

# 区分線形制御システムにおける分岐現象とカオスの挙動

太田 垣 博 一

岡山理科大学理学部 電子理学科

(昭和60年 9 月 26 日 受理)

## 1. 諸言

非線形性を有する制御システムにおいてある状況のもとでカオスの挙動が発生する場合があることが理論的および実験的に知られている。<sup>(1)</sup> しかしながら制御対象が非線形性を有する場合、そのシステムの振舞いを記述する数学モデルが非線形微分方程式で記述されることになるために理論的な取り扱いは一一般的に極めて困難になり、システムのパラメータのある固定された値の付近での近似的な結果しか得ることができないことが多い。そこで本研究では図 2 に示すような、非線形性要素として区分的に線形な関数で表わされている要素で構成された図 1 のようなシステムを考察の対象として、カオスの挙動の発生メカニズムや、この場合にみられるカオス現象の態様を明らかにしていく。

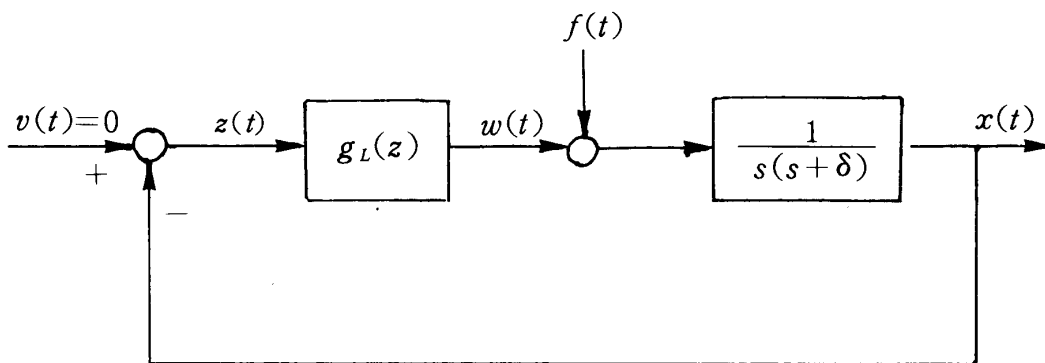


図 1. 区分線形制御システムのブロック線図

## 2. 問題の定式化

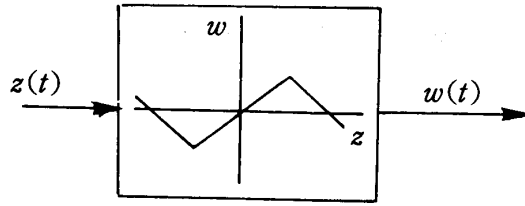
図 2 のような要素で構成されている制御システムを考える。ここで、要素  $g_L(x)$  は

$$g_L(x) = ax \quad |x| \leq x_m^+ \quad (a > 0) \quad (1-a)$$

$$g_L(x) = bx + c \quad x_m^+ < x \quad (b, c > 0) \quad (1-b)$$

$$g_L(x) = bx - c \quad x < -x_m^+ \quad (1-c)$$

のように各区分  $|x| \leq x_m^+$ ,  $x_m^+ < x$ ,  $x < -x_m^+$  において線形関数で与えられ、区分線形

図2. 区分線形要素  $g_L(z)$ 

要素とよばれるものである。式(1)の要素  $g_L(x)$  で構成された図1のようなシステムの挙動はつぎの式によって記述される：

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - g_L(x) = f(t) \quad (\cdot = \frac{d}{dt}) \quad (2)$$

すなわち、

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - ax = f(t) \quad |x| \leq x_m^+ \quad (3-a)$$

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - bx - c = f(t) \quad x_m^+ < x \quad (3-b)$$

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - bx + c = f(t) \quad x < -x_m^+ \quad (3-c)$$

ただしここで、 $\delta \geq 0$  は減衰力を表わす実のパラメータであり、 $f(t)$  は外力を意味する。以下では

$$f(t) = f \cos(\lambda t) \quad f \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad (4)$$

というような周期的な外力が印加されているときに、減衰パラメータ  $\delta$  や外力の振幅  $f$  の与えられた値に対しそのシステムがどのような振舞いをするのか、またパラメータの変動に対してどのような現象がみられるのかについて考察を進める。

### 3. 相空間における周期的解軌道とその分岐

はじめに式(3)を相空間において考察するためにつぎのように書き直しておく。 $|x| \leq x_m^+$  に対して、

$$\dot{x} = y \quad (5-a)$$

$$\dot{y} = ax - \delta y + f \cos(\lambda t) \quad (5-b)$$

$x < -x_m^+$  に対して、

$$\dot{x} = y \quad (6-a)$$

$$\dot{y} = -bx - c - \delta y + f \cos(\lambda t) \quad (6-b)$$

$x_m^+ < x$  に対して

$$\dot{x} = y \quad (7-a)$$

$$\dot{y} = -bx + c - \delta y + f \cos(\lambda t) \quad (7-b)$$

式(5), (6), (7)は相空間(相平面)  $\mathbf{R}^2$  における点  $(x, y)$  がそれぞれ領域  $D_I = \{(x, y) \mid |x| \leq x_m^+, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $D_{II-} = \{(x, y) \mid x < -x_m^+, y \in \mathbf{R}\}$ , および  $D_{II+} = \{(x, y) \mid x_m^+ < x,$

