

プラズマの不連続部における反射と透過

中川紀美雄・武政 和利

下條 正・信吉 輝己

岡山理科大学 電子理学科

(昭和60年9月26日 受理)

1. まえがき

温度を持った(圧縮性)プラズマの不連続部における電磁波およびプラズマ音波の反射と透過の問題は、宇宙物理学、高速電子ビーム工学、プラズマ工学、原子炉工学等の分野に関連して、1960年代から多く研究されてきている。^{(1)~(8)} 近年、この問題はプラズマ診断、太陽表面での電磁波からプラズマ波への変換、またその逆過程の解明等で重要な問題の一つとなってきている。現在、この問題を解析するには境界条件として、まず、電磁界の接線成分の連続性を用い、さらに音響的境界条件として境界面に垂直な圧力の連続性とプラズマを構成する電子の粒子速度の変動量の連続性を用いることが定着しているように思われる。これらの境界条件の組合せは、エネルギー保存則を満足し何ら欠点を持たないように考えられており、他の境界条件、例えば流量保存則をこれらの組合せの一つと入換えたならエネルギー保存則を満足しなくなる。しかし境界条件のセットにも問題がないわけではなく、例として音響的な条件はプラズマ温度が0となる極限では電磁界理論的境界条件の2つの中で一つと合入れないものとなる。

ここでは、プラズマの不連続部における境界条件として2種のプラズマ層の間に小さな真空の間隙を考えこの間隙を極めて小さくとした極限で新たな境界条件として上に述べた境界条件を用いて電磁波が入射した場合、プラズマ音波が入射した場合のそれぞれについて数値計算例を挙げて詳しく検討する。

2. 基本式

線形化された波源のない場合の圧縮性プラズマ中で基本式はつぎのように与えられる。⁽³⁾

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} - en_0\mathbf{v} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\mathbf{H}) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0\mathbf{E}) + en = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}) + j\omega n = 0 \quad (5)$$

$$j\omega m n_0 \mathbf{v} + n_0 e \mathbf{E} + m \nabla v_T^2 n = 0 \quad (6)$$

ここで、 n_0 は電子の時空平均密度、 n は電子密度の微小変動量を表わす。 \mathbf{v} は電子の粒子速度の微小変動量を表わす。また、 m および $-e$ は、それぞれ電子の質量および電荷量を表わす。 v_T は熱電子速度を表わし、ボルツマン定数 κ 、電子の絶対温度を T とすると、

$$v_T^2 = 3\kappa T/m \quad (7)$$

と与えられる量である。ここで取り扱う圧縮性プラズマでは、正イオンの変動は電子と電磁波の相互作用によるものに比べ無視できるほど小さいものとする。また、正イオンは電子の平均電荷密度 ($-en_0$) を中和するものと仮定している。

3. 境界条件

第1節で述べたように境界条件は正確な基本式からの数学的導出の帰結ではなく部分的にはモデルの設定に依存している。従って、境界条件は物理的モデルによってエネルギー保存則を満足する適当な境界条件モデルが複数あるものと思われる。

ここでは、現在多くの研究者たちの使っているモデル（以下 I B モデルと呼ぶことにする。）Inpenetrable Boundary-Model と Rigid Boundary-Model を拡張したモデル（以下、ERB モデルと呼ぶことにする。）について述べる。

3-1 Inpenetrable Boundary Model による境界条件

式(1)、(2)より電磁界に関する境界条件がつぎのように得られる。

$$[\mathbf{E}_{\parallel}] = 0 \quad (8)$$

$$[\mathbf{H}_{\parallel}] = 0 \quad (9)$$

上式において[]は境界面をはさんだ物理量の不連続量を表わし、記号 // はその境界面に平行な成分を表わす。音響的な境界条件は、運動方程式を表わす式(6)より

$$[mv_T^2 n] = 0 \quad (10)$$

が簡単に導びかれる。 $mv_T^2 n$ なる量はプラズマ音波の圧力の微小変動量を表わしている。したがって、上式は境界面を通しての圧力の連続性を意味している。式(8)~(10)からは完全に電磁界およびプラズマ波の諸量を決定することができず、さらにもう一式が必要となる。残りの式はつぎのように与えられる。

$$[v_{\perp}] = 0 \quad (11)$$

上式は電子の粒子速度の境界に垂直な成分の連続性を意味している。ここで注意したいのは他の境界条件式(8)~(10)が基本式からの帰結があるのに対して、上式は単なるモデルであるということである。上式の物理的意味は電子の粒子速度の垂直成分が連続すなわち、微小変動場により振動する仮想的な境界面で、2種のプラズマ粒子は、隔てられており他の領域に侵透 (penetrate) したり、空隙をつくることのないことを意味している。式(8)~(11)が I B モデルの境界条件である。

