# 降雨強度累積時間率分布のガンマ分布近似

## —衛星通信における降雨減衰の時間率特性(2)—

入　江　浩　一

岡山理科大学工学部電子工学科

(昭和62年9月30日　受理)

## 1．まえがき

10GHz を超える高い周波数を用いる無線通信では降雨減衰が大きくなり，回線品質の時間率の規定を満たすための回線設計のマージンをいくらとればよいかが問題となる。降雨減衰そのものの実測データがそろっていることは稀なので，より広く利用できる降雨強度のデータから降雨減衰を推定することが普通おこなわれ，多くの推定法が提案されてきている。そのなかで森田和夫氏は，降雨強度分布が対数正規分布とガンマ分布との場合について，その分布のパラメータを用いて降雨減衰の累積時間率を推定する式を示している[1],[2]。対数正規分布で近似するときのパラメータの求め方はすでに報告[3],[4]したので，ここではガンマ分布で近似する実際的な方法を述べる。

## 2．ガンマ分布のパラメータの決定

降雨強度$R$の確率分布がガンマ分布であらわされる場合，$R$の確率密度関数$f(R)$は

$$f(R)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}R^{k-1}exp(-\lambda R) \tag{1}$$

で与えられる。ここに$k$，$\lambda$はそれぞれ分布の形状パラメータ，尺度パラメータであり，$\Gamma(k)$はガンマ関数である。この分布の平均値$\mu$，分散$\sigma^2$は

$$\mu=k/\lambda,\quad \sigma^2=k/\lambda^2 \tag{2}$$

であらわされる。従って分布の平均と分散とからパラメータ$k$と$\lambda$を簡単に求めることができるが，実際の分布がどの程度ガンマ分布と一致しているかがわからないまま，単に計算するとおかしなことになりうるので，この方法は好ましくない。また，実際の観測結果は累積分布の形で与えられるのが普通である。累積分布関数　$F(R_0)$は

$$F(R_0)=\int_{R_0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}R^{k-1}exp(-\lambda R)dR \tag{3}$$

であるが，ここで積分変数の変換 $\lambda R = t$ をおこなうと

$$F(R_0)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{\lambda R_0}^{\infty} t^{k-1}e^{-t}dt \tag{4}$$

$$=\Gamma(k,\ x)/\Gamma(k),\ x=\lambda R_0 \tag{5}$$

となる。$\Gamma(k, x)$ は第2種不完全ガンマ関数である。第2種不完全ガンマ関数の数値計算には第1種不完全ガンマ関数 $\gamma(k,\ x)$

$$\gamma(k,\ x)=\int_0^x t^{k-1}e^{-t}dt \tag{6}$$

$$\Gamma(k,\ x)+\gamma(k,\ x)=\Gamma(k) \tag{7}$$

の展開式

$$\gamma(k,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{(k+n)}}{n!(k+n)} \tag{8}$$

を用いるのが一般的であるが，今我々が問題にする範囲では次の近似式[5]

$$\frac{\Gamma(k,\ x)}{\Gamma(k)} \fallingdotseq \frac{ke^{-x}}{0.68+x+0.28\log x},\ k<0.1,\ x>0.03 \tag{9}$$

が利用できる。この式の精度については後に具体例で述べる。累積分布関数の数値計算はこの(9)式を使うと簡単である。

$k$ をパラメータとして，$x$ を横軸，$F$ を縦軸にいずれも対数目盛りで曲線群をまず作成する。同一尺度の両対数目盛りで書いた実際の測定された降雨強度の累積分布をこのガンマ分布の累積分布の曲線と重ねる。横軸を一致させ，横軸方向にスライドさせ，なるべく広い範囲で二つの曲線が重なるような位置を求めると，重なった曲線のパラメータから $k$ が決まり，対応する横軸の目盛りの比から $\lambda$ が決まる。この方法は，一度 $k$ をパラメータとする累積ガンマ分布の曲線群を書いておけば，近似のパラメータの値の決定と同時に，近似の範囲や精度をも直感的に評価できる利点がある。

対数正規分布の場合は，対数正規確率紙という横軸と縦軸にある特別な関数尺を用いることにより，分布を直線で表わすことができ，パラメータをこの直線の勾配と切片から決めることができたが，ガンマ分布の場合にはこのような便利な方法はないようである。

