場の量子論の欠陥

溝　内　正　義

岡山理科大学教養部自然系

昭和63年9月30日　受理

本稿の目的は，前号の本誌で再定義されたS行列を適用して，自由なfermi粒子のself energyを計算することである*。前号でのべたことから，摂動2次の場合のS行列は，

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\iint d^4x_1\, d^4x_2 \times 2T\Big[N(\bar{\Psi}(x_1)\not{A}(x_1)\Psi(x_1)) \\ \times N(\bar{\Psi}(x_2)\not{A}(x_2)\Psi(x_2))\Big] \tag{1}$$

の2 T [-----------] に対して，修正されたWickの定理を適用することによりあたえられる。すなわち，2 T [-----------] を N (-----------) $+N'$ (-----------) で展開し，N (-----------) の項だけをとりだすことによりあたえられる。この展開式をうるためには，すこしめんどうな，ながい計算を実行しなければならないが，そうしてえられた式からさらに，自由なfermi粒子のself energyの項だけをpick upすると，次式がえられる。

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\iint dx_1 dx_2 N\Big\{\bar{\Psi}(x_1)\times\Big[\not{A}(x_1)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\not{A}(x_2) \\ +\not{A}(x_1)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\not{A}(x_2)\Big]\times\Psi(x_2)\Big\} \tag{2}$$

この式の右辺に代入するべき諸関数は，以下にしるすとおりである。前号のものと同じnotationをもちいて，始状態$|i>$，終状態$|f>$をそれぞれ

$$|i> = |f> = c_r^+(p)|o>$$

とし，外線の関数は，

$$\Psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{p_0=E(p)} d^3p\left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2}\times\sum_{r=1}^{2} c_r(p)u^{(r)}(p)e^{-ipx}$$

$$\bar{\Psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{p_0=E(p)} d^3p\left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2}\times\sum_{r=1}^{2} c_r^+(p)\bar{u}^{(r)}(p)e^{ipx}$$

とする。つぎに，各propagatorの関数は，

---

* ただし，もっとも簡単な場合にかぎる。

$$\underbracket{A_\mu(x_1)A}_\nu(x_2) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{k^2+i\epsilon}e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$\overbracket{A_\mu(x_1)A}_\nu(x_2) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{k^2-i\epsilon'}e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$\underbracket{\Psi(x_1)\bar{\Psi}}(x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2+i\epsilon}e^{-iq(x_1-x_2)}$$

$$\overbracket{\Psi(x_1)\bar{\Psi}}(x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2-i\epsilon'}e^{-iq(x_1-x_2)}$$

である。ここで,分毎に,$+i\epsilon$, $-i\epsilon'$ のついている関数の k_0(又は q_0)平面での積分の contour C_F, C'_Fは,それぞれ下図のとおりである。

(ただし,$\underbracket{A\ (x_1)\ B}\ (x_2)$, $\overbracket{A\ (x_1)\ B}\ (x_2)$ の定義については,前号の本誌に記載されてある。)

したがって,式(2)の右辺第1項に関するS行列要素,$< f|S^{(2)}|i >$ をもとめると,

$$< f|S^{(2)}|i > = -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{E(p)}\delta^{(4)}(o)\,\bar{u}^{(r)}(p)$$
$$\times\int d^4k\frac{-\not{p}+\not{k}+2m}{(p-k)^2-m^2-i\epsilon'}\frac{1}{k^2+i\epsilon}u^{(r)}(p).$$

つぎに,loop の関数を,

$$\Sigma = \int d^4k\frac{-\not{p}+\not{k}+2m}{(p-k)^2-m^2-i\epsilon'}\frac{1}{k^2+i\epsilon}.$$

として,分毎を平方化すると,

$$\Sigma = \int_0^1 dx\,(1+x)\int d^4q\frac{1}{\left[q^2-m^2x^2+i\epsilon\left(1-\frac{\epsilon+\epsilon'}{\epsilon}x\right)\right]^2}.$$

