

K, D, B中間子崩壊における $\Delta I = \frac{1}{2}$ 則

狩野勉

岡山理科大学教養部

(1989年9月30日 受理)

1. はじめに

物質のより基本的構成要素として、6種類の quarks と 6種類の leptons が存在し、それらの間の相互作用は electro weak gauge 理論で記述されるという素粒子の標準模型¹⁾は近年高エネルギー実験の data が増えるとともにいろいろな角度から検討されている。現在 lepton は 6種類の存在が確認されているが quark は 5種類しか存在の可能性は確認されていない。第 6番目の quark, すなわち top quark の確認が急がれるところである。ところで top quark の直接的な発見だけでなく、top quark の存在による他の現象への影響を調べることも重要である。その意味で lepton の関与しない弱い相互作用 —— non-leptonic interaction —— の現象もこの標準模型で理解できるかどうかは興味ある問題である。non-leptonic interaction における懸案の 1つは $\Delta I = \frac{1}{2}$ 則をどう理解するかということである。

本論文では K, D, B 中間子の 2 個の π 中間子への崩壊過程を通して $\Delta I = \frac{1}{2}$ 則に対する dynamical な mechanism について論議する。

2. $K \rightarrow \pi \pi$, $D \rightarrow \pi \pi$, $B \rightarrow \pi \pi$ の実験的特徴と理論的課題

2-1 実験的特徴

$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ と $K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ の崩壊巾の比はそれらの分岐比 $Br(K \rightarrow \pi \pi)$ と life time τ (K) から次のようになる²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{\Gamma(K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} &= \frac{Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{Br(K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \cdot \frac{\tau(K_s^0)}{\tau(K^+)} \\ &= \frac{21.17}{68.61} \times \frac{0.8922 \times 10^{-10}}{1.2371 \times 10^{-8}} \\ &\approx 2.2 \times 10^{-3} \end{aligned} \tag{2-1}$$

また $D \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $B \rightarrow \pi^+ \pi^-$ に対する実験結果は

$$Br(D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) < 0.5\% , Br(D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (0.13 \pm 0.04)\% ,$$

$$\tau(D^+) = (10.69^{+0.34}_{-0.32}) \times 10^{-13} \text{ sec}, \tau(D^0) = (4.28 \pm 0.11) \times 10^{-13} \text{ sec},$$

$$Br(B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) < 2.3 \times 10^{-3}, Br(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) < 3 \times 10^{-4},$$

$$0.4 < \frac{\tau(B^0)}{\tau(B^+)} < 2.1$$

と報告されている²⁾ので

$$\frac{\Gamma(D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} < 1.5 \quad (2-2)$$

と上限だけが与えられる。また $\Gamma(B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) \neq \Gamma(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ は明らかでない。

2-2 理論的課題

non-leptonic interaction に対する 6-quark 標準模型による基本的な相互作用 Hamiltonian H_w は

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger}, \quad (2-3a)$$

$$J_\mu = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) r_\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (2-3b)$$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{tb} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 s_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2-3c)$$

で表される。ここで G は Fermi 結合定数, $c_i \equiv \cos \theta_i$, $s_i \equiv \sin \theta_i$, δ は CP の破れを示す位相である。(2-3b)は hadronic weak charged current で V-A 型の構造である。(2-3c)は 小林・益川の混合行列で各行列要素の大きさは、原子核の β 崩壊等各種の実験からの情報により次のように報告されている²⁾。

$$\begin{pmatrix} 0.9748 \sim 0.9761 & 0.217 \sim 0.223 & 0.003 \sim 0.010 \\ 0.217 \sim 0.223 & 0.9733 \sim 0.9754 & 0.030 \sim 0.062 \\ 0.001 \sim 0.023 & 0.029 \sim 0.062 & 0.9980 \sim 0.9995 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

さて(2-3)の $K \rightarrow \pi \pi$ に寄与する部分は次式で与えられる。

$$H_w(\Delta S = -1) = \frac{G}{\sqrt{2}} [A_{cs} \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L - (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L \} + A_{ts} \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L - (\bar{d}t)_L (\bar{t}s)_L \}] \quad (2-5)$$

ここで $(\bar{d}u)_L = \bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u$, $A_{cs} = -V_{cd}^* V_{cs}$, $A_{ts} = -V_{td}^* V_{ts}$ である。