$y \in \mathbf{R}$  } に属するときの運動を記述する。この運動を調べるために、減衰力と外力を摂動項とみなして、 $\delta = \varepsilon \delta'$ ,  $f = \varepsilon f'$  と書いておく、ここで  $\varepsilon (\geq 0)$  は摂動の大きさを表わす実のパラメータである。  $\varepsilon = 0$  なるとき、式 (5), (6), (7) において  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  とすると相空間において固定  $S := (0, 0)$ , および  $C_{\pm} := (\pm c/b, 0)$  が存在することがわかる。さらにこれらの点での Jacobian を計算すると

$$J(x, y) |_{(x,y)=(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a \tag{8-a}$$

$$J(x, y) |_{(x,y)=(\pm c/b, 0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{vmatrix} = b \tag{8-b}$$

を得るので、 $S$  は鞍型固定点、 $C_{\pm}$  は中心点で、点  $S$  で固有値  $\lambda_S^{\pm} = \pm \sqrt{a}$ , 点  $C_{\pm}$  で固有値  $\lambda_C^{\pm} = \pm i\sqrt{b}$  をもつことがわかる。またこのときシステムは保存系であるから、解軌道  $(x(t), y(t))$  は領域  $D_I$  の点に対し

$$H_I(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}ax^2 \tag{9-a}$$

領域  $D_{II\pm}$  の点に対し

$$H_{II\pm}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}bx^2 \mp cx \tag{9-b}$$

で与えられる Hamiltonian  $H(x, y)$  の値 (エネルギーレベル  $h$ ) を一定とする曲線  $\Gamma$  の上を周期的に動くことがわかる (図 3)。  $\varepsilon > 0$  としたとき減衰力の存在のため解軌道の全

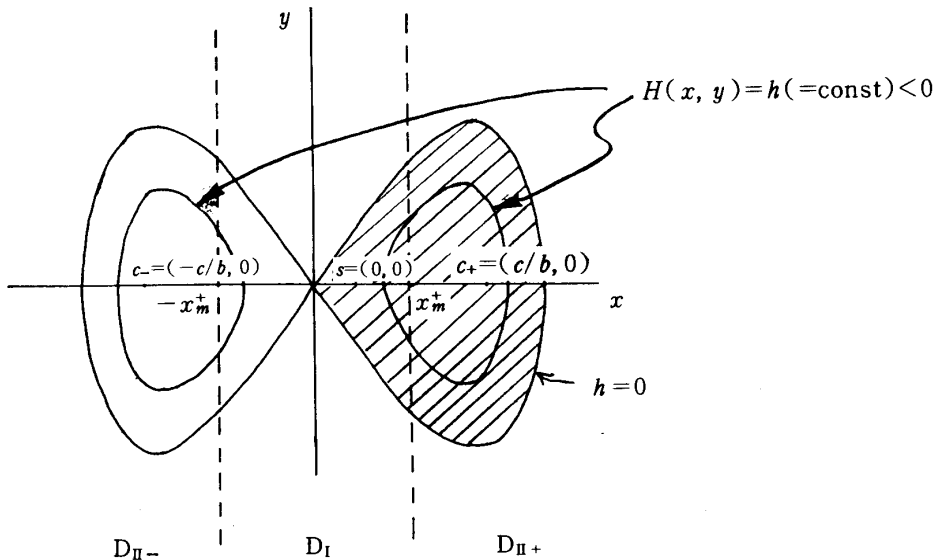


図 3.  $\varepsilon = 0$  なるときの相空間における解軌道

体は十分大きい原点の近傍に含まれると考えてよいので、以下では図 3 で斜線で示された領域にある解軌道について考えることにする。いま  $x$  軸を切る点  $(x_{0n}, 0) \in D_I$  を通過する解軌道を考える。このような解軌道  $(x(t), y(t))$  に対し、式 (9) の Hamiltonian から

$$H(x(t), y(t)) = H_I(x, y) |_{(x,y)=(x_{0n}, 0)} = -\frac{1}{2}ax_{0n}^2 \tag{10}$$

が全ての  $t$  に対し成立する。このときのエネルギーレベルを  $h_{0n}$  と書くと式 (10) からこの値は負の値をもち、 $x_{0n}$  が減少するに伴って 0 に近づくことがわかる。また、 $x_{0n}=0$  になるとき点  $(0, 0)$  は鞍点  $S$  となり  $h_{0n}=0$  である。鞍点を通る曲線はセパトリックスと呼ばれ、 $t \rightarrow \pm\infty$  で  $(x(t), y(t))$  は鞍点  $S$  へは入ることが知られている。このような解軌道は周期  $T=\infty$  をもつと考えることができるから、エネルギーレベル  $h_{0n}$  の値が負の値から 0 に近づくに従って、すなわち解軌道がセパトリックスに近づくに従ってその周期  $T$  は大きい値をとるようになることがわかる。 $\varepsilon > 0$  とした摂動が小さいときの解軌道は外力の周期  $T_1=2\pi/\lambda$  に等しい周期をもつと考えられるので、ここでは  $\varepsilon=0$  のときに存在する上述のような周期解のうち  $T_1$  の  $n$  倍の周期  $T=T_n=nT_1$  をもつものについて考察する。ただしここで  $n$  は正の整数であるが、特に断わらない限り  $n=1$  として考えてよい。また、エネルギーレベルを定める  $h_{0n}$ 、 $x$  軸を切る点の座標  $x_{0n}$  等も周期  $T_n$  に対応しているものを考える。いま、このような解軌道で、 $t=0$  において初期条件

