# The Branching Compound Nonhomogeneous Poisson Process and its Application to a Replacement Model

植　松　康　祐*・成　久　洋　之**
*岡山理科大学　情報処理センター
**岡山理科大学　電子工学科

（昭和61年9月30日　受理）

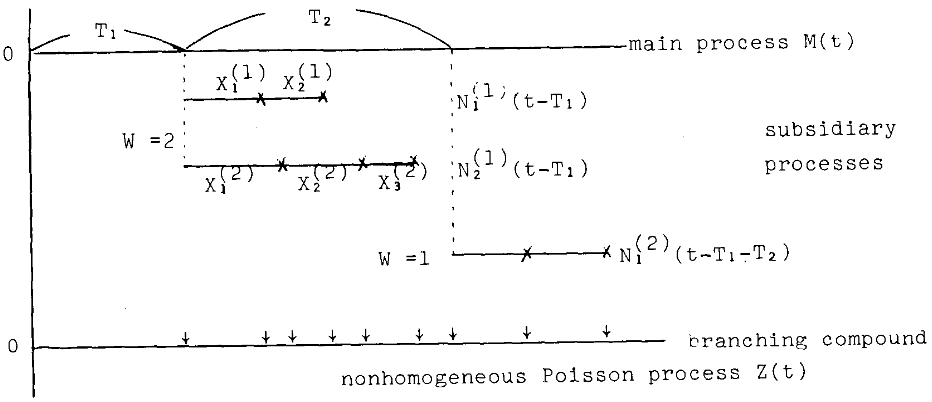
## §1．はじめに

従来から，解析が行なわれている信頼性モデルにおいて，故障時間間隔が独立で，指数分布に従うと仮定されている場合が多い。すなわち，修理時間を無視したときの故障回数を表わす counting process が homogeneous Poisson process となっている。しかし，現実には，大型コンピューターなどの故障時間間隔は，独立でもなく，指数分布でもない。すなわち，homogeneous Poisson process からのずれが生じている。そこで，W. Lewis [1] は，branching Poisson process によって，この故障パターンを記述した。ここで，我々は，このモデルを幅広く適応可能なものにするために，homogeneous Poisson process から compound nonhomogeneous Poisson process に拡張を行なった。まず，我々は，branching compound nonhomogeneous Poisson process を構成し，その process の性質を調べる。また，信頼性解析に必要な平均故障回数と区間信頼度を求めている。最後にこの応用として，修理と取替の費用を考慮したときの，単位時間当りの総費用を最小にする定期取替政策の最適化を行なう。

## §2．モデル

複雑なシステムたとえば，大型コンピューターなどの故障パターンの解析と研究を行なうに際して，故障の事象例を最も適切な確率過程によって表現することが必要となる。従来から，Poisson process によって，これらのモデルが記述されてきた。しかし，現実には，Poisson process からのずれがある。これらのずれが生じる原因は故障した素子が完全に修理されなかったり，その素子を発見することが出来なかった為に，再び故障を繰り返すためであると考えられる。システムは，多くの素子から構成されているが，システムの稼動中，すべての素子が使用されているわけではない。ある素子の故障により，システムダウンが起ったとき，直ちに修理が行なわれる。しかし，もしその素子の故障を取

り除くことに失敗したときは，比較的短い時間間隔でその故障が，取り除かれるまで，システムダウンが繰り返される。ある素子によってシステムダウンを起した初めの故障を main failure と呼び，その素子の故障を取り除くのに失敗した為に生じる付随する故障を subsidiany failure と呼ぶことにする。main failure を取り除くのに失敗する確率を r（成功する確率 1 － r），subsidiary failure を取り除くのに必要な回数をS（Sは正の整数をとる確率変数）とする。確率変数Sを与えたことは，このモデルをより適応性のあるものとしている。なぜなら，subsidiary failure を取り除く作業は，独立に行なわれるのではなく，前の情報や経験などが生かされ，取り除く確率が高くなることが，考慮できるからである。ここでは，同時に複数個の素子が故障する場合も考えている。すなわち，同時にW個（Wは正の整数をとる確率変数）の main failure が発生し，各々の main failure から subsidiary failure が，起こっている。ここで行なわれる修理は，小修理とする。小修理とは，故障時の年令と修理直後の年令が等しい修理のことで，我々は［2］において，小修理の数学的な定義を与え，小修理の回数を表わす counting process が nonhomogeneous Poisson process になることを示した。main failure（subsidiary failure）の故障回数を表わす counting process を main process M（t）（subsidiary process $N_i^{(k)}(t)$ と呼び，すべての故障回数を表わす process を branching compound nonhomogeneous Poisson process Z（t）と呼ぶことにする。我々は，ここで，main process として nonhomogeneous Poisson process を考えてよい。