## 3．具体例

森田氏の報告[6]によると降雨強度分布をガンマ分布で近似する際のパラメータ $k$ と $\lambda$ の範囲は

$0.001<k<0.015 \qquad 0.03<\lambda<0.09$

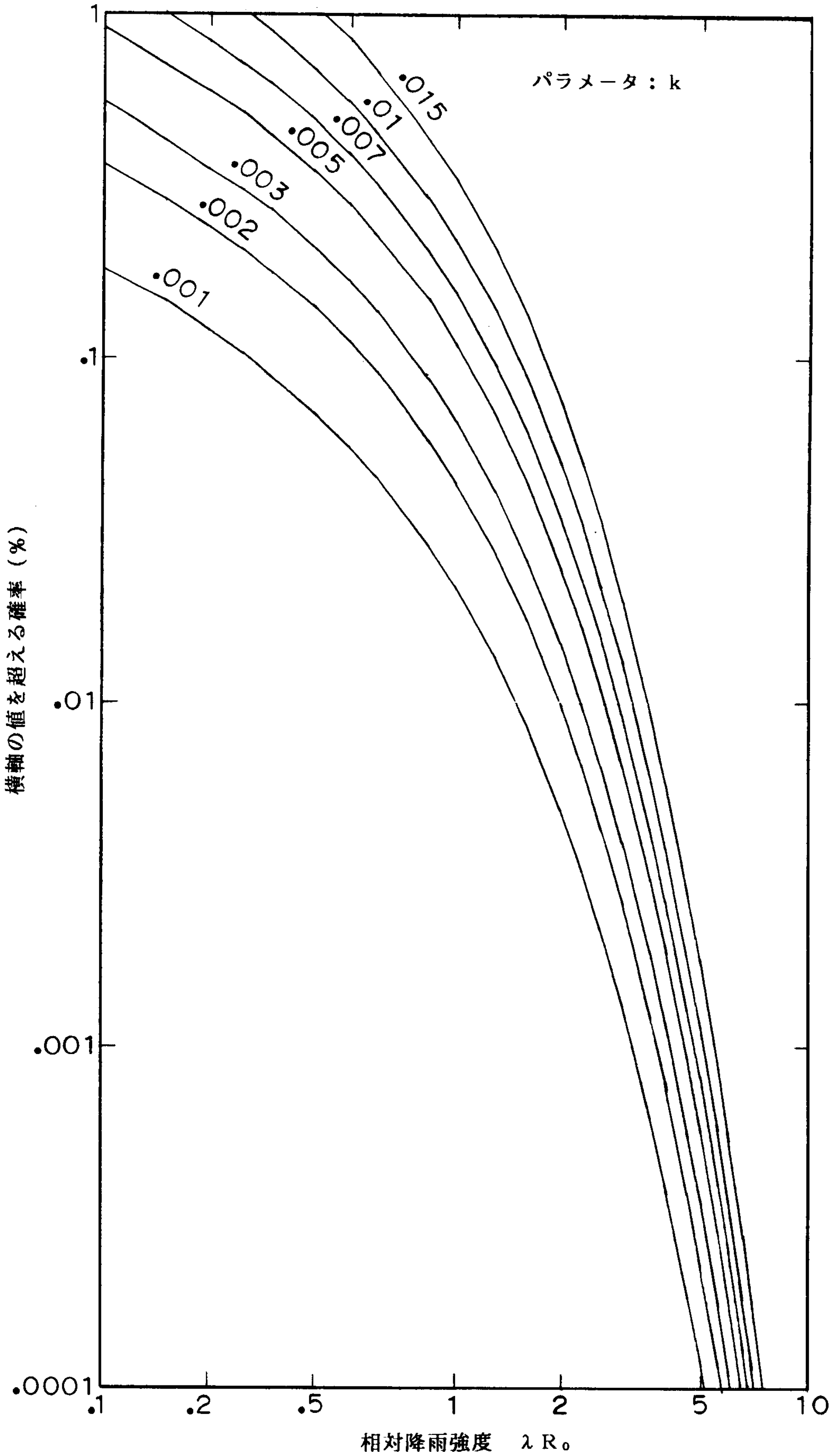


図１　ガンマ分布の累積分布曲線

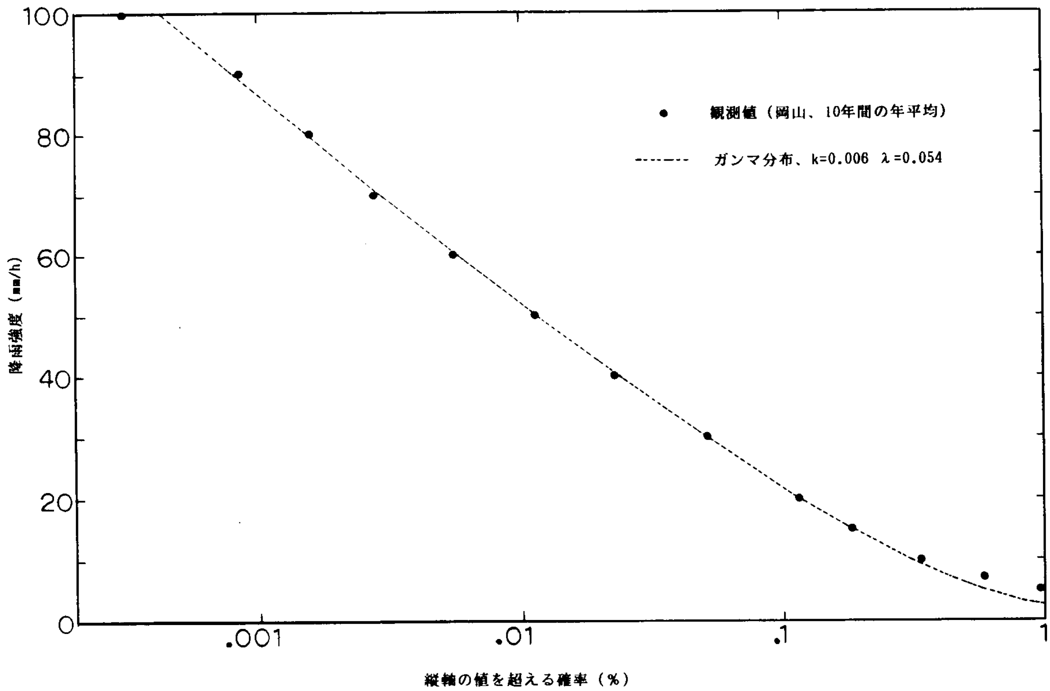


図２　降雨強度分布のガンマ分布近似（1976―1985年）

で考えればよい。また，降雨強度 $R_0$ の範囲としては

$10 < R_0 < 100$

を考えればよかろう。よって数値計算すべき $x$ の範囲は

$0.3 < x < 9$

となるが，時間率の範囲として

$0.0001\% <$ 時間率 $< 1\%$

を考える。以上により式(9)を用いて計算した $k$ をパラメータとする累積ガンマ曲線群を図１に示す。

近似式(9)の精度としては，式(9)の係数が有効数字２桁でしか与えられていないので，有効数字２桁で比較すると，示された範囲内では殆んどの場合有効数字２桁が一致しているか，せいぜい２桁目の違いが１である（誤差２％以下）ことがわかる。また，この近似式は常に正しい値よりも小さい数値を示すこともわかった。

１例として，岡山地方の10年平均の年平均降雨強度累積分布について，上記の方法で求めたガンマ分布のパラメータは $k = 0.006$, $\lambda = 0.054$ であった。$k$ の値の有効数字を増やすためには，図１で横軸を拡大してパラメータ $k$ の数値のステップを増やす必要がある。図２はこのパラメータの累積ガンマ分布と実際の降雨強度累積分布とを比較して，

近似の程度を示したものである。

ちなみに，分布のパラメータを分布の平均と分散とから(2)式を用いて求めると，$k=0.024$，$\lambda=0.085$となり，上述の結果とかなり異なる。また，ガンマ分布と合わない小さい降雨強度の範囲を除いて，10mm／h 以上のデータについて同じことをおこなうと$k=0.0052$，$\lambda=0.043$となり，かなり近い結果となる。

## 4．むすび

観測された実際の分布をガンマ分布で近似したときのガンマ分布のパラメータを求める方法は，$k$をパラメータとする曲線群と重ねてみる方法が最もよいと思われる。このためには，基準となる塁積ガンマ分布の曲線群を必要な範囲で求めておかねばならないが，これはL．Boithiasの近似式のお陰でさほどやっかいではない。本文では流用しやすいように図1はかなり大きく書いた。パラメータ$k$の値を2桁で求めたい場合は，横軸をもっと拡大してもっと多くのパラメータ$k$の曲線群を与える必要があるが，実用上はこの程度で十分と思われる。

## 参考文献

(1)森田和夫：〝衛星通信回線における伝搬特性の推定法（準ミリ波～ミリ波帯の場合）〟
通研実報，28，8　pp.1661—1676（1979）

(2)森田，樋口：〝降雨による電波の減衰量の推定に関する統計的研究〟
通研実報，19，1　pp.97—150（1970）

(3)入江浩一：〝岡山市における降雨強度確率分布〟
岡山理科大学紀要　第22号A　pp.299—304（1986）

