Cartan の対称変換と 4 次元 spinor

石 井 一 夫

岡山理科大学理学部応用物理学科

（1990年 9 月30日　受理）

1.　最近，多次元抽象空間での spinor がいろいろ考えられているがそれらの幾何学的構造を考えるうえで，Cartan 流の展開が有効と思われる。そこで我々はなじみ深い 4 次元 spinor の性質を Cartan 流に焼き直して考えてみたい。

まず 4 次元時空（x_1, x_2, x_3, $x_4=ix_0$）を導入して matrix x, $\tilde{x}$ を次で定義する。

$$x=\begin{bmatrix} ix_4+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & ix_4-x_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{x}=\begin{bmatrix} x_3-ix_4 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & -ix_4-x_3 \end{bmatrix}$$

そして，

$$x\phi=0 \ ; \ \tilde{x}\eta=0 \tag{1}$$

のふるまいをする ϕ, η を Cartan 流の 2 成分 spinor と名ずける。すなわち light cone 上で定義された量である。これから議論するように，これは Cartan 3 次元 spinor のごく自然な拡張になっていることがわかる。我々が 4 次元 spinor で思い起こすのは Dirac 方程式であるが，(1)の（ϕ, η）の set は勿論それを含み，しかも強烈な対称変換の定理を用いれば，4 次元 spinor のふるまいは統一的にことごとく決定して，しかも非常に見通し良いものになってくる。

対称変換とは，原点 0 を通る超平面 Π の方程式を直交座標系で $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ とすると，点 x を Π に対して対称に変換して x' を得る変換である。すなわち $\vec{x}'-\vec{x}$ が Π に垂直で $(\vec{x}'+\vec{x})/2$ が Π 上にあることから対称変換は

$$\vec{x}'=\vec{x}-2\vec{a}(\vec{x}\cdot\vec{a}) \quad ; \quad \vec{a}\cdot\vec{a}=1 \tag{2}$$

で与えられる。そしてすべての反転は奇数回の対称変換，回転は偶数回の対称変換から得られると主張するのが Cartan の定理である[1)]。我々が導入した式(1)の spinor にこの定理を適用すると，ベクトル $\vec{x}$, $\vec{a}$ に associate した matrix x, $\tilde{x}$, a, $\tilde{a}$ は(1)と同型で，対称変換は matrix 型で次のように書かれる。

$$\begin{aligned} x' &= -a\tilde{x}a \quad ; \quad \tilde{x}'=-\tilde{a}x\tilde{a} \\ \phi' &= \tilde{a}\eta \quad ; \quad \eta'=a\phi \\ a\tilde{a} &= \tilde{a}a=1 \quad ; \quad \det a=\det\tilde{a}=-1 \end{aligned} \tag{3}$$

回転は 2 回の対称変換 $b\tilde{a}$, $\tilde{b}a$ を実行して次を得る。

$$x' = b\tilde{a}x\tilde{a}b \quad ; \quad \tilde{x}' = \tilde{b}a\tilde{x}a\tilde{b}$$
$$\phi' = \tilde{b}a\phi \quad ; \quad \eta' = b\tilde{a}\eta \tag{4}$$

ただし，b, $\tilde{b}$ も a, $\tilde{a}$ と同型 matrix である。したがって $\det(\tilde{b}a)=\det(b\tilde{a})=1$ であるから ϕ, η は回転で $SL(2, c)$ の変換を受ける。

次に議論の便利のため，2成分 spinor の set (ϕ, η) を4成分 spinor に拡張する。

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{x} \\ x & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad X\zeta = 0 \quad ; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \end{bmatrix} \tag{5}$$

である。x, $\tilde{x}$ は(1)で定義した2行2列の行列で，0は2行2列のゼロ行列である。ζ は4成分 spinor を表す。ベクトル x_μ, y_μ に associate した matrix X, Y に対して,

$$X^2 = x_\mu{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 \ ; \ (XY+YX)/2 = (x, y) = x_\mu y_\mu$$
$$\det X = (x_\mu{}^2)^2$$

であるから，対称変換は

$$X' = -AXA \quad ; \quad \zeta' = A\zeta \quad ; \quad \det A = 1 \tag{6}$$

となり spinor ζ は $SL(4, c)$ の変換を受けることがわかる。A は X と同型 matrix で

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a} \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^2 = 1$$

で2行2列の matrix と結びつく。

回転は,

$$X' = BAXAB = SXS^{-1} \quad ; \quad \zeta' = S\zeta$$
$$S = BA \quad ; \quad \det S = \det B \cdot \det A = 1 \tag{7}$$