## § 3．確率過程の構成

［記法］

M（t）　：　mainprocess（nonhomogeneous Poisson process）

$N_i^{(k)}(t)$ ：　k番目の main failure による i 番目の subsidiary failure の故障回数

I　　　：　main failure を取り除くことができるかできないかを表わす確率変数で，

I＝0：成功　I＝1：失敗，P［I＝0］＝1－r，P［I＝1］＝r

S : subsidiary failure を取り除くのに必要な回数を表わす確率変数 P［S＝n］＝$P_n$（n＝1，2，3……）

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n=1$$

W : 一度に何個の素子が故障するかを表わす確率変数

$T_i$ : （i－1）番目とi番目の main failure の故障時間間隔

$$P[T_1 \leqq t]=F(t)$$

X : subsidiary failure の故障時間間隔

$\{X_i\}$ は，独立同一分布 G（t）に従うものとする。

$\{T_i\}$，$\{X_i\}$，$\{I_i\}$，$\{S_i\}$，$\{W_i\}$ は互いに独立な確率変数列とする。ただし $\{T_i\}$ だけは，独立な確率変数列ではない。以上の確率変数列を用いて，確率過程Z（t）を構成する。

$$M(t)=\begin{cases} 0, & if\ 0\leqq t<T_1 \\ 1, & if\ T_1\leqq t<T_1+T_2 \\ \vdots & \quad\vdots \\ n, & if\ \sum_{i=1}^{n} T_i \leqq t<\sum_{i=1}^{n+1} T_i \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

$$\widetilde{N}(t)=\begin{cases} 0, & if\ 0\leqq t<X_1 \\ 1, & if\ \{X_1<t,\ S=1\}\,U\{X_1\leqq t<X_1+X_2,\ S>1\} \\ \vdots & \quad\vdots \\ n, & if\ \{\sum_{i=1}^{n} X_i<t,\ S=n\}\,U\{\sum_{i=1}^{n} X_i\leqq t<\sum_{i=1}^{n+1} X_i,\ S>n\} \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

$$N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j} T_k)=\begin{cases} 0, & if\{I_i^{(j)}=0\}\,U\{\sum_{k=1}^{j} T_k>t,\ I_i^{(j)}=1\} \\ \widetilde{N}(t-\sum_{k=1}^{j} T_k), & if\ \{\sum_{k=1}^{j} T_k\leqq t,\ I_i^{(j)}=1\} \end{cases}$$

$$Z(t)=M(t)+\sum_{j=1}^{M(t)}\sum_{i=1}^{Wj} N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j} T_k)$$

$M(t)$，$\widetilde{N}(t)$，$N_i^{(j)}(t)$の性質について調べてみる。このモデルで行なわれる修理は小修理であることにより，M（t）は nonhomogeneous Poisson process となる。（参考［2］）

すなわち，　$P[M(t)=n]=\dfrac{[\wedge(t)]^n}{n!}exp[-\wedge(t)]$

ただし，　$\wedge(t)=\int_0^t \lambda(u)du$，$\lambda(u)=\dfrac{f(u)}{\overline{F}(u)}$，$f(u)=\dfrac{d}{du}F(u)$，$\overline{F}(u)=1-F(u)$ ・

F（t）は連続で，任意のt＞0に対して，$F(t)<1$　とする。次に，$T_1$，$T_2$，…$T_n$

の同時密度関数を $P(t_1, \cdots t_n)$ とし，$T_1, T_2, \cdots T_n$ と $M(t)$ の同時密度関数を $P(M(t)=n\,;\,t_1, \cdots, t_n)$ とすると，

［Property Ⅰ］

$$P(t_1, \cdots, t_n)=\prod_{i=1}^{n}\lambda\left(\sum_{k=1}^{j}t_k\right)exp\left[-\wedge\left(\sum_{k=1}^{n}t_k\right)\right]$$

