

# 熱方程式に対するある時間離散化法の定式化

アブドーラシット\*・仁木 淑\*\*・榎原道夫\*\*

\*岡山理科大学大学院応用数学専攻博士課程

\*\*岡山理科大学大学院理学部応用数学科

(1989年9月30日 受理)

## 1. まえがき

放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L u \quad \text{in } \Omega \times (0, T] \quad (1.1)$$

は非定常熱伝導問題、流体問題などに現れる重要な方程式である。ここで $L$ は2階の楕円型偏微分作用素である。 $\Omega$ は有界開領域で十分に滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つと仮定する。方程式(1.1)に対する初期一境界値混合問題が種々の分野における応用問題として現れる。特に複雑な形状領域において問題が与えられた場合、厳密解を得ることは非常に困難である。そのため、与えられた問題に対する近似解を得るための手法の開発が要求される。(1.1)の離散化手法として差分法が古くから適用されている。しかしながら実際の計算においてはいくつかの問題が生ずる。例えば移流拡散方程式のように作用素 $L$ のなかに空間について1階の偏微分項を含む場合、その離散式の安定性は格子ペクレ数と呼ばれる無次元量に依存する<sup>1)</sup>。そのため安定性を確保するための種々の工夫がなされている。例えば一つの方法として上流法がある。しかしその方法は精度の点において問題を残している。また時間方向の離散化に対しても問題が存在する。時間方向の離散化は陽解法と陰解法の二つの方法に大別される。陽解法の長所は計算過程は簡単であるが、時間刻み幅が区間刻み幅に比較して大きくなると、誤差が拡大されて解の精度が悪化する欠点がある。一方、陰解法は線形方程式の解を必要とするが無条件に安定な解法である。

偏微分方程式の数値解を求めるには安定性と収束性が保証された差分方程式を用いることが必要である。そして、安定性と収束性が満たされるような条件のもとに、時間の刻み幅と空間格子間隔を小さくすることによって、数値解はもとの偏微分方程式の解に漸近する。

ここでは取り上げる問題は(1.1)の一番単純な例熱伝導問題

$$u_t = a u_{xx} \quad \text{in } (0, 1) \times (0, T] \quad (1.2)$$

である。そこで、 $a$ は一定の熱伝導率であり、 $u(x, t)$ はある参照点からの距離 $x$ と時

間  $t$  での温度である。初期と境界条件は次のようである、

$$u(x, 0) = u(0) \quad \text{in } (0, 1) \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (1.4)$$

ここで、 $u(0)$  は既知関数である。(1.2)を解くために(1.2)の空間微分項に対して中心差分法を適用すると半離散系

$$\frac{du}{dt} = (a/h^2) Au \quad (1.5)$$

が得られる。ここで  $A$  は三重対角行列

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

である。 $h$  ( $h = 1/N$ :  $N$  は分割数) は空間刻み幅である。簡単のため  $a = 1$  と置く。この論文では半離散系(1.5)の係数行列  $A$  を分解することによって、方程式を部分的に考察して、無条件に安定で高精度の解が得られる陽解法を提案する。定式化は半群の Trotta 積表現を基礎としている。そして提案した方法が無条件に安定であることを証明する。

## 2. 局所 Crank-Nicolson 法の定式化

半離散系(1.5)の初期値  $u(0)$  に対しての解は

$$u(t) = \exp [t(1/h^2) A] u(0) \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで行列の指數関数は

$$\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots \quad (2.2)$$

または

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{n} \right)^n \quad (2.3)$$

により定義される。作用素  $A$  が有界であれば(2.2)の右辺は収束する。

半離散系(1.5)の解を(2.1)の形で表現したとき、半離散系(1.5)に対する近似解法は  $\exp[t(1/h^2)A]$  を近似行列関数で置き換えることにより得られる。例えば陽解法、陰解法、Crank-Nicolson 法などに対する  $\exp[t(1/h^2)A]$  の近似式は以下のようになる。(1.5)に対して陽解法を適用した場合、(1.5)の差分方程式は

$$v^{n+1} = [I + (k/h^2)A]v^n \quad (2.4)$$

となる。ここで  $k$  は時間刻み幅である。式(2.4)より

$$\exp[t(1/h^2)A] \doteq [I + (k/h^2)A]^m \quad (2.5)$$

となる。ただし  $t = m k$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) である。上と同じように(1.5)に対して、陰解法

$$v^{n+1} - (k/h^2)A v^{n+1} = v^n$$

を適用した場合は

$$\exp[t(1/h^2)A] \doteq \{[I - (k/h^2)A]^{-1}\}^m \quad (2.6)$$

となり、Crank-Nicolson 法

$$v^{n+1} - [k/(2h^2)]A v^{n+1} = v^n + [k/(2h^2)]A v^n$$

を適用した場合は

$$\exp[t(1/h^2)A] \doteq \{[I - (k/(2h^2))A]^{-1} [I + (k/(2h^2))A]\}^m \quad (2.7)$$