となる。B も A と同型で，上記 A の性質と同じである。

2. 時空に関した matrix X をよく知られた 4×4 行列 α_μ と次のように結び付けると便利だ。

$$X = x_\mu \alpha_\mu = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 \tag{8}$$

$$\alpha_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu{}^\dagger \\ \sigma_\mu & 0 \end{bmatrix} \ ; \ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \text{ は pauli } 2\times 2 \text{ matrix} \ ; \ \sigma_4 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

添字 † は Hermitian conjugate を表す。2つの spinor $\zeta_{\alpha'}$, ζ_β からできる16成分の spinor 積 $\zeta_{\alpha'} \cdot \zeta_\beta$ の既約分解を行う。

そのため 4×4 matrix C, D を次で定義しよう。

$$C=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad ; \quad D=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \quad ; \quad c=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

ここで 2×2 matrix c は 3 次元 spinor の展開で Cartan が導入したものである。
C, D はつぎの性質を持つ。

$$C^{\mathrm{T}}=-C \ ; \ C^2=-1 \ ; \ CC^{\mathrm{T}}=1 \ ; \ XC=-CX^{\mathrm{T}}$$
$$D^{\mathrm{T}}=-D \ ; \ D^2=-1 \ ; \ DD^{\mathrm{T}}=1 \ ; \ XD=DX^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

添字 $^{\mathrm{T}}$ は transpose matrix を表す。これらを使って次のように分解できる

$\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\zeta=\phi^{\mathrm{T}\prime}c\phi-\eta^{\mathrm{T}\prime}c\eta$ は scalar である。$\zeta'=\zeta$ なら零である。

(何故なら，対称変換で $\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\zeta \to \zeta^{\mathrm{T}\prime}A^{\mathrm{T}}DA\zeta=\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\zeta$ となり不変である。同様に回転で不変。)

$\zeta^{\mathrm{T}\prime}C\zeta=\phi^{\mathrm{T}\prime}c\phi+\eta^{\mathrm{T}\prime}c\eta$ は pseudoscalar である。$\zeta'=\zeta$ なら零。

(何故なら，回転で不変であるが対称変換で符号が変わる。)

$\zeta^{\mathrm{T}\prime}C\alpha_\mu\zeta=\phi^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu{}^\dagger\eta+\eta^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu\phi$ は four vector である。

(何故なら，$\zeta^{\mathrm{T}\prime}CX\zeta$ は対称変換および回転で不変である。したがって $\zeta^{\mathrm{T}\prime}C\alpha_\mu\zeta$ はテンソル商の定理より vector x_μ と同じ変換をしなければならない。)

$\zeta'=\zeta$ とすると spinor 積は次のように isotropic vector y_μ ($y_\mu{}^2=0$) の振る舞いをする。

$\zeta_3\zeta_1=\phi_1\eta_1 \sim y_2+iy_1$

$\zeta_4\zeta_2=\phi_2\eta_2 \sim y_2-iy_1$

$\zeta_4\zeta_1=\phi_1\eta_2 \sim -y_4-iy_3$

$\zeta_3\zeta_2=\phi_2\eta_1 \sim y_4-iy_3$

$\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\zeta=\phi^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu{}^\dagger\eta-\eta^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu\phi$ は axial vector である。$\zeta'=\zeta$ なら零。

(何故なら，$\zeta^{\mathrm{T}\prime}DX\zeta=x_\mu\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\zeta$ が対称変換および回転で psudoscalar の振る舞いをするから極性ベクトル x_μ に対して $\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\zeta$ は軸性ベクトルである。)

$\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\alpha_\nu\zeta=\phi^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu{}^\dagger\sigma_\nu\phi-\eta^{\mathrm{T}\prime}c\sigma_\mu\sigma_\nu{}^\dagger\eta$ ($\mu\neq\nu$) は 2 階反対称テンソルである。

(何故なら，$\zeta^{\mathrm{T}\prime}DX^2\zeta=x^2\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\zeta$ は scalar，よって $x_\mu x_\nu\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\alpha_\nu\zeta$ は $\mu\neq\nu$ で零であるから $\mathrm{x}_\mu x_\nu$ は対称テンソルより，それは反対称テンソルである。)

このようにして16成分の spinor 積は scalar $\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\zeta$; pseudoscalar $\zeta^{\mathrm{T}\prime}C\zeta$; vector $\zeta^{\mathrm{T}\prime}C\alpha_\mu\zeta$; axial vector $\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\zeta$; 反対称テンソル (6 元 vector) $\zeta^{\mathrm{T}\prime}D\alpha_\mu\alpha_\nu\zeta$ に既約分解された。$\zeta'=\zeta$ と置くことにより，10成分を持つ spinor 積は isotropic vector と反対称テンソルに分解される。