ただし,$q \equiv k-px$ である。

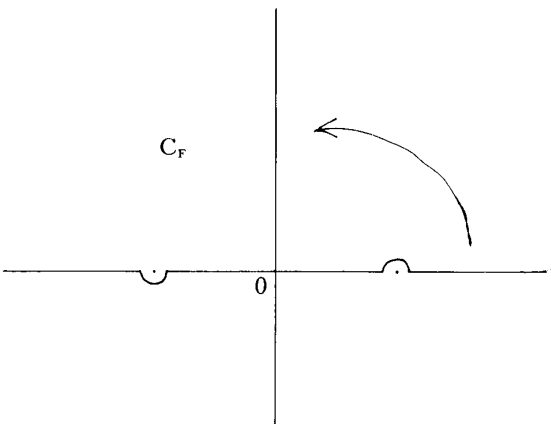

図1 Wick rotation

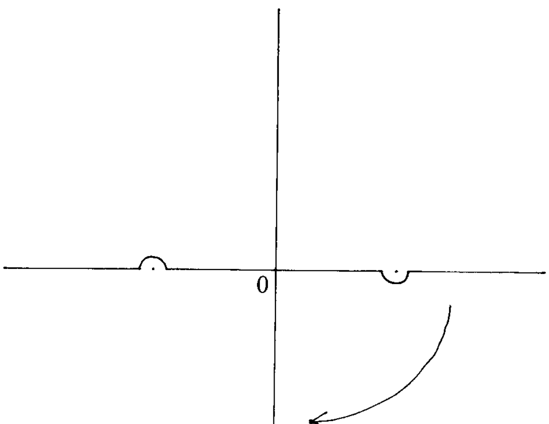

図2 Reciprocal Wick rotation

したがって，q_0-積分の contour は，x-dependent になり，$x=\epsilon/(\epsilon+\epsilon')\equiv\chi$ をさかいめとして，$x<\chi$ ならば，C_F，$\chi<x$ ならば，C'_F になる。

したがって，q_0-積分を実行するとき，通常の仕方にしたがって，積分路を実軸上から虚数軸へと移すとき，前者の場合は，Wick rotation を行なえばよいのだが，後者の場合は，“reciprocal Wick rotation”を行なうことになる。(see figure)

このことから，$q_0=iq_4$ とすると，式(2)の右辺第1項は，

$$\lim_{\delta\to 0} i\Big[\int_0^{\kappa-\delta} dx(1+x)\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2} - \int_{\kappa+\delta}^1 dx(1+x)\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2}\Big] \tag{3}$$

となる。ただし，$q_E^2=-q^2$.

つぎに，式(2)の第2項は，第1項で，ϵ，ϵ' を，それぞれ，$-\epsilon'$，$-\epsilon$ と置き換えることによりえられる。すなわち，$\chi'=\epsilon'/(\epsilon+\epsilon')$ として，

$$\lim_{\delta\to 0} i\Big[-\int_0^{\kappa'-\delta} dx(1+x)\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2} + \int_{\kappa'+\delta}^1 dx(1+x)\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2}\Big]\cdot \tag{4}$$

したがって，式(3)，(4)の和をとると，
$\chi+\chi'=1$ だから，

$$\Sigma=2i\int_{1-\kappa}^{\kappa} dx(1+x)\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2}$$

となる。ここで，χ は，0と1の間の任意の値をとる。すなわち，Feynman parameter は，上限，下限の両方で，cut off してよいことになる。

しかも

$$\int d^3q\int dq_4\frac{1}{(q_E^2+m^2x^2)^2}$$

は，発散量であるから，Σ は不定量であり，あらゆる実数値をとりうる。したがって，これから算出される自由な fermi 粒子の self energy も完全な不定量であり，あらゆる実数値をとりうる。

以上の計算で，無限小量，ϵ，ϵ' をあたかも有限な数であるかのようにあつかったが，このような処法は，超準解析で妥当であるとされている。

計算の途中で，

$$N\Big\{\bar{\Psi}(x_1)\Big[A(x_1)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)A(x_2)+A(x_1)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)A(x_2)\Big]\Psi(x_2)\Big\}$$

のタイプの項もいくつか出て来るが，これらの項は，たがいに cancel しあう。しかし，もしそうでなかったとしても，このタイプの項は，それ自身で0であるから，消えてしまう。

vertex を多く含む loop の計算で，Feynman parameter 積分が重複してくる場合でも，どれか 1 つ積分は，上，下限が共に，自然に cut off されるはずである。このことは，あつかっている関数の振動数部交換不変性に由来することである*。

self energy の計算からわかるように，従来の理論の欠陥は，振動数部交換によってただちにえられる counter Fock space $|t>'$，reversed normal order の積，N'（------------），over contraction $\overline{A\ B}$ を等閑に付し，これらの導入を怠っていたがために，場の量子論のもっとも基本的な対称性を欠いていたところにある。

参 考 文 献

1）岡山理科大学紀要，23A（1988）53.

前号（23号 A）の訂正（2ヶ所）.

P57，下から 7 行目と 8 行目の間に，

$$2T(\varphi_1\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n)$$

を挿入して下さい。

P62，4 行目の

$$I=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\ddots & & & & & \\
 & \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & & & O & \\
\hdashline
 & O & & \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & & \\
 & & & & & \ddots
\end{array}\right]$$

を削除して下さい。

---

* このとき，技線部分に関しては，$\overline{AB}=\underline{AB}$ であることに注目する。

The Defect of Quantum Field Theory

Masayoshi MIZOUCHI
Faculty of Liberal Arts and Science,
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama City, 700 Japan
(Received September 30, 1988)

The self energy of a free fermion is calculated on the basis of the scattering amplitude which is defined in the previous article. This scattering amplitude produces the result that this self energy is not divergent quantity, but it is completely indefinite.