ところで K 中間子, π 中間子とも spin (J で表す) が 0 の粒子である。それに対して iso-spin (I で表す) は K 中間子が $\frac{1}{2}$, π 中間子は 1 であり, π^+ , π^0 , π^- に対しては第 3 成分 I_z が +1, 0, -1 で区別されている。従って $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ の終状態 $\pi^- \pi^0$ の合成 iso-spin の大きさ I_J は 2 だけが許され, $K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ では $I_J = 2$, 0 が許される。始状態の iso-spin I_J は K 中間子の iso-spin だから $I_J = \frac{1}{2}$ である。 $\Delta I = |I_J - I_i|$ で定義された ΔI を用いると $\Delta I(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = \frac{3}{2}$, $\Delta I(K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ である。(2-5)による相互作用では $\Delta I = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ は同程度の大きさであるからこの Hamiltonian による崩壊振幅は $A(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0) \approx A(K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ となる。位相体積を考慮しても(2-1)の再現は不可能である。しかし、もし何らかの理由で $\Delta I = \frac{1}{2}$ の相互作用が enhance し, $\Delta I = \frac{3}{2}$ の相互作用が suppress されているならば(2-1)の再現は可能になる。このような mechanism を引き出すために quark と gluon の相互作用 —— 量子色力学 (QCD) —— による補正 (QCD 補正) が試みられた³⁾。4-quark 模型に基づく QCD 補正によって得られた effective Hamiltonian から比較的大きな $\Delta I = \frac{1}{2}$ enhance が得られた⁴⁾ が十分満足できる結果には至っていない。6-quark 標準模型に基づく QCD 補正の試みはいろいろな現象に対してなされている^{5), 6)}。

$D \rightarrow \pi \pi$, $B \rightarrow \pi \pi$ は $\Delta I = \frac{1}{2}$ 相互作用に関しては $K \rightarrow \pi \pi$ と同じ事情なので, QCD 補正の効果がどの程度か知ることは興味あることである。

3. effective Hamiltonian の導出

参考文献 5), 6) とは異なり top quark の質量を 40 [GeV] に置いて QCD 補正を実行する。それゆえ改めて non-leptonic interaction に対する effective Hamiltonian の導出が

必要となる。

一般に(2-3)の H_w を operator product 展開⁷⁾ を用いて

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} A_{\alpha} O_{\alpha} \quad (O_{\alpha}; \text{ 4 体 quark operator}) \quad (3-1)$$

のように変形し, operators に対してくり込み群の方程式を解き Q C D 補正を行う。このとき virtual momenta Q の領域を次の 4 つに分けて計算する。

$$\text{領域 I ; } m_w^2 > Q^2 > m_t^2,$$

$$\text{領域 II ; } m_t^2 > Q^2 > m_b^2,$$

$$\text{領域 III ; } m_b^2 > Q^2 > m_c^2,$$

$$\text{領域 IV ; } m_c^2 > Q^2 > \mu^2$$

ここで m_w, m_t, m_b, m_c はそれぞれ weak boson, t-, b-, c-quark の質量で, μ は infrared cutoff である。

計算の結果は次式で与えられる。

$$H_w^{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu} A_{\alpha} \left[\left\{ \frac{\alpha_1(m_t)}{\alpha_1(m_w)} \right\}^{D_1} \right]_{\alpha \beta} \left[\left\{ \frac{\alpha_2(m_b)}{\alpha_2(m_t)} \right\}^{D_2} \right]_{\beta \gamma} \left[\left\{ \frac{\alpha_3(m_c)}{\alpha_3(m_b)} \right\}^{D_3} \right]_{\gamma \delta} \left[\left\{ \frac{\alpha_4(\mu)}{\alpha_4(m_c)} \right\}^{D_4} \right]_{\delta \nu} O_{\nu} \quad (3-2)$$

ここで $\alpha_i(m_i)$ は領域 i における j -particle の質量での強結合定数であり, D_i は領域 i における 4 体 quark operators の異常次元に比例する行列である。また D_i は 4 体 quark operators に対する最低次の Q C D 補正を与える図 1 の diagram を計算することによって決定される。

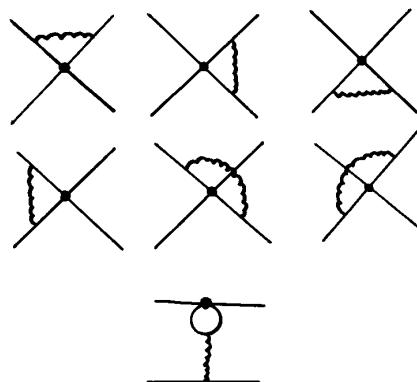


図 1 4 体 quark operators に対して最低次の Q C D 補正を計算するための Feynman 図。 $\sim\sim$ は gluon を示す。

3-1 K \rightarrow $\pi\pi$ の場合

K \rightarrow $\pi\pi$ に対して(3-2)を得るための計算の概略を述べる。まず(2-5)を次のように変形する。

$$H_W(\Delta S = -1) = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_{cs} + \frac{A_{ts}}{2} \right) (O_+ + O_-) + \frac{A_{ts}}{4} (O_3 + O_4) \right] \quad (3-3)$$

ここで

$$O_+ = \frac{1}{2} \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L - (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L + (\bar{d}s)_L (\bar{u}u - \bar{c}c)_L \}, \quad (3-4a)$$

$$O_- = \frac{1}{2} \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L - (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L - (\bar{d}s)_L (\bar{u}u - \bar{c}c)_L \}, \quad (3-4b)$$

$$O_3 = (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L - 2(\bar{d}t)_L (\bar{t}s)_L + (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{c}c - 2\bar{t}t)_L, \quad (3-4c)$$

$$O_4 = (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L - 2(\bar{d}t)_L (\bar{t}s)_L + (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{c}c - 2\bar{t}t)_L \quad (3-4d)$$