3. spinor ζ に対する共役 $\bar{\zeta}$ を導入するため，次の 4×4 matrix γ_μ, γ_5, β も使用する。

$$\gamma_\mu = i\beta\alpha_\mu \quad (\mu=1,2,3,4) \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\beta$$

これらの matrix はすべて α_μ と同様 Hermitian matrix になるよう選ばれている。そして交換関係 $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\nu\mu}$; $\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu$ を満たすよくつかわれる表示である。

対称変換 A, 回転 $S=BA$ との関係式は,

$$\gamma_5 A = A^\dagger\gamma_4 \quad ; \quad \gamma_4 S^\dagger \gamma_4 S = 1$$

$$A\gamma_5 = -\gamma_5 A \quad ; \quad \gamma_5 S = S\gamma_5 \tag{11}$$

となることが容易く証明できる。そこで, (5)式 $X\zeta=0$ に対して $\zeta^\dagger X^\dagger=0$ であるから右から γ_4 を掛けて(11)より $\zeta^\dagger\gamma_4 X=0$ となる。よって ζ に対する共役 spinor は,

$$\bar{\zeta} = \zeta^\dagger\gamma_4 \tag{12}$$

である。(3次元実空間での共役 spinor は vector-matrix x が hermitian であるから2成分 spinor $\zeta^\dagger$ そのものである。)

16成分からなる spinor と共役 spinor の積の既約分解は, 前節の考え方と式(11)を利用して簡単に導出できて, 次のように全くよく知られた結果と一致する。

scalar	$\bar{\zeta}\zeta = \phi^\dagger\eta + \eta^\dagger\phi$
pseudosalar	$\bar{\zeta}\gamma_5\zeta = \phi^\dagger\eta - \eta^\dagger\phi$
four vector	$i\bar{\zeta}\gamma_\mu\zeta = \phi^\dagger\sigma_\mu\phi - \eta^\dagger\sigma_\mu{}^\dagger\eta$
axial vector	$\bar{\zeta}\alpha_\mu\zeta = i\bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\zeta = \phi^\dagger\sigma_\mu\phi + \eta^\dagger\sigma_\mu{}^\dagger\eta$
2階反対称テンソル	$\bar{\zeta}\alpha_\mu\alpha_\nu\zeta = \bar{\zeta}\gamma_\mu\gamma_\nu\zeta \quad (\mu \neq \nu)$

次に回転 S は proper Lorenz 変換も直接表現することを見る。式(6)の回転, $X'=SXS^{-1}$ すなわち $x_\mu'\alpha_\mu = x_\nu S\alpha_\nu S^{-1}$ に Lorenz 変換, $x_\mu' = a_{\mu\nu}x_\nu$ ($a_{\mu\nu}a_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}$, $a_{\nu\mu}a_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho}$) を代入して $a_{\mu\nu}\alpha_\mu = S\alpha_\nu S^{-1}$ を得る。同様に $a_{\mu\nu}\alpha_\nu = S^{-1}\alpha_\mu S$ も成り立つ。(11)を使って γ matrix でも同等な表現,

$$a_{\mu\nu}\gamma_\mu = S\gamma_\nu S^{-1} \quad ; \quad a_{\mu\nu}\gamma_\nu = S^{-1}\gamma_\mu S \tag{13}$$

が得られる。次に回転 S の表現を具体的に求める。

$$\begin{aligned} S = BA &= (b_\mu\alpha_\mu)(a_\mu\alpha_\mu) \\ &= (b,\ a) + i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma} + i(a_4\boldsymbol{b} - b_4\boldsymbol{a})\beta\boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{14}$$

ここで, $\boldsymbol{\sigma}$ は 4×4 pauli matrix で次のように拡張してある。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

そこで空間回転 S_R は 4 元 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ から空間部分を抜き取って得られる。回転角を θ とすると,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sin\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{n} \tag{15}$$

となり, $\boldsymbol{n}$ は回転軸単位ベクトルである。ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta/2$ となるのは式(2)の対称変換を 2 回おこなうことによって簡単に証明できる。ゆえに S_R は,

$$S_R=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\cos\frac{\theta}{2}-i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\theta\right) \tag{16}$$

となる。2 成分 spinor ϕ, η の変換はしたがって,

$$\phi'=\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\theta\right)\phi \quad ; \quad \eta'=\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\theta\right)\eta$$