と近似できる。ここで行列の指數関数に関するいくつかの予備知識が示される。

もし  $A, B$  が可換ならば

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

が成立する。一般には  $AB \neq BA$  である。そのような場合についても以下の補題が成立する。ここで (1.5) の行列  $A$  は  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  の形に表現可能と仮定する。そのとき以下の補題が知られている。

### 補題 2.1 (Trotta 積):

各  $i$  に対して作用素  $A_i$  が有界であれば

$$\exp(tA) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \prod_{i=1}^n \exp(tA_i/m) \right]^m \quad (2.8)$$

となる。ただし、 $m = 1, 2, 3, \dots$  ; である。

補題 2.1 より、任意の  $M$  ( $m \leq M$ ) に対して (2.8) は次式のように近似することが可能である。

$$\exp(tA) \approx \left[ \prod_{i=1}^n \exp(tA_i/M) \right]^M \quad (2.9)$$

この補題より局所 Crank-Nicolson 法の定式化を示す。はじめに  $\exp[t(1/h^2)A]$  の近似を行うことにする。ここで  $A$  として (1.6) を用い、次のように分解して  $A_i$  を決める。すなわち、

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & 1 & j \ (j=2,3,\dots,n-2) \\ & & 1 & -1 & j+1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 1 \\ & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

である。このような分解に対して(2.9)を適用することにより

$$\exp[(t/h^2)A] \doteq \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \exp[(t/(Mh^2))A_i] \right\}^M \quad (2.11)$$

が得られる。ここで式(2.11)の  $\exp[(t/(Mh^2))A_i]$  をそれぞれ Crank-Nicolson 法で近似する。各々の  $i$  に対して

$$\exp[(t/(Mh^2))A_i] \doteq [I - (t/(2Mh^2))A_i]^{-1} [I + (t/(2Mh^2))A_i] \quad (2.12)$$

と近似できるため(2.11)は

$$\exp[(t/h^2)A] \doteq \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} [I - (t/(2Mh^2))A_i]^{-1} [I + (t/(2Mh^2))A_i] \right\}^M \quad (2.13)$$

となる。(2.13)を(2.1)に代入すると

$$\bar{U}(Mk) = \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} [I - (k/(2h^2))A_i]^{-1} [I + (k/(2h^2))A_i] \right\}^M u(0) \quad (2.14)$$

が得られる。これは(1.5)に対する一つの差分スキームである。ここで(2.14)を局所 Crank-Nicolson 法と名付けることにする。次節でこの差分スキームの安定条件について考察する。

### 3. 安定性解析

何らかの方法で、考察している微分方程式の数値解を求める場合には、得られた数値解は微分方程式の良い近似解になっていることが望まれる。ここで Lax の同等定理 “初期値問題が適切で、差分方程式が適合条件を満たし、かつ安定でなければならない” が知られている。そこで、まず導入された差分スキーム(2.14)の安定性を調べる。

**定理 3.1**

行列  $A$  は  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  の形に表現可能と仮定する。ここで  $A_i$  はそれぞれ半正定値行列であると仮定する。差分スキームの係数行列  $A$  が対称、かつ  $(-A)$  が正定値であれば局所 Crank-Nicolson 法は無条件に安定である。

証明：まず  $A_i$  を対称で、かつ  $(-A_i)$  が正定値になるように行列  $A$  を分解する。

従って  $A_i$  の固有値を  $\lambda_i$  と置くならば  $\lambda_i \leq 0$  となる。ここで(2.12)の係数行列の固有値を  $\eta_i$  と置くと(2.12)の固有値は

$$\eta_i = \frac{[1 + (k/(2h^2))\lambda_i]}{[1 - (k/(2h^2))\lambda_i]} \quad (3.1)$$

