathcal{F}}^{\dagger\mu\nu}=0 \tag{23}$$

上式に於いて，演算子 ∇_{μ} の代わりに演算子（$;\mu$）が用いられていることに注意。演算子（$;\mu$）は本質的には演算子 ∇_{μ} に等しいが，ただ，場の内部自由度，即ち添字 a, b, c …への作用が無視されている点で異なる。

4. 複素 Yang-Mills 方程式

目的の方程式を得るために，次のパラメタの選択を行う。

$$C_1=C_2=C_3=0,$$

$$C=0,$$

$$4a_1=3a_2=4a_3=2a_4=2a_5=24a_6>0 \tag{24}$$

我々は，これと同じパラメタの選択を PGT におけるアーベリアン解の存在を論じた先の論文[5]に於いても行った。しかしながら，そこでも述べられている様に，この選択が一意的であるか否かはまだ検討されねばならない今後の課題である。が，とにかく上のパラメタの選択の下にラグランジュ密度 L_C と L_F とは各々

$$L_C=0, \tag{25}$$

$$L_F=-a_1\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\cdot\vec{\mathcal{F}}^{\mu\nu}+c.c., \tag{26}$$

となり，故に次の式が得られる。

$$\vec{\mathcal{J}}_{\mu\nu}=4a_1\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu}, \tag{27}$$

$$\vec{\mathcal{I}}_{\mu}=0 \tag{28}$$

この関係式のお蔭で先に求めた一般的な複素方程式(22)は，今や我々の求める複素 Yang-

Mills 方程式

$$\vec{\mathcal{F}}^{\mu\nu}{}_{;\nu} - i\vec{\mathcal{A}}_{\nu} \times \vec{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4a_1}\vec{\mathcal{S}}_{(M)}{}^{\mu} \tag{29}$$

となることが解る。そして，このときまた並進ゲージ場に対する方程式(5)は上の二番目の関係式のため事実上 Einstein の重力方程式となることが解る。こうして我々は目的の結果に到達した。

最後に，上に得た複素 Yang-Mills 方程式は物質場を別にして普通の Yang-Mills 方程式を包含するものであることを強調したい。実際，我々は最近[5),6)]我々の解釈の下に普通の Yang-Mills 理論に於てはよく知られているアーベリアン解と Wu-Yang タイプ・モノポール解[7)]が PGT においてもより一般的な解の一部分として存在し得ることを確かめた。

5. おわりに

この論文によって我々は，林によって10個のパラメタを持つ Poincaré ゲージ理論より出発して，この理論に於て通常なされてきた重力場としてのみの解釈を放棄して1個の新しい解釈の可能性を提案してきた。その中で我々は，林の10個のパラメタを

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0,$$

$$4a_1 = 3a_2 = 4a_3 = 2a_4 = 2a_5 = 24a_6 > 0$$

と選ぶとき，元の理論は事実上，Eintein 重力場を伴う複素 Yang-Mills 理論として解釈され得ることを示した。我々は最近，この解釈に立って2種類の特殊な解[3]を求め得たが，今後の課題として，より一般的な解を求めることと同時に Yang-Mills 場と組をなす場の振舞いについてのより詳しい調査が必要であろう。

参考文献

1) R. Utiyama. *Phys. Rev.* **101**, 1597, (1956).
2) T. W. B. Kibble. *J. Math. Phys.* **2**, 212, (1961).
3) K. Hayashi. *Prog. Theor. Phys.* **39**, 494, (1968).
4) S. Nakariki. *Prog. Theor. Phys.* **81**, 523, (1989).
5) S. Nakariki. *Nuovo Cimento* **B**. (in the press).
6) S. Nakariki. *J. Math. Phys.* (to be published).
7) T. T. Wu and C.N. Yang. in *Properties of Matter under Unusual Conditions.* science, New York, (1969).

---

[3] これらの解については，参考文献5),6)を参照していただきたい。

Poincaré Gauge Theory as a Complex Yang-Mills Theory with the Einstein Gravity

Shin-ichi NAKARIKI

Department of Applied Physics, Faculty of Science
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 19, 1990)

Abstract

In this paper we treat with the Poincaré gauge theory extended by Hayashi. Since the Poincaré gauge theory is founded by Kibble, it has been generally interpreted as a gravitational theory on the Riemann-Cartan space-time with a torsion and a curvature. However, in this paper we present an another interpretation of this theory, in which the Lorentz gauge field is looked upon as a complex Yang-Mills field and the translational gauge field as the Einstein's gravitational field. Further, from our view-point we insist the existence of a monopole solution in the Poincaré gauge theory.