［Proof］

$$\begin{aligned}
&P[t_1 \leqq T_1 < t_1+\triangle t_1, \cdots, t_n \leqq T_n < t_n+\triangle t_n]\\
&=P[M(t_1)=0, M(t_1+\triangle t_1)-M(t_1)=1, M(t_1+t_2)-M(t_1+\triangle t_1)=0,\\
&\quad \cdots, M\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\triangle t_n\right)-M\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)=1]\\
&=P[M(t_1)=0]P[M(t_1+\triangle t_1)-M(t_1)=1]P[M(t_1+t_2)-M(t_1+\triangle t_1)=0]\times\\
&\quad \cdots\times P[M\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\triangle t_n\right)-M\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)=1]\\
&=e^{-\wedge(t_1)}\times[\wedge(t_1+\triangle t_1)-\wedge(t_1)]e^{-[\wedge(t_1+\triangle t_1)-\wedge(t_1)]}\times e^{-[\wedge(t_1+t_2)-\wedge(t_1+\triangle t_1)]}\times\\
&\quad \cdots\times[\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\triangle t_n\right)-\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)]e^{-[\wedge(\sum_{i=1}^{n}t_i+\triangle t_n)-\wedge(\sum_{i=1}^{n}t_i)]}\\
&=\prod_{i=1}^{n}[\wedge\left(\sum_{k=1}^{i}t_k+\triangle t_i\right)-\wedge\left(\sum_{k=1}^{i}t_k\right)]e^{-\wedge(\sum_{k=1}^{n}t_k+\triangle t_n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{max\,\triangle t_i \to 0\\ i}}\frac{P[t_1 \leqq T_1 < t_1+\triangle t_1, \cdots, t_n \leqq T_n < t_n+\triangle t_n]}{\prod_{i=1}^{n}\triangle t_i}\\
&\quad =\prod_{i=1}^{n}\lambda\left(\sum_{k=1}^{i}t_k\right)exp\left[-\wedge\left(\sum_{k=1}^{n}t_i\right)\right]
\end{aligned}$$

［Property Ⅱ］

$$P(M(t)=n\,;\,t_1, \cdots, t_n)=\prod_{i=1}^{n}\lambda\left(\sum_{k=1}^{i}t_k\right)exp[-\wedge(t)] \quad \text{ただし，} \quad t>\sum_{k=1}^{n}t_k$$

［Proof］

$$\begin{aligned}
&P[M(t)=n, T_1 \leqq t_1, \cdots, T_n \leqq t_n]\\
&=P[\sum_{i=1}^{n}T_i \leqq t < \sum_{i=1}^{n+1}T_i, T_1 \leqq t_1, \cdots, T_n \leqq t_n]\\
&=\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_1}P[T_{n+1}>t-\sum_{i=1}^{n}t_i' \mid T_1=t_1', \cdots, T_n=t_n']P(t_1', \cdots, t_n')dt_1' \cdots dt_n'\\
&=\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_1}\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i'\right)}P(t_1', \cdots, t_n')dt_1' \cdots dt_n'
\end{aligned}$$

$$P(M(t)=n\,;\,t_1,\ \cdots,\ t_n)$$
$$=\frac{\partial^n}{\partial t_1\cdots\partial t_n}P[M(t)=n,\ T_1\leqq t_1,\ \cdots,\ T_n\leqq t_n]$$
$$=\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(\sum_{i=1}^{n}t_i)}P(t_1,\ \cdots,\ t_n)=\prod_{i=1}^{n}\lambda(\sum_{k=1}^{i}t_k)\,exp[-\Lambda(t)]$$

$\widetilde{N}(t)$, $N_i^{(j)}(t)$ に関しては，定義より次のような量を求めることができる。

$$P[\widetilde{N}(t)=0]=\overline{G}(t)$$

$P[\widetilde{N}(t)=n]=P_nG(t)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P_i[G^{(n)}(t)-G^{(n+1)}(t)]$，$G^{(n)}(t)$ は，$n$ 個のたたみこみを表わす。

$$P[N_i(t)=0]=1-r+r\overline{G}(t)$$
$$P[N_i(t)=n]=rP[\widetilde{N}(t)=n]$$
$$E[N_i(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P[N_i(t)\geqq n]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}P_kG^{(i)}(t)=r\sum_{k=1}^{\infty}P_k\cdot\sum_{i=1}^{k}G^{(i)}(t)$$

[Example I]