$$x(0)=x_{0n}, \quad 0 < x_{0n} < x_m^+ \quad (11-a)$$

$$y(0)=0 \quad (11-b)$$

を満たしているものを取り挙げる。このときの解軌道  $(x(t), y(t))$  は十分小さい時刻  $t > 0$  に対し、

$$x_{In}(t)=x_{0n} \cosh(\sqrt{a}t) \quad (12-a)$$

$$y_{In}(t)=x_{0n}\sqrt{a} \sin h(\sqrt{a}t) \quad (11-b)$$

と表わされる。この解軌道が  $\{(x, y) | x=x_m^+, y \in \mathbf{R}\}$  なる軸 (図 3 参照) の上にくる時刻を  $t=t_{1n}$  とすると、

$$x_{In}(t_{1n})=x_{0n} \cosh(\sqrt{a}t_{1n})=x_m^+ \quad (12)$$

が成立するので

$$t_{1n}=\frac{1}{\sqrt{a}} \cosh^{-1}\left(\frac{x_m^+}{x_{0n}}\right) \quad (13)$$

を得、このとき式 (11-b) より

$$y_{In}(t_{1n})=x_{0n}\sqrt{a} \sin h\left(\cosh^{-1}\left(\frac{x_m^+}{x_{0n}}\right)\right) \quad (14)$$

を得る。それゆえこの解軌道は  $t > t_1$  に対しては領域  $D_{II+}$  には入り、その運動は  $\varepsilon=0$  とした式 (7) によって記述され、初期条件として  $t=t_{1n}$  で式 (12), (14) を満たすことがわかる。従って  $(x(t), y(t))$  は

$$x_{II+n}(t)=-x_m^+ \cos(\sqrt{b}(t-t_{1n})) + \frac{y_{In}(t_{1n})}{\sqrt{b}} \sin(\sqrt{b}(t-t_{1n})) + d \quad (15-a)$$

$$y_{II+n}(t)=-\sqrt{b} x_m^+ \sin(\sqrt{b}(t-t_{1n})) + y_{In}(t_{1n}) \cos(\sqrt{b}(t-t_{1n})) \quad (15-b)$$

と表わされる ( $d=c/b$ )。式 (15) の解軌道がはじめて  $x$  軸を切る時刻を  $t=t_{2n}$  とすると、

$$x_{II+n}(t_{2n})=-\sqrt{b} x_m^+ \sin(\sqrt{b}(t_{2n}-t_{1n})) + y_{In}(t_{1n}) \cos(\sqrt{b}(t_{2n}-t_{1n})) = 0 \quad (16)$$

が成立するので

$$t_{2n} = t_{1n} + \frac{1}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \left( \frac{y_1(t_{1n})}{\sqrt{b} x_m^+} \right) \quad (17)$$

を得る。さらに式 (10) を利用すると

$$y_{1n}(t_{1n}) = \sqrt{\frac{1}{2} a (x_m^+{}^2 - x_{0n}^2)} \quad (18)$$

から,  $t_{2n}$  は

$$t_{2n} = t_{1n} + \frac{1}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a}{2b} \left\{ 1 - \left( \frac{x_{0n}}{x_m^+} \right)^2 \right\}} \right) \quad (19)$$

と表わされる。それゆえ

$$\theta_{2n} = \sqrt{\frac{a}{2b} \left\{ 1 - \left( \frac{x_{0n}}{x_m^+} \right)^2 \right\}} \quad (20)$$

と書くと, 式 (15-b) より

$$x_{\text{II}+n}(t_{2n}) = x_m^+ \{ \cos(\tan^{-1}(\theta_{2n})) + \theta_{2n} \sin(\tan^{-1}(\theta_{2n})) \} + d \quad (21)$$

と書かれる。このようにして  $0 \leq t \leq t_{2n}$  に対して解軌道の表現が得られたが,  $\varepsilon = 0$  なるときには式 (5), (6), (7) に注目するとこの解軌道は  $x$  軸について対称性を有していることがわかり, 従って  $t_{2n}$  は  $T_n$  の半分に等しい。それゆえ,  $t_{2n} (= T/2) < t < T$  に対し上と同様の方法で解を接続すれば  $T_n$  を周期とする解軌道の全体が表わされたことになる。

さて, つぎにこのような  $T_n$  を周期とする (以下  $n$ -周期と呼ぶ) 解軌道が  $\varepsilon > 0$  とした摂動項の存在によってどのようになるのかについて考察する。そのために,  $\varepsilon \neq 0$  なるときの解軌道を時刻  $t$  に対し

$$x_{\varepsilon n}(t) = x_{0n}(t) + \phi(t) \quad (22-a)$$

$$y_{\varepsilon n}(t) = y_{0n}(t) + \psi(t) \quad (22-b)$$

とおく。ただしここで  $(x_{0n}(t), y_{0n}(t))$  は上で考察した,  $\varepsilon = 0$  としたときの  $n$  周期解である。また  $\dot{x}_{\varepsilon n}(t) = \dot{x}_{0n}(t)$ ,  $\dot{y}_{\varepsilon n}(t) = \dot{y}_{0n}(t)$  が成立することから,

$$\dot{\phi}(t) = \psi(t) \quad (23)$$

が成立する。式 (22), (23) を利用すると  $(\phi(t), \psi(t))$  の満たす方程式としてつぎの式を得る:

$(x_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n}) \in D_{\text{I}}$  に対して

$$\dot{\phi} = \psi \quad (24-a)$$

$$\dot{\psi} = a\phi - \delta\psi + \varepsilon [f' \cos(\lambda t) - \delta' y_{0n}(t)] \quad (24-b)$$

$(x_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n}) \in D_{\text{II}\pm}$  に対し

$$\dot{\phi} = \psi \quad (25-a)$$

$$\dot{\psi} = -b\phi - \delta\psi + \varepsilon [f' \cos(\lambda t) - \delta' y_{0n}(t)] \quad (25-b)$$

ここで  $(\phi(t), \psi(t))$  は

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |\phi|(t) \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (26-a)$$

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |\psi|(t) \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (26-b)$$

を満たし、式(22)の  $(x_{en}, y_{en})$  に対し

$$x_{en}(0) = x_{0n}(0) + \phi(0) \quad (27-a)$$

$$y_{en}(0) = y_{0n}(0) + \psi(0) = 0 \quad (27-b)$$

なる初期条件を満たしているものとする。式(26), (27)から

$$|\phi(0)| \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (28-a)$$

$$\psi(0) = 0 \quad (28-b)$$

が従う。以上のように規定される解は外力がある位相のずれをもつとき存在しうる。ここではこのずれを実のパラメータ  $\alpha$  で表わし、式(24), (25)において外力の項を

$$f\alpha(t) = \varepsilon f' \cos(\lambda(t - \alpha)) \quad (29)$$

とおき直したものを考える。このとき、Fredholm の交代理論 (alternative theory) によると、<sup>(2)</sup>

$$\ddot{\phi} + \beta\phi = \xi(t), \quad \beta \in \mathbf{R} \quad (30)$$

なる式の解  $\phi$  は  $\xi(t)$  が  $n$ -周期関数の族全体  $P_n$  に属しているとき、

$$P\xi \triangleq y_{0n}(t) \int_0^{T_n} \xi(t) y_{0n}(t) dt \cdot \eta \quad (31-a)$$

$$\eta \triangleq \int_0^{T_n} (y_{0n}(t))^2 dt \quad (31-b)$$

と定義すると

$$P\xi = 0 \quad (32)$$

が成立するならば、 $n$ -周期をもつ。それゆえ、式(24), (25)に対し  $n$ -周期軌道の存在条件は

$$P\xi(\alpha, \delta', f') \triangleq \int_0^{T_n} y_{0n}(t) [f' \cos(\lambda(t - \alpha)) - \delta' y_{0n}(t) - \delta' \psi(t)] dt = 0 \quad (33)$$

が成立することとなる。ただしここで  $\psi(t)$  は式(24), (25)で定まる、上で考えた  $n$ -周期解を生成する解  $\phi(t)$  から  $\psi(t) = \dot{\phi}(t)$  としたものである。陰関数定理によると、<sup>(2)</sup> 式(24), (25)が解  $\phi(t) = \phi(\alpha, \delta', f')$  を 0 の近傍  $U \subseteq P_n$  において  $(\delta', f') = (0, 0)$  の近傍  $V \subseteq \mathbf{R}^2$  に属す  $(\delta', f')$  と  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq T_n$ ) に対してもつことが従う。また  $\phi$  は  $(\alpha, \delta', f')$  に対して 2 階連続微分可能、すなわち  $\dot{\psi}$  が存在し  $\delta' = f' = 0$  としたとき  $\phi(\alpha, \delta', f') = 0$  が全ての  $\alpha$  に対して成立する。それゆえ、このような  $\phi$  に対する式(33)が成立するならば、そのときの  $(\alpha, \delta', f')$  に対し式(24), (25)の定める解軌道  $(x_{en}(t), y_{en}(t))$  は  $n$ -周期をもち、 $\varepsilon = 0$  のときに  $n$ -周期をもつ解軌道のつくる曲線  $\Gamma_n = \{(x_{0n}(t), y_{0n}(t))\}$  の十分小さい近傍に存在していることがいえる。

つぎに、このような  $n$ -周期軌道が壊されていく様子について考察を進める。そのために、式(33)は、パラメータ空間  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$  における  $(\alpha, \delta', f')$  を  $\mathbf{R}$  に写す写像  $P\xi$  を定めているものと考えられる。このとき、 $P\xi = 0$  はパラメータ空間において一般に曲面をつくると考えられる。それゆえこの曲面をつき抜けて通ると  $P\xi \neq 0$  となって、 $n$ -周期解はこわされて存在しなくなり、ここで考えているシステムに対しては後に示す数値実験から  $n' (> n)$ -周期解が現われてくることが確認される。これは  $n$ -周期解から  $n'$ -周期解へ