である。まず領域IでQCD補正を計算しよう。

O_+ の展開係数を F_+ とおき、次元を4次元からn次元にずらしてくり込みを行う計算方法によると、 F_+ の満足すべきくり込み群の方程式は次式である。

$$(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - n \gamma_F - \gamma_+) F_+ = 0 \quad (3-5)$$

ここで γ_F はfermi粒子の、 γ_+ は O_+ の異常次元である。これを解いて最後に $n \rightarrow 4$ すると F_+ は

$$F_+ = \left(\frac{\alpha_1(m_t)}{\alpha_1(m_W)} \right)^{\frac{d_+}{2\beta_0}} \quad (3-6)$$

となる。ここで $\beta_0^{\frac{1}{2}} = (11N - 2f_1) / 3$ 、Nはcolor数、 f_1 はquark数である。また d_+ は γ_F 、 γ_+ から決定される量である。

さて O_+ に図1を用いて最低次の補正を計算すると、

$$O_+ \rightarrow \left(1 + \frac{g^2 \mu^{-2\epsilon}}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) (-2C_2(R) + 3\frac{N-1}{N}) \right) O_+ \quad (3-7)$$

となる。ここで $C_2(R) = (N^2 - 1) / 2N$, $\epsilon = (4 - n) / 2$, g は quark と gluon の結合定数である。 O_+ は最低次の補正 を加えても他の operator と混じらないことに注意しておく。(3-7) より $d_+ = \{-3(N-1)/N\} \times 2$ が得られる。 O_- , O_3 , O_4 に対しても同様な計算をすると領域 I で QCD 補正された(3-3)は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H_w^I \Delta S = -1 &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_{cs} + \frac{A_{ts}}{2} \right) \left\{ (K^I)^{-a_1} O_+ + (K^I)^{b_1} O_- \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{ts}}{4} \left\{ (K^I)^{-a_1} O_3 + (K^I)^{b_1} O_4 \right\} \right], \end{aligned} \quad (3-8)$$

ここで

$$K^I = \left(\frac{\alpha_1(m_t)}{\alpha_1(m_w)} \right), \quad (3-9a)$$

$$a_1 = \frac{3(N-1)}{\beta_0^I N}, \quad (3-9b)$$

$$b_1 = \frac{3(N+1)}{\beta_0^I N} \quad (3-9c)$$

である。

次に領域 II では t-quark の質量 m_t が十分大きく, t-quark に depend する振幅は他に比して $1/m_t^2$ だけ小さくなる⁸⁾。よって operator 対する t-quark の寄与を無視してよい。 O_3 , O_4 は次のような operators に変わる。

$$O_3 \rightarrow P_3^I = (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L + (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{c}c)_L, \quad (3-10a)$$

$$O_4 \rightarrow P_4^I = (\bar{d}u)_L (\bar{u}s)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}s)_L - (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{c}c)_L. \quad (3-10b)$$

P_3^I , P_4^I は最低次のQCD補正によって他のoperatorsと混合する。そこで新たに次のoperatorsを導入しなければならない。

$$P_1^I = (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c + \bar{b}b)_L , \quad (3-11a)$$

$$P_2^I = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_a s)_L (\bar{u}\lambda_a u + \bar{d}\lambda_a d + \bar{s}\lambda_a s + \bar{c}\lambda_a c + \bar{b}\lambda_a b)_L , \quad (3-11b)$$

$$P_5^I = (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c + \bar{b}b)_R , \quad (3-11c)$$

$$P_6^I = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_a s)_L (\bar{u}\lambda_a u + \bar{d}\lambda_a d + \bar{s}\lambda_a s + \bar{c}\lambda_a c + \bar{b}\lambda_a b)_R \quad (3-11d)$$

ここで $(\bar{u}u)_R = \bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u$ 等, λ_a は $T r(\lambda_a \lambda_b) = \delta_{ab}/2$ で, color空間における SU(N) 行列である。

d_+ を求めた時と同様な計算によると $P_1^I \sim P_6^I$ に対して (3-7) に相当する式は次のようになる。

$$\left\{ 1 + \frac{g^2 \mu^{-2\epsilon}}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) \left(-2C_2(R) + M_I \right) \right\} P_I \quad (3-12)$$

ここで P_I は $(P_1^I \sim P_6^I)$ を成分とするベクトルを表す。また $N = 3$, quark数 $f_2 = 5$ とすると M_I は

$$M_I = \begin{bmatrix} 0 & \frac{26}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{26}{9} \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -4 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