となる。ここで簡単のため  $(k/(2h^2))\lambda_i = -x$  と置くと、 $x \geq 0$  であるから

$$|(1-x)/(1+x)| \leq 1$$

となる。これより  $|\eta_i| \leq 1$  となる。(2.14)の固有値が  $(\eta_i)^m$  であるから

$$|(\eta_i)^m| \leq 1$$

となる。それ故に von Neumann による安定性の定義からこの差分スキームが無条件に安定であることが分る。この定理の応用として次の簡単な例がある。

**例題：**

局所 Crank-Nicolson 法は熱伝導問題に対して無条件安定である。

まず、(2.10)の各行列の固有値を求める。

$A_1$  の固有値は

$$\lambda_{11} = (-3 + \sqrt{5})/2, \quad \lambda_{12} = (-3 - \sqrt{5})/2, \quad \lambda_{1j} = 0 \quad (n-2 \text{ 乗根}),$$

$A_n$  の固有値は

$$\lambda_{n1} = (-3 + \sqrt{5})/2, \quad \lambda_{n2} = (-3 - \sqrt{5})/2, \quad \lambda_{nj} = 0 \quad (n-2 \text{ 乗根}),$$

$A_i$  の固有値は

$$\lambda_{i1} = -2, \quad \lambda_{it} = 0 \quad (n-1 \text{ 乗根}) \text{ である。}$$

ここで  $j = 3, 4, \dots, n$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-2$ ,  $t = 2, 3, \dots, n-2$  である。

それで(2.12)の固有値を  $\eta_i$  と置くと

$$\eta_i = \frac{[1 + (k/(2h^2))\lambda_i]}{[1 - (k/(2h^2))\lambda_i]}$$

である。 $\lambda_i \leq 0$  であることが以上の計算より明らかであるから  $|\eta_i| \leq 1$  となる。

これより(2.14)の係数行列の固有値の絶対値は

$$|\{\eta_i\}^M| \leq 1$$

となる。それ故に von-Neumann による安定性の定義からこの差分スキームが無条件に安定である。すなわち局所 Crank-Nicolson 法は問題(1.1)に対して無条件に安定であることが分る。

以上の考察によって差分スキームが安定であることが明らかになった。次に差分スキーム(2.14)の適合条件について考察する。 $u(t)$  を(1.1)の滑らかな解と仮定して、(2.14)に代入すると

$$u(Mk) = \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} [I - (k/(2h^2)) A_i]^{-1} [I + (k/(2h^2)) A_i] \right\}^M u(0)$$

となる。ここで  $t = m k$  であるから上式の  $k \rightarrow 0$  ときの極限は

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n-1} [I - (k/(2h^2)) A_i]^{-1} [I + (k/(2h^2)) A_i] \right\}^M \rightarrow I$$

であるから、

$$u(t) \rightarrow u(0)$$

となる。このことが提案した差分スキームが適合条件を満足していることを示す。本論文で取り上げた問題は熱伝導問題であるから初期値問題は適切である。以上の考察結果から局所 Crank-Nicolson 法は Lax の同等定理の条件を満足している。

#### 4. 結 言

本研究において、与えられた熱伝導問題の空間微分項に対して差分法を適用し、得られた半離散系の係数行列を分解することによって、方程式を部分的に考察することにより熱伝導問題に対して局所 Crank-Nicolson 法を定式化した。この定式化された方法は陽解法であり、かつ安定な解法であることが理論的に明らかにした。

#### 参 考 文 献

- 1) P.J.Roache (高橋亮一他訳) ; 流体力学, 構成計画研究所 1978.
- 2) 矢島信男他 ; 発展方程式の数値解析, 岩波書店 1977.

## New fractional step method in solving the heat equation

Abdurashit ABUDUWALI \*

Hiroshi NIKI \*\*

Michio SAKAKIHARA \*\*

\**Department of Applied Mathematics, the Graduate School of Science,  
Okayama University of Science.*

\*\**The Department of Applied Mathematics,  
Okayama University of Science.  
1-1 Ridaicho, Okayama 700 Japan*

(Received September 30, 1989)

A numerical method in solving a heat equation is presented in this report. Although the present method is a sort of methods of fractional steps, it takes a different decomposition from the other methods in which the decompostion consists of sub-matrices of its original one. We consider the present method for the one-dimensional semi-discretized heat equation and prove the convergence and stability theorems of the scheme. As a consequence, it is shown that the present method is an unconditionally stable numerical scheme for solving parabolic equations.