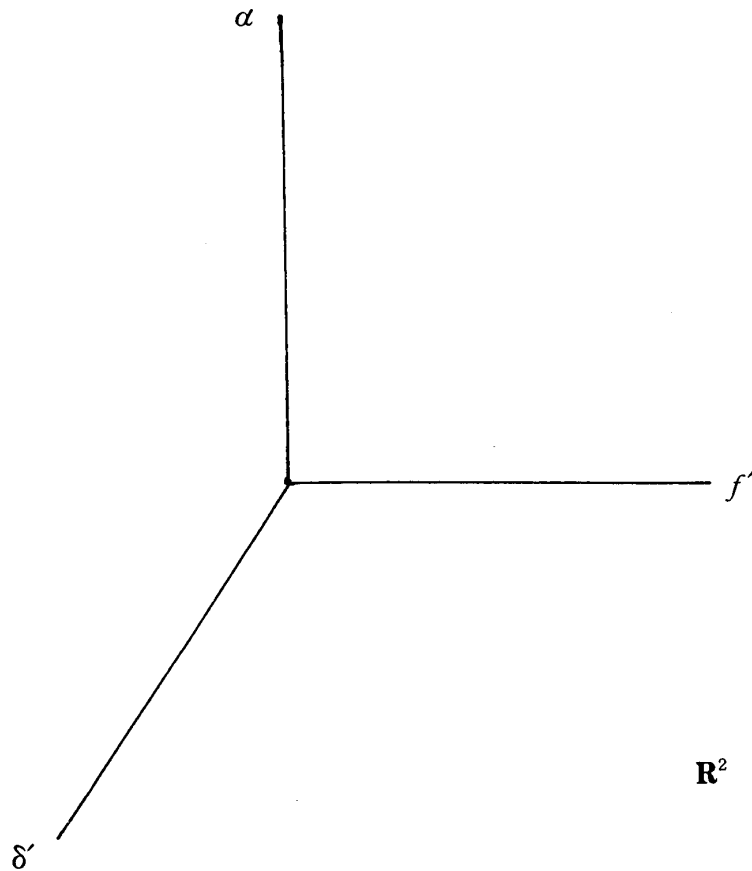


図4. パラメータ空間  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$

の劣調和分岐現象が起こったことをみせている。  $P\varepsilon=0$  のつくるパラメータ空間での曲面上の点の集合を分岐集合と呼ぶ。 またここでは式(33)を分岐方程式と呼ぶことにする。 以上の考察から、式(33)で積分は周期  $T_n$  上であれば成立することに注意すると、分岐の発生を定める式として

$$\Delta_n(\alpha, \delta', f') \triangleq \int_{T_n/2}^{-T_n/2} y_{0n}(t) [f' \cos(\lambda(t-\alpha)) - \delta' y_{0n}(t)] dt \quad (34)$$

を得る。ただしここで  $y_{0n}$  は  $\varepsilon=0$  なるときの  $n$ -周期解で、式(11-b)、(15-b)で与えられるものである。  $y_{0n}$  は奇関数であるので、式(34)は

$$\Delta_n(\alpha, \delta', f') = 2 \int_0^{T_n/2} y_{0n}(t) [f' \sin(\lambda\alpha) \sin(\lambda t) - \delta' y_{0n}(t)] dt \quad (35)$$

となり、式(11-b)、(15-b)を用いると最終的につぎの式を得る。

$$\begin{aligned} & \Delta_n(\alpha, \delta', f') \\ &= 2f' \sin(\lambda\alpha) \left[ \sqrt{a} x_{0n} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{a+\lambda^2} \cosh(\sqrt{a} t_{1n}) \sin(\lambda t_{1n}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\lambda}{a+\lambda^2} \sinh(\sqrt{a} t_{1n}) \cos(\lambda t_{1n}) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{b} x_n^+ \left[ \frac{1}{\sqrt{b}-\lambda} \left\{ \sin\left(\left(\sqrt{b}-\lambda\right) \frac{T_n}{2} - \sqrt{b} t_{1n}\right) + \sin(\lambda t_{1n}) \right\} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{b} + \lambda} \left\{ \sin\left(\left(\sqrt{b} + \lambda\right) \frac{T_n}{2} - \sqrt{b} t_{1n}\right) - \sin(\lambda t_{1n}) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \theta_{2n} \left[ \frac{1}{\sqrt{b} + \lambda} \left\{ \cos\left(\left(\sqrt{b} + \lambda\right) \frac{T_n}{2} - \sqrt{b} t_{1n}\right) - \cos(\lambda t_{1n}) \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{b} - \lambda} \left\{ \cos\left(\left(\sqrt{b} - \lambda\right) \frac{T_n}{2} - \sqrt{b} t_{1n}\right) - \cos(\lambda t_{1n}) \right\} \right] \\
& - \delta' \left[ a x_{0n}^2 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{a}} \sinh(2\sqrt{a} t_{1n}) - t_{1n} \right\} \right. \\
& + b x_m^2 \left[ (1 + \theta_{2n}^2) \left( \frac{T_n}{2} - t_{1n} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\sqrt{b}} (1 - \theta_{2n}^2) \sin(2\sqrt{b} \left( \frac{T_n}{2} - t_{1n} \right)) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\theta_{2n}}{\sqrt{b}} \left\{ \cos(2\sqrt{b} \left( \frac{T_n}{2} - t_{1n} \right)) - 1 \right\} \right] \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

つぎに,  $n$  が  $\infty$  となったときに対する分岐方程式と  $\Delta_\infty(\alpha, \delta', f')$  を誘導することについて考える. この場合にはこれまでに考えた初期条件から出発する解軌道に対応する解軌道は全ての  $t$  に対して  $(x_{0\infty}(t), y_{0\infty}(t)) = (0, 0)$  となるので別の工夫を必要とする. そこで初期条件を  $t=0$  において

$$x_{0\infty}(0) = x_{0\infty} \tag{37-a}$$

$$y_{0\infty}(0) = 0 \tag{37-b}$$

で与えられているとする.  $(x_{0\infty}, 0) \in D_{\text{II}+}$  であり, このときの Hamiltonian の値は  $h_{0\infty} = 0$  であったから, 式 (9-b) より