(4)入江浩一：〝降雨強度の時間率特性〟
信学技報　vol. 1.87　No.3　A.P87—1

(5) CCIR　Rep. 1007，オリジナルはL．Boithias：“Propagation des ondes radioelectriques dans l'environnement terrestre, collection technique et scientifique des telecommusications”, 2nd edition. Editions Dunod, 1984, Paris, France

(6)森田和夫：〝降雨強度分布についての考察〟
通研技報，26，5　pp.1469—1480（1977）

# Use of Gamma Distribution to Represent Rainfall Rates

Koichi IRIE
*Department of Electronics Engineering*
*Okayama University of Science*
*Ridaicho 1-1, Okayama 700, Japan*
(Received September 30, 1987)

A practical method is described for determining the gamma distribution parameters, k and $\lambda$, with the view of representing rainfall rate distributions. The technique is based upon a group of the cumulative gamma distribution of various k with both X (relative rainfall rate) and Y (probability) axis log-scaled and an observed rainfall rate distribution drawn to the same scale. With both X-axes kept one another, the observed distribution is shifted in the X-axis direction so that it fits to one of the gamma distributions to maximum extent. Then, k is that of the overlapping gamma distribution and $\lambda$ is the ratio of the corresponding X co-ordinates. The cumulative gamma distribution is easily calculated thanks to L. Boithias' useful approximation formula. This method allows simultaneous estimation how this representation is accurate. Elaborate wrok can offer more precise value of the parameters if necessary.