で表される行列である。(3-6) の d_+ に相当する $d_I = -2M_I$ であるから QCD 補正された Hamiltonian を得るために d_I を対角化する。その際の変換行列 A_I , 固有値 x_i ($i = 1 \sim 6$) は次式で与えられる。

$$A_{\text{II}} = \begin{bmatrix} -0.2696 & 1 & 0 & 0 & 0.1391 & -0.5158 \\ -0.4843 & 1 & 0 & 0 & -0.0807 & -0.1667 \\ -0.1905 & -0.2857 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2222 & -0.6667 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3449 & -0.3008 & 0 & 0 & 1 & -0.8720 \\ -0.1289 & 0.6142 & 0 & 0 & 0.2098 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3-14)$$

$$x_1 = -9.8903, x_2 = 5.5059, x_3 = -4, x_4 = 8, x_5 = -2.3254, x_6 = 12.7122 \quad (3-15)$$

以上より領域ⅡまでのQCD補正により(3-8)は次のように表される。

$$H_w^{\text{II}}(\Delta S = -1) = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_{cs} + \frac{A_{ts}}{2} \right) \left\{ \left(K^1 \right)^{-a_1} \left(K^{\text{II}} \right)^{-a_2} O_+ + \left(K^1 \right)^{b_1} \left(K^{\text{II}} \right)^{b_2} O_- \right\} \right. \\ \left. + \frac{A_{ts}}{4} \left\{ \left(K^1 \right)^{-a_1} \left[A_{\text{II}}^{-1} K^{\text{II}} A_{\text{II}} P_{\text{II}} \right]_{\text{3成分}} + \left(K^1 \right)^{b_1} \left[A_{\text{II}}^{-1} K^{\text{II}} A_{\text{II}} P_{\text{II}} \right]_{\text{4成分}} \right\} \right], \quad (3-16)$$

ここで A_{II}^{-1} は A_{II} の逆行列, $a_2 = 3(N-1) / (\beta_0 N)$, $b_2 = 3(N+1) / (\beta_0 N)$, $\beta_0 = (11N - 2f_2) / 3$, $N = 3$, $f_2 = 5$, $K^1 = \alpha_2(m_b) / \alpha_2(m_c)$ である。 K^i は $(K^i)^{x_i / 2\beta_0}$ ($i = 1 \sim 6$) を各対角要素とする 6×6 の対角行列である。

領域Ⅲでは operators に対して 4-quark (u, d, s, c) のみが寄与するから準備する operators は O_{\pm} に加えて次の 6 個である。

$$P_1^{\text{III}} = (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c)_L, \quad (3-17a)$$

$$P_2^{\text{III}} = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_{as})_L (\bar{u}\lambda_{au} + \bar{d}\lambda_{ad} + \bar{s}\lambda_{as} + \bar{c}\lambda_{ac})_L, \quad (3-17b)$$

$$P_3^{\text{III}} = P_3^{\text{II}}, \quad P_4^{\text{III}} = P_4^{\text{II}},$$

$$P_5^{\text{III}} = (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c)_R, \quad (3-17c)$$

$$P_6^{\text{III}} = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_{as})_L (\bar{u}\lambda_{au} + \bar{d}\lambda_{ad} + \bar{s}\lambda_{as} + \bar{c}\lambda_{ac})_R. \quad (3-17d)$$

また領域Ⅳでは u, d, s の 3 つの quark を operators に寄与させねばよいから

$$P_1^{\text{IV}} = (\bar{d}s)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)_L, \quad (3-18a)$$

$$P_2^{\text{IV}} = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_{as})_L (\bar{u}\lambda_{au} + \bar{d}\lambda_{ad} + \bar{s}\lambda_{as})_L, \quad (3-18b)$$

$$P_3^N = (\bar{d}u)_L(\bar{u}s)_L + (\bar{d}s)_L(\bar{u}u)_L, \quad (3-18c)$$

$$P_4^N = (\bar{d}u)_L(\bar{u}s)_L - (\bar{d}s)_L(\bar{u}u)_L, \quad (3-18d)$$

$$P_5^N = (\bar{d}s)_L(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)_R, \quad (3-18e)$$

$$P_6^N = \sum_{a=1}^{N^2-1} (\bar{d}\lambda_{as})_L(\bar{u}\lambda_{au} + \bar{d}\lambda_{ad} + \bar{s}\lambda_{as})_R \quad (3-18f)$$

の6個を準備すればよい。

領域Ⅲ, 領域ⅣでのQCD補正を含んだ最終的なeffective Hamiltonian $H_w^{eff}(\Delta S = -1)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H_w^{eff}(\Delta S = -1) = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_{cs} + \frac{A_{ts}}{2} \right) \left\{ (K^I)^{-a_1} (K^I)^{-a_2} (K^I)^{-a_3} \left[A_N^{-1} K^N A_N P_N \right]_{3\text{成分}} \right. \right. \\ & + (K^I)^{b_1} (K^I)^{b_2} (K^I)^{b_3} \left[A_N^{-1} K^N A_N P_N \right]_{4\text{成分}} \left. \right\} \\ & + \frac{A_{ts}}{4} \left\{ (K^I)^{-a_1} \left[A_I^{-1} K^I A_I A_{II}^{-1} K^I A_{II} A_N^{-1} K^N A_N P_N \right]_{3\text{成分}} \right. \\ & \left. \left. + (K^I)^{b_1} \left[A_I^{-1} K^I A_I A_{II}^{-1} K^I A_{II} A_N^{-1} K^N A_N P_N \right]_{4\text{成分}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3-19)$$