である。当然 3 次元 spinor と同じ変換をする。

時空回転 S_L を求めるため, (x_k, x_4) 平面に垂直な軸の周りの回転で, 回転角を $i\tau$ とすれば, vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ の a_k, b_k 成分と a_4, b_4 成分を(15)式から抜き出して,
$S_L=b_ka_k+a_4b_4+i(a_4b_k-b_4a_k)\beta\sigma_k$ (ただし $k=1,2,3$) となる。
したがって,

$$S_L=\cos\frac{i\tau}{2}-i\cdot\sin\frac{i\tau}{2}\cdot\beta\sigma_k=\cosh\frac{\tau}{2}+\sinh\frac{\tau}{2}\cdot\beta\sigma_k=\exp\left(\frac{\tau}{2}\beta\sigma_k\right) \tag{17}$$

2 成分 spinor の変換は,

$$\phi'=\exp\left(\frac{\tau}{2}\sigma_k\right)\phi \quad ; \quad \eta'=\exp\left(-\frac{\tau}{2}\sigma_k\right)\eta$$

となる。

4. spinor の空間反転, 時間反転, 荷電共役変換を考えていく。空間反転とは 3 次元空間の反転 $\mathbf{x}\to-\mathbf{x}$ なる変換での振る舞いであるが, 我々の立場では 1 軸, 2 軸, 3 軸, に対する対称変換をつぎつぎに行なって parity operator P を得るはずである。対称変換 $X'=-AXA$ すなわち $x_\mu'\alpha_\mu=-x_\mu A\alpha_\mu A$ であるから 1 軸に対する対称変換 A_1 は, $-\alpha_1=-A_1\alpha_1A_1$; $\alpha_2=-A_1\alpha_2A_1$; $\alpha_3=-A_1\alpha_3A_1$; $\alpha_4=-A_1\alpha_4A_1$ を同時に満たさねばならない。解は $A_1=\alpha_1$ である。同様に 2 軸に対する対称変換は $A_2=\alpha_2$, 3 軸に対する変換は $A_3=\alpha_3$ である。ゆえに parity operator P は,

$$P=\alpha_3\alpha_2\alpha_1=-i\gamma_4 \tag{18}$$

4 成分 spinor の変換は $\zeta'=P\zeta=-i\gamma_4\zeta$ である。したがって 2 成分 spinor は,

$$\phi\to\phi'=-i\eta \quad ; \quad \eta\to\eta'=-i\phi \tag{19}$$

となる。2 回の parity operator を作用すると, $\zeta\to\zeta'=-\zeta$ となり角 2π だけ空間回転したことに対応する。

次に Pauli 型時間反転であるが，それは時間軸 x_4 のみの変換で，その軸に対する対称変換 A_4 を求めればよい。$\alpha_k=-A_4\alpha_k A_4$ $(k=1,2,3)$; $\alpha_4=A_4\alpha_4 A_4$ であるから解は，$A_4=\alpha_4$ となる。spinor ζ の変換は，

$$\zeta \to \zeta'=\alpha_4\zeta=i\gamma_5\gamma_4\zeta \tag{20}$$

で，2成分 spinor の変換は，

$$\phi \to \phi'=-i\eta \quad ; \quad \eta \to \eta'=i\phi \tag{21}$$

となる。2回の時間反転で $\zeta'=\zeta$ と元に戻る。

これまでの変換は，spinor の変換後はやはり同じ種類の spinor になると仮定してきたのであるが，これから述べるように時空を制約すると spinor ζ と全く同じふるまいをする複素 spinor が存在する。(似たような振る舞いをする一種の複素 spinor はすでに，式(12)で，共役 spinor として定義してある。）したがって spinor から複素 spinor に移行する変換も考えられ。そのため，まず複素 spinor を導出する。

$X\zeta=0$ の複素共役を取り $X^*\zeta^*=0$，左から γ_4 を掛けて，$(X^*)^\dagger\gamma_4\zeta^*=0$，したがって $X^T\gamma_4\zeta^*=0$，左からすでに定義した matrix C, D をそれぞれ掛けて二つの式，

$$-XC\gamma_4\zeta^*=0 \quad ; \quad XD\gamma_4\zeta^*=0$$

が得られる。ゆえに ζ の複素 spinor は，

$$C\gamma_4\zeta^* \quad ; \quad D\gamma_4\zeta^* \tag{22}$$

で，それらは ζ と全く同じ振る舞いをする。(3次元実空間の2成分 spinor ζ に対して複素 spinor は $ic\zeta^*$ となり，これを Cartan は第二空間の spinor と命名した。)