$$x_{0\infty} = 2b/c \tag{38}$$

を得る. このとき  $\{(x_{0\infty}(t), y_{0\infty}(t))\} \in D_{\text{II}+}$  に対し, 解軌道は

$$x_{\text{II}+}(t) = x'_{0\infty} \cos(\sqrt{b} t) + d \quad (x'_{0\infty} = x_{0\infty} - d) \tag{39-a}$$

$$y_{\text{II}+}(t) = -\sqrt{b} x'_{0\infty} \sin(\sqrt{b} t) \tag{39-b}$$

と表わされる. この解軌道が  $\{(x, y) | x = x_m^+, y \in \mathbf{R}\}$  -軸を切る時刻を  $t_{1\infty}$  と表わすと

$$x_{\text{II}+}(t_{1\infty}) = x'_{0\infty} \cos(\sqrt{b} t_{1\infty}) + d = x_m^+ \tag{40-a}$$

$$y_{\text{II}+}(t_{1\infty}) = -\sqrt{b} x'_{0\infty} \sin(\sqrt{b} t_{1\infty}) \tag{40-b}$$

を得る.  $t = t_{1\infty} (= \sqrt{b}^{-1} \cos^{-1}(x_m^+/x'_{0\infty}))$  でこの点からでていく解軌道  $(x_{0\infty}(t), y_{0\infty}(t))$  は  $(x_{0\infty}, y_{0\infty}) \in D_{\text{I}}$  において

$$x_{\text{I}}(t) = x_m^+ e^{-\sqrt{a}(t-t_1)} \tag{41-a}$$

$$y_{\text{I}}(t) = -\sqrt{a} x_m^+ e^{-\sqrt{a}(t-t_1)} \tag{41-b}$$

と表わされる. 式 (39), (41) を用いてこのときの式 (34) を計算するとつぎのようになる:

$$\begin{aligned}
& \Delta_\infty(\alpha, \delta', f') \\
& = 2f' \sin(\lambda \alpha) \left[ \frac{1}{a + \lambda^2} \sqrt{a} x_m^+ \{ \lambda \cos(\lambda t_{1\infty}) + \sqrt{a} \sin(\lambda t_{1\infty}) \} \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\lambda^2 - b} \sqrt{b} x'_{0\infty} \left\{ \sqrt{b} \sin(\lambda t_{1\infty}) \cos(\sqrt{b} t_{1\infty}) - \lambda \sin(\sqrt{b} t_{1\infty}) \cos(\lambda t_{1\infty}) \right\} \Big] \\
 & - \delta' \left[ \sqrt{a} x_m^+ + b x_{0\infty}'^2 \left\{ t_{1\infty} - \frac{1}{2\sqrt{b}} \sin(2\sqrt{b} t_{1\infty}) \right\} \right] \quad (42)
 \end{aligned}$$

式 (36), (42) によって  $\varepsilon \neq 0$  のときの解軌道を理論的に検討することが可能となる。

#### 4. 数値実験

これまでに理論的に明らかにしてきた分岐の発生を確認するために数値実験を行なった。ここでは式 (5), (6), (7) をルンゲークッタ法によって差分化し、その差分方程式に基づいて時間が十分に経過した後の運動を調べた。図 5~8 は、差分間隔  $\Delta t$  を 0.001 とし  $a=10.0$ ,  $b=20.0$ ,  $c=6.32$ ,  $\lambda=3.76$  のように選び摂動項をパラメータ空間  $(\alpha, \delta', f') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$  において  $\delta=1$  と固定し  $f$  を増大させて、 $(\delta', f')$ -平面へ射影された分岐集合を調べたときの結果を示している。ただしここで初期条件として  $t=0$  で  $x_0=x_m^+$ ,  $y_0=0$ ,  $\alpha=0$  とし (a) をつけた図において 0~20 周期までの運動が、(b) とした図において 20~30 周期の運動が示されている。  $f=0.7$  とした場合図 5 (b) から安定な 1 周期運動が存在していることがわかる。図 6 (b) は  $f=0.79$  とした場合で、1-周期運動は分岐を起こして 2-周期運動として存在していることがわかる。  $f$  をさらに増大させていくとこのような劣調和分岐が つぎつぎと発生し、ついには  $\varepsilon=0$  としたときの無限の周期をもつ解軌道 (セパトリックス上の解軌道でホモクリニック軌道と呼ばれる) を摂動したときへの分岐に到る。式 (36) によると、 $n=1$  のとき  $f=f_{c1} \cong 0.78$  ではじめの劣調和分岐が起こる。図 7 は  $f=1.8$  とした場合である。図 8 はこのときの 0~10 周期までの  $x(t)$ -過程が示されている。  $x(t)$  は  $\varepsilon=0$  のときの中心点  $C_+$ ,  $C_-$  のまわりを不規則に跳躍移動をくり返している。式 (42) によると  $f \geq f_c \cong 1.30$  に対し解軌道はホモクリニック構造をもつようになりこのような解軌道が現われるという理論結果と整合している。このような解軌道の示す運動はカオスの挙動と呼ばれるものである。このようにここで考察の対象としたシステムにおいて、はじめ摂動の小さいとき外力の周期に一致する周期をもつ周期運動が外力の振幅  $f$  の増大にともなって つぎつぎと劣調和分岐をひきおこしその結果として周期が無限であるという特色をもつカオスの挙動が発生することが理論的にも実験的にも確かめられた。