ここで $K^I = \alpha_s(m_c) / \alpha_s(m_b)$, $a_3 = 3(N-1) / (\beta_0 N)$, $b_3 = 3(N+1) / (\beta_0 N)$, A_{II} , A_N , K^I , K^N , P_N は付録に与えられている。 A_I^{-1} は A_I の, A_N^{-1} は A_N の逆行列を示す。

さて $m_w = 81.0$ [GeV], $m_t = 40$ [GeV], $m_b = 4.5$ [GeV], $m_c = 1.25$ [GeV], $\mu = 0.7$ [GeV], $\alpha(\mu) = 1$ として数値計算を行なうと(3-19)は

$$\begin{aligned} H_w^{eff}(\Delta S = -1) = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left[A_{cs} (0.0113 P_1^N - 0.2548 P_2^N + 0.6129 P_3^N + 2.6621 P_4^N - 2.6621 P_4^N \right. \\ & - 0.0127 P_5^N - 0.3045 P_6^N) \\ & + A_{ts} (0.0323 P_1^N - 0.3336 P_2^N + 0.4598 P_3^N + 1.8491 P_4^N \\ & \left. - 0.0411 P_5^N - 0.1986 P_6^N) \right] \end{aligned} \quad (3-20)$$

となる。

$$H_W(\Delta C = -1) = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[A_s \{ (\bar{u}d)_L (\bar{d}c)_L - (\bar{u}s)_L (\bar{s}c)_L \} + A_b \{ (\bar{u}d)_L (\bar{d}c)_L - (\bar{u}b)_L (\bar{b}c)_L \} \right] \quad (3-21)$$

ここで $A_s = -V_{cs}^* V_{us}$, $A_b = -V_{cb}^* V_{ub}$ である。

c -quark を含む粒子の相互作用であるから、領域は I から III までにおいて QCD 補正を計算すればよい。したがって(3-20)に対応する effective Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H_W^{\text{eff}}(\Delta C = -1) = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_s + \frac{A_b}{2} \right) (0.7229Q_+ + 1.9134Q_-) \right. \\ & + A_b (0.3979Q_1 - 0.2704Q_2 - 0.1205Q_3 \\ & \left. - 0.0022Q_5 - 0.0547Q_6) \right] \end{aligned} \quad (3-22)$$

で与えられる。ここで

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ (\bar{u}d)_L (\bar{d}c)_L - (\bar{u}s)_L (\bar{s}c)_L \pm (\bar{u}c)_L (\bar{d}d - \bar{s}s)_L \right\}, \quad (3-23a)$$

$$Q_1 = (\bar{u}u)_L (\bar{u}c)_L + (\bar{u}d)_L (\bar{d}c)_L + (\bar{u}s)_L (\bar{s}c)_L + (\bar{u}c)_L (\bar{c}c)_L, \quad (3-23b)$$

$$Q_2 = (\bar{u}c)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c)_L, \quad (3-23c)$$

$$Q_3 = (\bar{u}d)_L (\bar{d}c)_L + (\bar{u}s)_L (\bar{s}c)_L + (\bar{u}c)_L (\bar{d}d + \bar{s}s)_L, \quad (3-23d)$$

$$Q_5 = (\bar{u}c)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c)_R, \quad (3-23e)$$

$$Q_6 = \sum_{a=1}^8 (\bar{u} \lambda_a c)_L (\bar{u} \lambda_a u + \bar{d} \lambda_a d + \bar{s} \lambda_a s + \bar{c} \lambda_a c)_R \quad (3-23f)$$

は領域 III での operators である。

3-3 $B \rightarrow \pi \pi$ の場合

(2-3) の $B \rightarrow \pi \pi$ に寄与する部分は次式である。

$$H_W(\Delta B = -1) = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[A_c \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L - (\bar{d}c)_L (\bar{c}b)_L \} + A_t \{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L - (\bar{d}t)_L (\bar{t}b)_L \} \right] \quad (3-24)$$

ここで $A_c \equiv -V_{cd}^* V_{cb}$, $A_t \equiv -V_{td}^* V_{tb}$ である。

b -quark を含む粒子の相互作用であるから、領域は I と II に分けて QCD 補正を計算すればよい。effective Hamiltonian は次のように得られる。

$$\begin{aligned}
H_W^{\text{eff}}(\Delta B = -1) = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\left(A_c + \frac{A_t}{2} \right) (0.8240W_+ + 1.4730W_-) \right. \\
& + A_t (0.0083W_1 + 0.0123W_2 + 0.2060W_3 \\
& \left. + 0.3682W_4 - 0.0043W_5 - 0.0565W_6) \right] \quad (3-25)
\end{aligned}$$