S; geometric, $P_i=(1-P)P^{i-1}(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $X$: exponential

$$G(t)=1-e^{-ut}\qquad E[N_i(t)]=\frac{1}{1-P}[1-e^{-u(1-P)x}],$$
$$\lim_{t\to\infty}E[N_i(t)]=rE[S]=r\cdot\frac{1}{1-P}$$

## § 4．平均故障回数と区間信頼度

この章では，信頼性解析に必要な平均故障回数と区間信頼度を求める。main process に付随する subsidiary process の平均故障回数を求めるために，次のような特性関数を定義する。

$$\phi(s,\ t)=E[\,exp\{is\sum_{j=1}^{M(T)}\sum_{i=1}^{W_j}N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j}T_k)\}\,]$$

ただし，i は複素単位。

[Property III]

$$Z(t)=\Lambda(t)+E[W_1]\int_0^t\lambda(t-u)\,E[N_1^{(1)}(u)]\,du$$

$\{W_i\}$ と $\{M(t)=n,\ T_1=t_1,\ \cdots,\ T_n=t_n\}$ の独立性と Property II を用いると，

$$\phi(s,\ t)=E[E[\exp\{is\sum_{j=1}^{M(t)}\sum_{i=1}^{W_j}N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j}T_k)\}\mid M(t),\ W_i,\ \cdots,\ W_{M(t)},\ T_1,\ \cdots,\ T_{M(t)}]]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-t_1}\cdots\int_0^{t-\sum_{i=1}^{n-1}t_i}E[\exp\{is\sum_{j=1}^{M(t)}\sum_{i=1}^{W_j}N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j}T_k)$$

$$\mid M(t)=n,\ W_1=m_1,\ \cdots,\ W_n=m_n,\ T_1=t_1,\ \cdots,\ T_n=t_n]P(M(t)=n\ ;\ t_1,\ \cdots,\ t_n)$$

$$\times P[W_1=m_1]\cdots P[W_n=m_n]dt_1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-t_1}\cdots\int_0^{t-\sum_{i=1}^{n-1}t_i}E[\exp\{is\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j}N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j}t_k)\}]$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\lambda(\sum_{k=1}^{i}t_k)\exp[-\Lambda(t)]P[W_1=m_1]\cdots P[W_n=m_n]dt_n\cdots dt_1$$

ここで $\sum_{m_k=1}^{\infty}E[\exp\{isN_i^{(k)}(t-\sum_{i=1}^{k}t_i)\}]^{m_k}P[W_k=m_k]=\Phi(t-\sum_{i=1}^{k}t_i)$

とおくと，上式は次のように書ける。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-t_1}\cdots\int_0^{t-\sum_{i=1}^{n-1}t_i}\lambda(t_1)\Phi(t-t_1)\cdots\lambda(\sum_{i=1}^{n}t_i)\Phi(t-\sum_{i=1}^{n}t_i)\exp[-\Lambda(t)]dt_n\cdots dt_1$$

$$=\exp[-\Lambda(t)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[\int_0^t\lambda(t)\Phi(t-u)du]^n$$

$$=\exp[-\Lambda(t)][\exp[\int_0^t\lambda(t)\Phi(t-u)du]-1]$$

以上より

$$E[Z(t)]=E[M(t)+\sum_{j=1}^{M(t)}\sum_{i=1}^{W_j}N_i^{(j)}(t-\sum_{k=1}^{j}T_k)]$$

$$=E[M(t)]+\frac{d}{ds}\{-i\,\phi(s,t)\}\Big|_{s=0}$$

$$=\Lambda(t)+E[W_1]\int_0^t\lambda(t-u)E[N_1^{(1)}(u)]du$$

次に区間信頼度を求める。上で用いた特性関数の手法を再び用いることにより，時刻ｔとｔ＋ｘの間に main failure も subsidiary failure も起こらない確率Ｒ（ｔ；ｘ）を記述する。

Ｒ（ｔ；ｘ）を式表現すると次のようになる。

$$R(t\ ;\ x)=P[M(t+x)-M(t)=0,\ N_1^{(1)}(t+x-T_1)-N_1^{(1)}(t-T_1)=0,\ \cdots$$

$$N_{W_1}^{(1)}(t+x-T_1)-N_{W_1}^{(1)}(t-T_1)=0,\ \cdots,\ N_1^{(M(t))}(t+x-\sum_{i=1}^{M(t)}T_i)-N_1^{(M(t))}(t-\sum_{i=1}^{M(t)}T_i)=0,\ \cdots,$$

$$N_{W_{M(t)}}^{(M(t))}(t+x-\sum_{i=1}^{M(t)}T_i)-N_{W_{M(t)}}^{(M(t))}(t-\sum_{i=1}^{M(t)}T_i)=0]$$