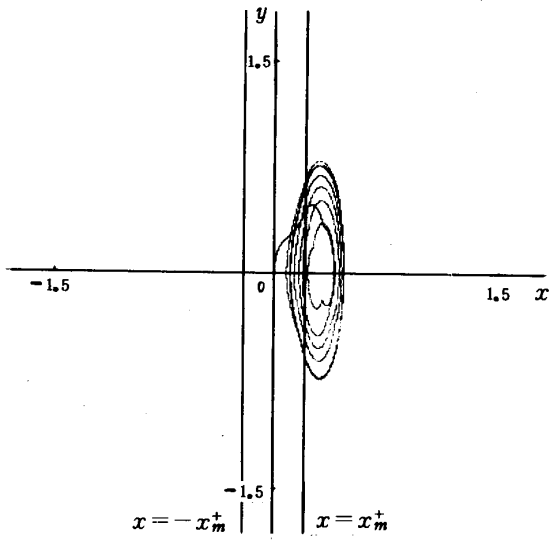


図 5 (a)  $\delta=1, f=0.7, 0 \leq t \leq 20T_\lambda$

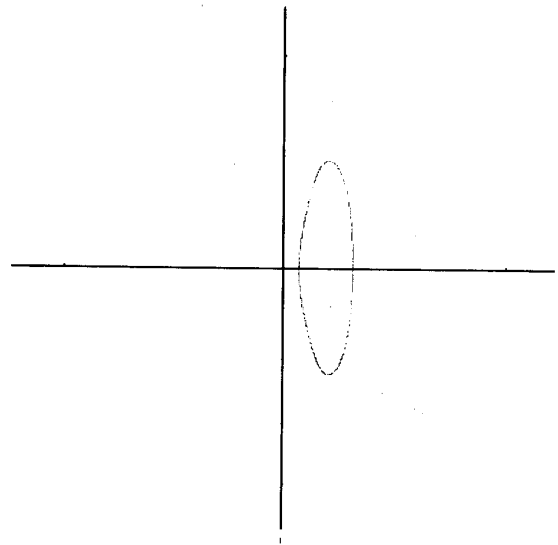


図 5 (b)  $\delta=1, f=0.7, 20T_\lambda \leq t \leq 30T_\lambda$

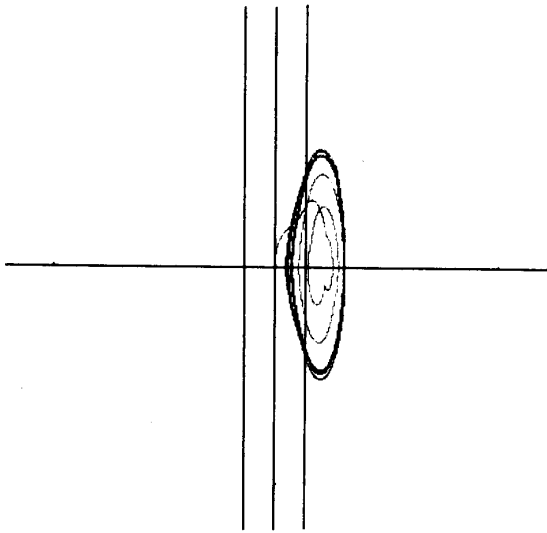


図 6 (a)  $\delta=1, f=0.79, 0 \leq t \leq 20T_\lambda$

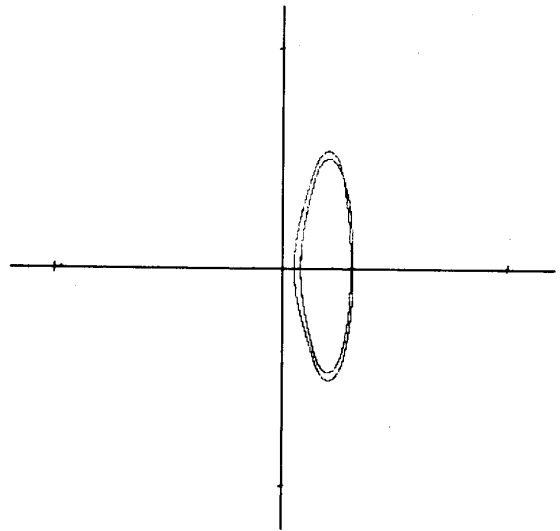


図 6 (b)  $\delta=1, f=0.79, 20T_\lambda \leq t \leq 30T_\lambda$

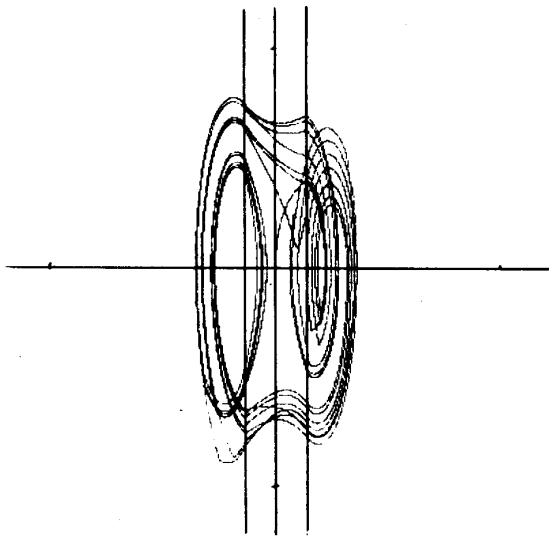


図7(a)  $\delta=1, f=1.8, 0 \leq t \leq 20T_\lambda$

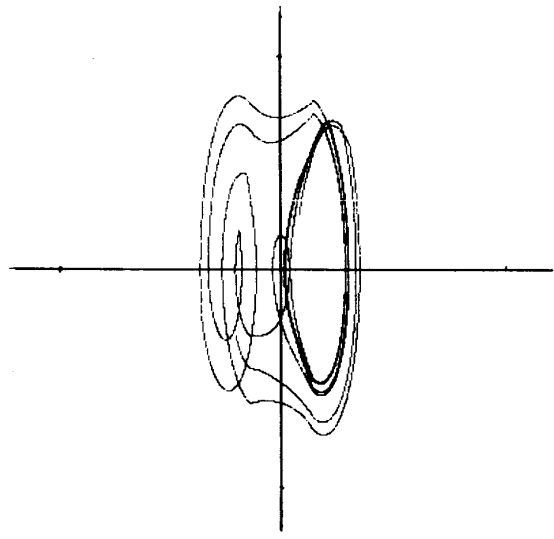


図7(b)  $\delta=1, f=1.8, 20T_\lambda \leq t \leq 30T_\lambda$

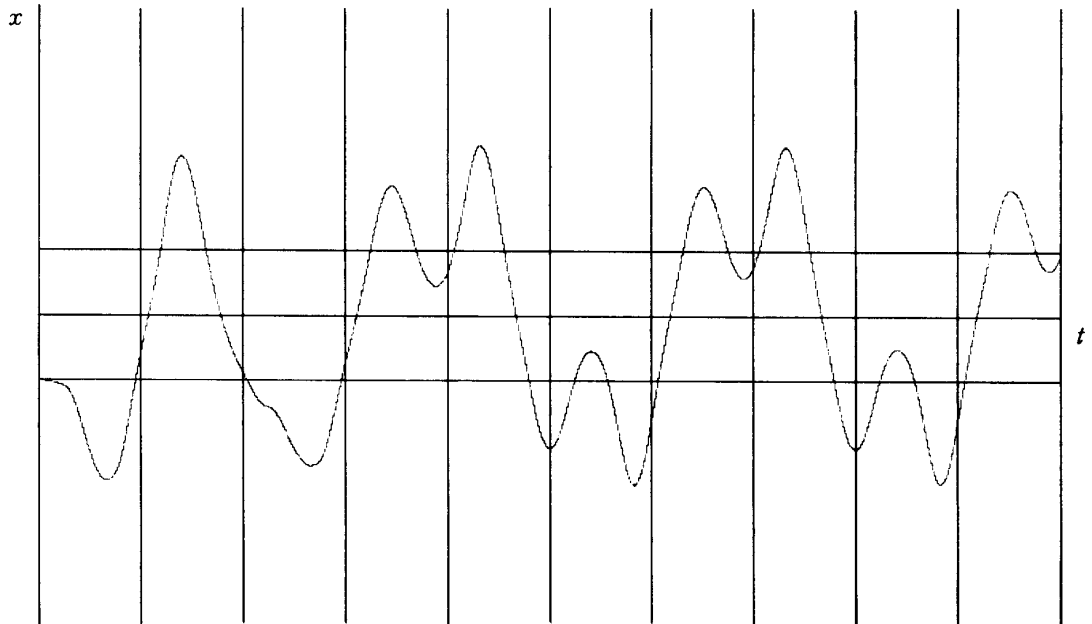


図8  $\delta=1, f=1.8, 0 \leq t \leq 10T_\lambda$

## 5. 結言

区分線要素を有する制御システムをとり挙げ、このときにみられる分岐現象、カオス現象の発生メカニズムを理論的、実験的に明らかにした。その結果、ここで考察の対象としたシステムにおいては、摂動項の影響によってより長い周期の周期運動が現われるというような劣調和分岐がつきつきと発生し、無限の周期をもつカオスの挙動が発生することが明らかにされた。区分線形システムはその解を知ることが比較的容易であり、本論文で示されたように摂動に対して、解軌道に高次近似は現われないので解析は容易である。従って、パラメータ空間  $(\alpha, \delta', f') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$  での分岐集合の構造をもっと詳細に調べることも可能である。

## 6. 参考文献

- [1] T. Ushio et al., "Chaos in Non-linear Sampled-Data Control Systems", Int. J. Control Vol. 38, No. 5 pp. 1023-1033 (1983)
- [2] Sui-Nee Chow, J.K. Hale, "Methods of Bifurcation Theory" (1982) Springer
- [3] J.K. Hale, "Ordinary Differential Equations" (1969) Wiley-Interscience
- [4] Sui-Nee Chow et al., "Interaction of damping and forcing in a second order equation", J. Nonlinear Analysis Vol. 2 pp. 77-84 (1978)
- [5] Sui-Nee Chow et al., "Bifurcation and Nonlinear Oscillations" Research Rept. Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Sept. 28, (1980).

# Bifurcation Phenomena and Chaotic Behaviour of Piecewise Linear Control Systems

Hirokazu OHTAGAKI

*Department of Electronic Science  
Okayama University of Science,  
Ridai-cho 1-1 Okayama 700 Japan*

## ABSTRACT

In this paper, the principal line of attack is to study the bifurcation and chaotic phenomena in the motion of piecewise linear control systems. By invoking to the alternative method for ordinary differential equations, it is shown that the subharmonic bifurcation occurs successively and leads to chaotic motion for the systems considered here. To illustrate this scenario, the numerical results are demonstrated.