場の量子論の破綻

溝　内　正　義

岡山理科大学教養部

（1989年９月30日　受理）

’88年度版の本誌に載せた論文以来，従来の場の量子論には，相互作用表示の方程式

$$i\partial_0 | t> = H_I(t) | t> \tag{1}$$

の解の構成の仕方に重大な誤謬のあることを指摘してきた[1]。その論旨は以下のとおりである。方程式(1)に，振動数部交換という変換をほどこすと，もうひとつとおりの解 $| t>'$ がえられて，$| t>' \neq | t>$ としなければならない。両方の解をただしく構成するためには，$| t>$，$| t>'$ のそれぞれをもとめようとして，方程式(1)を積分方程式にし，それに対して直接 iteration を適用するようなことはしてはならない。なぜなら，もしそうすると，辺々の振動数部交換の変換性があわなくなるからである。

このことは，

$$| t> = U(t, t_0) | t_0>$$
$$| t>' = U'(t, t_0) | t_0>'$$

として，もし，$U' \neq U$ ならば，$U+U'$ こそ，iterationでもとめてもよい解であって，U，U' のそれぞれに対して，直接 iterationを適用することは，邪道であることを意味する。（なぜならもしそうすると，$U' = U$ になってしまうからである。）一端このことをみとめると，S行列の定義式にあらわれる

$$T(h_I(x_1)h_I(x_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots h_I(x_n))$$
$$(H_I(t) = \int d^3x h_I(x))$$

を，正規積N（………）で展開することは，無意味であることになる。

そこで，$U' \neq U$ として，意味のあるS行列の定義式をうるためには，つぎのようにするべきである。すなわち，まず正規積　N（………）に振動数部交換をほどこしたものを，N′（………）とし，

$$2T(h_I(x_1)h_I(x_2)\cdots\cdots\cdots\cdots h_I(x_n))$$

を，N（ ……… ）＋N′（ ……… ）で展開する。（このような展開が可能であることは，すでに証明しておいた[1]。）つぎに，この展開式のN（ ……… ）の項だけをよせあつめて，それを従来のUの定義式で，T（ ……… ）のかわりに代入し，それをUのあらたな定義式とする。そして，このUからS行列を定義すればよいのである。S行列を，このように定義すると，loop の因子の全体が振動数部交換のもとで不変になる。そしてこのことから，self energy の不定性が証明されるのである。この証明は，もっとも簡単な場合については，すでにあたえておいた[2]。この論稿の目的は，この不定性の証明を，より一般的な場合について行なうことである。（以後，「不変」は，「振動数部交換不変」を意味するものとする。）

loopの因子が全体として不変であることは，以下のようにして説明できる。不変な関数 2T（ ……… ）を，N（ ……… ）＋N′（ ……… ）で展開すると，展開の各項は不変になっている。そこで，この各項の各因子をみてみるに，まず外線の因子N（ ……… ）＋N′（ ……… ）は，それ自身で不変である。したがって，ある項の内線の因子は，全体として不変になっている。内線の因子はすべて，$\underbracket{A\,B}\pm\overbracket{A\,B}$の形をしているが，loopをつくらない treeの部分に関しては，$\overbracket{A\,B}=\underbracket{A\,B}$だから，不変な因子$\underbracket{A\,B}+\overbracket{A\,B}$だけがのこる。したがって，のこりの因子である loop の因子は全体として不変である。

以下，それぞれの項の loop の因子だけを全体としてみてみると，一般には，$\underbracket{A\,B}$と$\overbracket{A\,B}$とからなるいろんな項の和を，基底運動量で積分したものに帰着し，ある項と，これに対して振動数部交換をほどこした項とがかならず対になっている。たとえば，被積分関数は，

$$\underbracket{A\,B}\,\overbracket{C\,D}\,\overbracket{A\,B}\cdots\cdots\cdots\underbracket{C\,D}+\overbracket{A\,B}\,\underbracket{C\,D}\,\underbracket{A\,B}\cdots\cdots\cdots\overbracket{C\,D} \tag{2}$$

のようになっている。ここでの目的はさしあたり，連結度が1の場合に，このような項の和を基底運動量で積分したものが不定量であることを証明することである。（以後，$\underbracket{A\,B}\equiv\underbracket{\quad}$，$\overbracket{A\,B}\equiv\overbracket{\quad}$と略記することにする。）

例としてまず，

$$\begin{matrix} \overbracket{\quad} & \overbracket{\quad} & \cdots\cdots & \overbracket{\quad} & \underbracket{\quad} \\ +\underbracket{\quad} & \underbracket{\quad} & \cdots\cdots & \underbracket{\quad} & \overbracket{\quad} \end{matrix} \tag{3}$$

の場合を考える。これの第１項の被積分関数は，

$$\frac{N''}{a_1' a_2' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{n-1}' \cdot a_n} \tag{4}$$

の形をしている。ただし，propagator $\sqcap$，$\sqcup$ の分母をそれぞれ

$a'_k = D_k - i\varepsilon$，$a_k = D_k + i\varepsilon$

と書くことにする。ここで，N''，D_kは，基底運動量の関数である。

連結度が１の場合には，式(4)は，以下のように書き換えられる。すなわち，

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 dZ_k\right]\frac{N''\delta\left(1-\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)}{\left[\sum_{k=1}^{n-1} a_k' Z_k + a_n Z_n\right]^n} \\
&=\left[\prod_{k=1}^{n-1}\int_0^1 dZ_k\right]\frac{N''}{\left[a_n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k')Z_k\right]^n} \\
&=\left[\prod_{k=1}^{n-1}\int_0^1 dZ_k\right] \\
&\times\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=1}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k+i\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n-1}Z_k\right)\right]^n}.
\end{aligned} \tag{5}$$