ここで

$$W_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L - (\bar{d}c)_L (\bar{c}b)_L \pm (\bar{d}b)_L (\bar{u}u - \bar{c}c)_L \right\}, \quad (3-26a)$$

$$\begin{aligned}
W_1 = & (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L + (\bar{d}d)_L (\bar{d}b)_L + (\bar{d}s)_L (\bar{s}b)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}b)_L + (\bar{d}b)_L (\bar{b}b)_L, \\
& \quad (3-26b)
\end{aligned}$$

$$W_2 = (\bar{d}b)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c + \bar{b}b)_L, \quad (3-26c)$$

$$W_3 = (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}b)_L + (\bar{d}b)_L (\bar{u}u + \bar{c}c)_L, \quad (3-26d)$$

$$W_4 = (\bar{d}u)_L (\bar{u}b)_L + (\bar{d}c)_L (\bar{c}b)_L - (\bar{d}b)_L (\bar{u}u + \bar{c}c)_L, \quad (3-26e)$$

$$W_5 = (\bar{d}b)_L (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{c}c + \bar{b}b)_R, \quad (3-26f)$$

$$W_6 = \sum_{a=1}^8 (\bar{d}\lambda_a b)_L (\bar{u}\lambda_a u + \bar{d}\lambda_a d + \bar{s}\lambda_a s + \bar{c}\lambda_a c + \bar{b}\lambda_a b)_R \quad (3-26g)$$

は領域 II での operators である。

4. K → π π, D → π π, B → π π の崩壊振幅の計算

前章で導びいた Hamiltonian は quark に対して与えられたものである。quark から構成されている中間子の崩壊振幅の計算には直接適用できない。そこで真空近似⁴⁾を用いて計算するが、 $\Delta I = 1/2$ operator に対する $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ の行列要素が 0 になるような条件を入れるべきである。そこで次のような仮定をする。

$K^-(p) \rightarrow \pi^-(k) + \pi^0(q)$ (p, k, q は 4 元運動量を意味する) に対して

$$\begin{aligned}
<\pi^-\pi^0|(\bar{u}u)_L(\bar{d}s)_L|K^-\rangle &= <\pi^0|-\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u|0><\pi^-|\bar{d}\gamma_\mu s|K^-\rangle, \\
& \quad (4-1a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\pi^-\pi^0|(\bar{d}u)_L(\bar{u}s)_L|K^-\rangle &= <\pi^-|-\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u|0><\pi^0|\bar{u}\gamma_\mu s|K^-\rangle, \\
& \quad (4-1b)
\end{aligned}$$

$$\langle \pi^0 | -\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u | 0 \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} f_\pi q_\mu, \quad (4-2a)$$

$$\langle \pi^- | -\bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 u | 0 \rangle = i f_\pi k_\mu, \quad (4-2b)$$

$$\langle \pi^0 | -\bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d | 0 \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} f_\pi q_\mu, \quad (4-2c)$$

$$\langle \pi^- | \bar{d} \gamma_\mu s | K^- \rangle = f_+ (p_\mu + k_\mu) + f_- (p_\mu - k_\mu), \quad (4-3a)$$

$$\langle \pi^0 | \bar{u} \gamma_\mu s | K^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ f_+ (p_\mu + q_\mu) + (f_- (p_\mu - q_\mu)) \} \quad (4-3b)$$

ここで f_π は $\pi \rightarrow \mu \nu$ より決まる定数, f_\pm は $K \rightarrow \pi l \nu$ より決まる form factor である。また $\langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d} u)_L (\bar{u} s)_L | K^- \rangle = \langle \pi^- \pi^0 | (\bar{d} u)_L | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{u} s)_L | K^- \rangle$ は対消滅の場合に対応するので寄与が小さいとみなしてよい。この仮定のもとで(3-18)の operator に対する行列要素を計算すると

$$\langle \pi^- \pi^0 | P_1^N | K^- \rangle \quad (4-4a)$$

$$= \langle \pi^- | \bar{d} \gamma_\mu s | K^- \rangle \langle \pi^0 | -\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u | 0 \rangle + \langle \pi^- | \bar{d} \gamma_\mu s | K^- \rangle \langle \pi^0 | -\bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d | 0 \rangle \\ = 0,$$

$$\langle \pi^- \pi^0 | P_3^N | K^- \rangle = \frac{if_\pi}{\sqrt{2}} [f_+ (2m_K^2 - m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^-}^2) + f_- (m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2)], \quad (4-4b)$$

$$\langle \pi^- \pi^0 | P_2^N | K^- \rangle = \langle \pi^- \pi^0 | P_4^N | K^- \rangle = \frac{if_\pi}{\sqrt{2}} (f_+ + f_-) (m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2),$$

ところで Fierz 変換より $(4-4c)$

$$\sum_{a=1}^8 (\bar{d} \lambda_a s)_L (\bar{u} \lambda_a u)_R = -(\bar{d}(1+\gamma_5)u)(\bar{u}(1-\gamma_5)s) - \frac{1}{6} (\bar{d}s)_L (\bar{u}u)_R \quad (4-5)$$