荷電共役変換とは，物理的には粒子から反粒子への変換である。粒子を spinor ζ で表現すると反粒子は複素 spinor である。$X\zeta=0$ に対してその変換は時空の制約を受けないから，$X\zeta'=0$，したがって変換後の ζ' は(22)のいずれかである。2回の荷電共役変換でもとの spinor に戻るべきだとすると，後者が許され，荷電共役変換は，

$$\zeta'=D\gamma_4\zeta^*$$

である。2成分 spinor の変換は，

$$\phi \to \phi'=c\eta^* \quad ; \quad \eta \to \eta'=-c\phi^* \tag{23}$$

となる。

次に Wigner 型時間反転をみる。この変換は周知のように映画のフイルムを逆転して眺める状態に対応している。この場合は時空の制約を受け，かつ spinor から複素 spinor への変換である。すなわち，$X\zeta=0$ に対して $X\to X^\dagger$; $\zeta\to\zeta'=R\zeta^*$ となる matrix R を求めればよい。よって $X^\dagger\zeta'=0$ の左から γ_4 を掛けて，$X\gamma_4\zeta'=0$ となるから，$\gamma_4\zeta'=\gamma_4 R\zeta^*$ が(22)の複素 spinor のいずれかになればよい。R は決定して，時間反転

での spinor の変換は,

$$\zeta \to \zeta' = \gamma_4 C \gamma_4 \zeta^* = -\gamma_2\gamma_4\gamma_5\zeta^* \quad 又は,\quad \zeta \to \zeta' = \gamma_4 D \gamma_4 \zeta^* = -\gamma_2\gamma_4\zeta^*$$

で, 2 成分 spinor の変換は,

$$\phi \to \phi' = c\phi^* ;\ \eta \to \eta' = c\eta^* \quad 又は,\quad \phi \to \phi' = -c\phi^* ;\ \eta \to \eta' = c\eta^* \tag{24}$$

となる。2 回の時間反転でいずれも $\zeta' = -\zeta$ である。

最後は, 膨大な応用例を持つ Dirac 方程式と未だ決着がついていない Heisenberg の統一場方程式を簡単に spinor の変換性から眺める。Dirac 方程式はよく知られているように 4 元運動量 vector $p_\mu = -i\partial_\mu$ と spinor からなる共変性からできている。
任意の 4 元 spinor ζ_A に対して $i\bar{\zeta}_A p_\mu \gamma_\mu \zeta$ の scalar が $\bar{\zeta}_A\zeta$ なる scalar に比例すると主張する。よって, $ip_\mu\gamma_\mu\zeta = -c\zeta$ である。p_μ の物理的意味から Lorenz 不変な定数, c は rest mass m になる。これが自由場の Dirac 方程式である。なお静止系では, 2 成分 spinor ϕ, η は全く同じ 3 次元 spinor になるので, 標準形式と言われる方程式は ζ のかわりに $\psi = \begin{bmatrix} \phi + \eta \\ \phi - \eta \end{bmatrix}$ と置き, 静止系で上 2 成分だけ残るようにして, 同型の方程式になるように matrix γ_μ を再定義すればよい。結果は original な Dirac 方程式である。同様に共変性だけでは $ip_\mu\gamma_\mu\zeta = -c(\bar{\zeta}\zeta)\zeta$ も許される。この非線形方程式が Heisenberg の統一場方程式である。
彼は $c = L^2$ となる Lorenz 不変な長さを導入した。なお rest mass m は静止系での 2 成分 spinor ϕ を用いて, $m = 2L^2(\phi^\dagger\phi)$ で与えられる。

結語として一言述べる、数学者 Cartan は文献(1)の続編で多次元 spinor を当然展開しているが, あまりにも数学的で理解する術もない。したがって 3 次元 spinor をお手本にして, 4 次元 spinor を Cartan 流に忠実に再現した。結果は普通の方程式から出発する方法よりも, はるかに統一的に容易く変換性が得られることがわかった。

参考文献

1) LEÇONS SUR LA THÉORIE DES SPINEURS (I) LES SPINEURS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS PAR ÉLIE CARTAN (HERMANN PARIS) 1938
2) ランダウ=リフシッツ著 相対論的量子力学 1 (東京図書)
3) 山内恭彦著 回転群とその表現 (岩波書店)

Cartan-Symmetries in Four Dimensional Spinors

Kazuo Ishii

Department of Applied Physics
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1990)

We shall review the Cartan's symmetry transformation techniques in four dimensional spinors and discuss the beautiful fornulation to be obtained uniformly.