この最後の式を，適当に変数変換された基底運動量q_μで積分しなければならないが，その際，それの第０成分q_0の積分の contour は，Z_kに依存することになる。すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n-1} Z_k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon'} \equiv \kappa$$

をさかいめとして，

$$\sum_{k=1}^{n-1} Z_k < \kappa \quad \text{ならば}\quad C_F,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} Z_k > \kappa \quad \text{ならば}\quad C_F'$$

になる。

C_Fならば，虚数軸上を，$-i\infty$から$+i\infty$へむかって，C'_Fならば，$+i\infty$から$-i\infty$へむかって積分することになるから，q_μをユークリッド変数にしたあとでのこれ

に関する主値積分の定義は以下のようになる。すなわちたとえば，変数Z_{n-1}で積分するとして，

$$
\lim_{\delta\to 0}\left[\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^1 dZ_k\right]\int_0^{\kappa-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k-\delta} dZ_{n-1}\int d^3q\int idq_4
$$

$$
\times\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=1}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k\right]^n}
$$

$$
-\lim_{\delta\to 0}\left[\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^1 dZ_k\right]\int_{\kappa-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k+\delta}^{1} dZ_{n-1}\int d^3q\int idq_4
$$

$$
\times\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=0}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k\right]^n}. \tag{6}
$$

ただし，ここで，$q_0=iq_4$とする。

同様に，式(3)の第2項は，

$$
\frac{N''}{a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{n-1}\cdot a_n'}
$$

を，変数q_μで積分したものになっている。それは，式(6)で，εを$-\varepsilon'$，ε'を$-\varepsilon$，したがって，

$$
\kappa\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon'}\ \text{を}\ \kappa'\equiv\frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}
$$

でおきかえて，全体に-1を乗ずることによりえられる。すなわち，

$$
-\lim_{\delta\to 0}\left[\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^1 dZ_k\right]\int_0^{\kappa'-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k-\delta} dZ_{n-1}\int d^3q\int iq_4
$$

$$
\times\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=1}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k\right]^n}
$$

$$
+\lim_{\delta\to 0}\left[\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^1 dZ_k\right]\int_{\kappa'-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k+\delta}^{1} dZ_{n-1}\int d^3q\int iq_4
$$

$$
\times\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=1}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k\right]^n}. \tag{7}
$$

つぎに，(6)と(7)の和をとり，$\delta\to 0$はもはや無意味になるから，これをとりさった式を書くと，

$$2\int_{\kappa'-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k}^{\kappa-\sum_{k=1}^{n-2}Z_k} dZ_{n-1}\left[\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^1 dZ_k\right]$$

$$\times\int d^3q\int i\,dq_4\frac{N''}{\left[D_n-\sum_{k=1}^{n-1}(D_n-D_k)Z_k\right]^n}. \tag{8}$$

ここで，κ，κ'は，$0<\kappa<1$，$0<\kappa'<1$，$\kappa+\kappa'=1$の範囲内で任意の値をとりうる。したがって，式(8)の積分は，完全な不定量である。ただし，変数Z_{n-1}の積分を行なうとき，最初から，

$$0<\sum_{k=1}^{n-2}Z_k\leqq\kappa'\leqq\kappa<1$$

としておけばよい。

つぎにたとえば，式(2)の第１項のように，$\sqcup$，$\sqcap$が，不規則に混合している項に関しては，もし，ℓ番目，m番目，……… の因子が$\sqcup$になっている場合，$\sum_{k=1}^{n-2}$ で，Z_ℓ，Z_m，……… が欠けた和をとるようにすればよい。ただし，$1\leqq\ell$，m，………$\leqq n-2$で，式(2)の第１項のもっとも右側にある因子，すなわちn番目の因子は$\sqcup$にしてある。

もし，$n-1$番目の因子が$\sqcup$ならば，式(5)の最右辺の分母の$\sum_{k=1}^{n-1}Z_k$を$\sum_{k=1}^{n-2}Z_k$でおきかえ，式(6)のZ_{n-1}の積分を，Z_{n-2}の積分でおきかえ，これの領域は，

$$\kappa'-\sum_{k-1}^{n-3}Z_k\leqq Z_{n-2}\leqq\kappa-\sum_{k=1}^{n-3}Z_k$$

とすればよい。すなわち，番号のすくない方へと順送りにしておけばよい。

従来の場の量子論は，振動数部交換のもとでの変換性というもっとも重要な対称性を考慮に入れていなかったので，破綻していたのだといってよい。

参考文献

1） 岡山理科大学紀要，23A（1988）53.
2） 岡山理科大学紀要，24A（1989）7.

A Rent in Quantum Field Theory

Masayoshi MIZOUCHI
Faculty of Liberal Arts and Science,
Okayama University of Science,
1−1 Ridaicho, Okayama 700 Japan
(Received September 30, 1989)

This paper shows the indefiniteness of the scattering matrix corresponds to a loop diagam with a lot of vertex, when connectivity is one.