である。また $\bar{d} \gamma_5 u = -\left(\frac{i}{m_d + m_u}\right) \partial_\mu \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 u$,

$\bar{d} u = -\left(\frac{i}{m_d - m_u}\right) \partial_\mu \bar{d} \gamma_\mu u$ を用いると

$$\langle \pi^- \pi^0 | P_6^N | K^- \rangle = \frac{im_\pi^2}{2\sqrt{2} m_d (m_u - m_s)} f_\pi (f_+ + f_-) (m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2) \quad (4-6)$$

を得る。

(2-4)によれば(3-20)において $A_{cs} \gg A_{ts}$ と置いてよいから、(4-4), (4-6)と $m_{\pi^0} = m_{\pi^-}$ を用いて

$$\langle \pi^- \pi^0 | H_w^{eff} (\Delta S = -1) | K^- \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \times 0.6129 A_{cs} \times \sqrt{2} M_K, \quad (4-7)$$

ここで

$$M_K = f_\pi [f_+ (m_K^2 - m_\pi^2) + f_- m_\pi^2]. \quad (4-8)$$

同様にして

$$\begin{aligned} & \langle \pi^+ \pi^- | H_w^{eff} (\Delta S = -1) | \bar{K}^0 \rangle \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} A_{cs} \times (3.1475 - 0.1523 \times \frac{m_\pi^2}{m_u(m_u - m_s)}) M_K \end{aligned} \quad (4-9)$$

を得る。 $m_u = 5 \times 10^{-3}$ [GeV], $m_s = 0.175$ [GeV], $m_\pi = 0.139$ [GeV] を代入すると

$$-0.1523 \times \frac{m_\pi^2}{m_u(m_u - m_s)} = 3.461 \quad (4-10)$$

になる。従って

$$\frac{\langle \pi^- \pi^0 | H_w^{eff} (\Delta S = -1) | K^- \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H_w^{eff} (\Delta S = -1) | \bar{K}^0 \rangle} \approx 0.131 \quad (4-11)$$

を得る。

$D \rightarrow \pi \pi$ に対して

$$\langle \pi^+ \pi^0 | H_w^{eff} (\Delta C = -1) | D^+ \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} (0.3615 A_s + 0.0602 A_b) \times (-\frac{1}{\sqrt{2}} M_D), \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} & \langle \pi^+ \pi^- | H_w^{eff} (\Delta C = -1) | D^0 \rangle \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left[1.3182 A_s + A_b \left\{ 0.9365 - 0.0547 \times \frac{m_\pi^2}{2m_u(m_u - m_c)} \right\} \right] M_D \end{aligned} \quad (4-13)$$

となることがわかる。

ここで

$$M_D = f_\pi [f_+ (m_D^2 - m_\pi^2) + f_- m_\pi^2] \quad (4-14)$$

である。

(2-4)より $A_s \gg A_b$ としてよいから (4-12), (4-13) より

$$\frac{\langle \pi^+ \pi^0 | H_w^{eff} (\Delta C = -1) | D^+ \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H_w^{eff} (\Delta C = -1) | D^0 \rangle} \doteq -0.194 \quad (4-15)$$

を得る。

また $B \rightarrow \pi \pi$ に対しては

$$\langle \pi^- \pi^0 | H_w^{eff} (\Delta B = -1) | B^- \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \times 0.412 (A_c + A_t) \times \sqrt{2} M_B, \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned} & \langle \pi^+ \pi^- | H_w^{eff} (\Delta B = -1) | B^0 \rangle \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left[0.9485 A_c + A_t \left(1.0568 - 0.0565 \times \frac{m_\pi^2}{(m_d + m_u)(m_u - m_b)} \right) \right] M_B \end{aligned} \quad (4-17)$$

ここで

$$M_B = f_\pi [f_+ (m_b^2 - m_\pi^2) + f_- m_\pi^2] \quad (4-18)$$

である。

$m_d \doteq 7 \times 10^{-3}$ [GeV], $m_u \doteq 5 \times 10^{-3}$ [GeV], $m_b \doteq 4.5$ [GeV], $m_\pi = 0.139$ [GeV], また (2-4) より $A_t / A_c = 0.0722 \sim 3.531$ を用いると

$$\frac{\langle \pi^- \pi^0 | H_W^{eff} (\Delta B = -1) | B^- \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H_W^{eff} (\Delta B = -1) | B^0 \rangle} = \begin{cases} 0.609 & (A_t/A_c = 0.0722) \\ 0.557 & (A_t/A_c = 3.531) \end{cases} \quad (4-19)$$

を得る。

5. 結果と考察

QCD補正をされた effective な Hamiltonian では $\Delta I = 1/2$ operator の係数は大きくなり $\Delta I = 3/2$ operators の係数がやや小さくなっていることがわかる。(3-20)の P_4^N と P_3^N の係数、(3-22)の Q_- と Q_+ の係数、(3-25)の W_- と W_+ の係数がそれを示している。