[Property Ⅳ]

$$R(t;x)=exp[-\Lambda(x+t)+E[W_1]\int_0^t \lambda(u)Qx(t-u)du]$$

ただし，$Qx(t)=P[N_1(t+x)-N_1(t)=0]$

$$=1-r+r\overline{G}(t)+r\sum_{n=1}^{\infty}\{P_nG^{(n)}(t)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P_k\int_0^t\overline{G}(t+x-u)dG^{(n)}(u)\}$$

## § 5．取替問題

この章では，以前から議論してきたモデルの一つの応用として，取替問題を扱うことにする。システムが稼動を始めてから，T時間ごとの定期取替を行なうものとする。取替によってシステムは新品同様になる。

ただし，修理・取替には時間がかからないものとする。次のような費用を導入する。

$C_1$；故障した素子を完全に修理するのに必要な費用（小修理費用）

$C_2$；故障した素子を探すための費用（修理に失敗したときの費用）

$C_3$；取替に必要な費用

PropertyⅢの結果より単位時間当りの平均費用C（T）は次のように求まる。

$$C(T)=\frac{C_1\Lambda(t)+C_2m\int_0^T\lambda(T-u)H(u)du+C_3}{T}$$

ただし，$E[W_1]=m$，　$E[N_1^{(1)}(u)]=H(u)$

C（T）を最小にする最適な$T^*$に関して次のような結果が得られる。

[Theorem]

$\lambda$（t）が単調増加で下に凸かつ

$$\lim_{T\to\infty}\{C_1\int_0^T[\lambda(T)-\lambda(u)]du+C_2m[\lambda(o)H(T)+\int_0^T[T\lambda'(T-u)-\lambda(T-u)]H(u)du]\}>C_3$$

ならば，C（T）を最小にする最適な$T^*$が唯一存在する。

[Example Ⅱ]

$P[T_1\leqq t]=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$；Weibull distribution のとき，

$\alpha\geqq 2$ ならば，最適な$T^*$が，唯一存在する。

たとえば，$\alpha=2$のとき，$T^*$は次の方程式の解である。

$$C_1 T^2 + 2C_2 \boldsymbol{m} \int_0^T u H(u)\, du = C_3 / \lambda^2$$

[Corollary]

M (t) が homogeneous Poisson process の時,

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T [H(T) - H(u)]\, du > \frac{C_3}{\lambda C_2 \boldsymbol{m}}$$ ならば，最適なT*が唯一存在する。

[Example Ⅲ]

Sが幾何分布に従い，（$P_i = (1-P)P^{i-1}$） $X$ が指数分布に従うとき，（$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$）

Corollary の結果は，次のようになる。

$$\frac{r}{\mu(1-P)^2} > \frac{C_3}{\lambda C_2 \boldsymbol{m}}$$ ならば，最適なT*が，唯一存在する。

## 参考文献

1) A. W. Lewis: A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns, Journal of Royal Statiatic Society B, 26, 398－439 (1964).

2) K. Uematsu and T. Nishida; A replacement problem with random minimal repair cost depending on age, (Submitted to European Journal of Opera-tional Research).

3) D. Snyder: Random Point Process, John Wiley & Sons (1975).

# The Branching Compound Nonhomogeneous Poisson Process and its Application to a Replacement Model

Kouyu UEMATSU* and Hiroyuki NARIHISA**

* *Information processing Center, Okayama University of Science*
** *Department of Electronics Engineering, Okayama University of Science Ridai-cho 1 − 1, Okayama-shi 700, Japan*

(Received September 30, 1986)

**ABSTRACT**

In studying and analysing the failure patterns of complex system, plausible stochastic models are needed to represent the sequence of events. A simple and frequently model is derived by the assumption that the times-between-failures of a system are exponentially distributed and independent. Experience has shown, however, that successive times-between-failures are not exponentially distributed and not independent. These deviations are due to imperfect search of failed components. We constitute a plausible stochastic process which describes the sequence of events, and obtain the interval reliability and the expected number of failures.

As an application of these results, we deal with the replacement model where a system undergoes minimal repair before time T and is replaced at time T. We discuss the optimum policy minimizing the total expected cost per unit time.