実際の崩壊振幅の計算では(4-7)や(4-9)を用いるのでその係数の比がそのまま測定値と比較できるのではない。さらに重要なことは effective Hamiltonian に $(V-A) \otimes (V+A)$ の時空構造をもつ operator が登場していることである。この存在は崩壊振幅を計算するとき分母に quark の質量を引き出す効果をもっている。 $K \rightarrow \pi \pi$ では(4-10)から分かるように大きな値を持つことが期待される。(2-1)と比較するために $|K_s^0\rangle = (|K^+\rangle - |K^-\rangle)/\sqrt{2}$ と(4-11)を用いると

$$\frac{\Gamma(K^- \rightarrow \pi^- \pi^0)}{\Gamma(K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx 8.6 \times 10^{-3} \quad (5-1)$$

を得る。(2-1)の実験値より約4倍大きいが、その傾向は示された。しかし、この値は参考文献4) より大きく改善されたとはいえない。

(4-15), (4-19) より

$$\frac{\Gamma(D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx 0.04, \quad (5-2)$$

$$\frac{\Gamma(B^- \rightarrow \pi^- \pi^0)}{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx 0.3 \sim 0.4 \quad (5-3)$$

が得られる。(5-2), (5-3)が(5-1)と同程度、それ以上に実験値と一致すれば、QCD補正の重要性が強く示唆されることになるから今後の $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$, $B \rightarrow \pi \pi$ の分岐比の測定が期待される。これから課題としては(5-1)を4倍小さくすること、effective Hamiltonian に基づいて他の現象を調べることである。

参考文献

- 1) M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- 2) Particle Data Group, Phys. Lett. **B204**, 1(1988).
- 3) M. K. Gaillard and B. W. Lee, Phys. Rev. Lett. **33**, 108(1974). G. Altarelli and L. Maiani, Phys. Lett. **52B**, 351(1974).
- 4) M.A.Shifman,A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B120**, 316(1977).
- 5) F. J. Gilman and M. B. Wise, Phys. Rev. **D20**, 2392(1979).
- 6) T. Hayashi, T. Karino, K. Ohya and T. Oka, Prog. Theor. Phys. **63**, 1761(1980). T. Karino, K. Ohya and T. Oka, Prog. Theor. Phys. **65**, 693(1981).
- 7) K. G. Wilson, Phys. Rev. **179**, 1499(1969).
- 8) T. Appelquist and J. Carrazione, Phys. Rev. **D11**, 2856(1975).

A. 付 錄

(3-19)における A_{μ} , A_{ν} は次式で与えられる。

$$A_{\mu} = \begin{bmatrix} 0.3172 & 1 & 0 & 0 & -0.1467 & 0.4624 \\ -0.4476 & 1 & 0 & 0 & 0.1139 & 0.2545 \\ -0.2222 & -0.3333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2892 & 0.2473 & 0 & 0 & 1 & -0.8549 \\ 0.1117 & -0.5426 & 0 & 0 & 0.2059 & 1 \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

$$A_{\nu} = \begin{bmatrix} 0.3721 & 1 & 0 & 0 & -0.1493 & 0.4012 \\ -0.3829 & 1 & 0 & 0 & 0.0537 & 0.1401 \\ -0.2667 & -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.2266 & 0.1891 & 0 & 0 & 1 & -0.8346 \\ 0.0895 & -0.4467 & 0 & 0 & 0.2003 & 1 \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

(3-19)における P^{μ} は $P_1^{\mu} \sim P_6^{\mu}$ を成分とする列ベクトルである。

$K^{\mu} = \alpha_3(m_c)/\alpha_3(m_b)$, $K^{\nu} = \alpha_4(\mu)/\alpha_4(m_c)$ に対して, K^{μ} は $(K^{\mu})^{y_i/2\beta_0^{\mu}}$
($i=1 \sim 6$)を対角要素とする 6×6 の対角行列, K^{ν} は $(K^{\nu})^{z_i/2\beta_0^{\nu}}$ ($i=1 \sim 6$)を対角要素とする 6×6 対角行列である。また y_i , z_i の値は

$$y_1 = -8.4081, y_2 = 5.9571, y_3 = -4, y_4 = 8, \quad (A-3) \\ y_5 = -2.2798, y_6 = 12.9530,$$

$$z_1 = -7.1661, z_2 = 6.9649, z_3 = -4, z_4 = 8, \quad (A-4) \\ z_5 = -2.2256, z_6 = 13.3157$$

である。

$\Delta I = 1/2$ Rule in Nonleptonic Decays of K, D, B Mesons

Tutomu KARINO

Faculty of Liberal Arts and Science

Okayama University of Science

1-1 Ridaicho, Okayama 700 Japan

(Received September 30, 1989)

Strong interaction corrections to the non-leptonic weak interaction Hamiltonian are calculated using quantum chromodynamics in the six quark standard model. It is investigated that the resulting effective Hamiltonians are responsible for the $\Delta I = 1/2$ rule in K, D, B decay.