3-2 Rigid Boundary-Model の拡張による境界条件

3-1 の I B モデルの境界条件は 2 種の異なる圧縮性プラズマの接する場合の境界である。しかし、圧縮性プラズマが電磁波のみ励起し、音波が励起されないような他の媒質と接するような場合（例えば、圧縮性プラズマに誘電体、非圧縮性プラズマあるいは空気の接するような場合）は、4 つの式(8)~(11)の中で 1 つは不要であるので I B モデルの境界条件式の適用に困難がある。この種の問題では現在、多く Rigid Boundary の条件

$$v_{\perp} = 0 \tag{12}$$

が用いられている。すなわち境界面上で圧縮性プラズマの粒子は固い (Rigid) 境界に接しているようなモデルである。図 1 は、 $x > 0$ の領域を占めるプラズマ I (ω_{P1}, v_{T1}): $\omega_{P1} = \sqrt{e^2 n_{01} / \epsilon_0 m}$ プラズマ周波数, と $x < 0$ の領域を充しているプラズマ II (ω_{P2}, v_{T2}) が $x = 0$

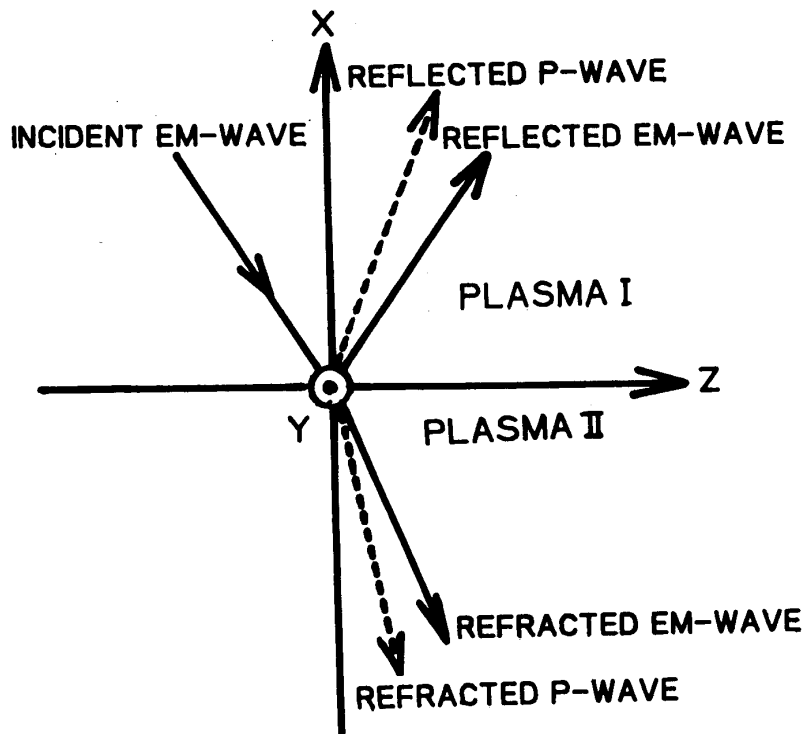


図 1. 問題の構成図

の境界面で接しており、これに波動が入射する問題図である。この場合に、ERB モデルを適用するには図 2 のように 2 つのプラズマ媒質の間に間隙 d の AIR GAP を考え $x = 0$ 面および $x = -d$ 面で ERB モデルの境界条件を適用し、 $(-d) \rightarrow 0$ の極限で図 1 の問題の構成図に関する境界条件が得られる。それらの結果の式は電磁界に関しては式(8), (9)に一致し、式(12)に対応して

$$v_{\perp} = 0 \quad \text{on both side of boundary} \tag{13}$$

が得られることが簡単に確かめられる。式(13)は実質 2 式であるので(8), (9)とあわせて 4 式となり電磁波、プラズマ波は完全に求められる。

次節では、入射面に垂直な磁界成分を持った電磁波 (H-波) が入射した場合、および

プラズマ波の入射したそれぞれの場合の電磁波およびプラズマ波の反射係数，透過係数を，I BモデルおよびE R Bモデルについて導出する。

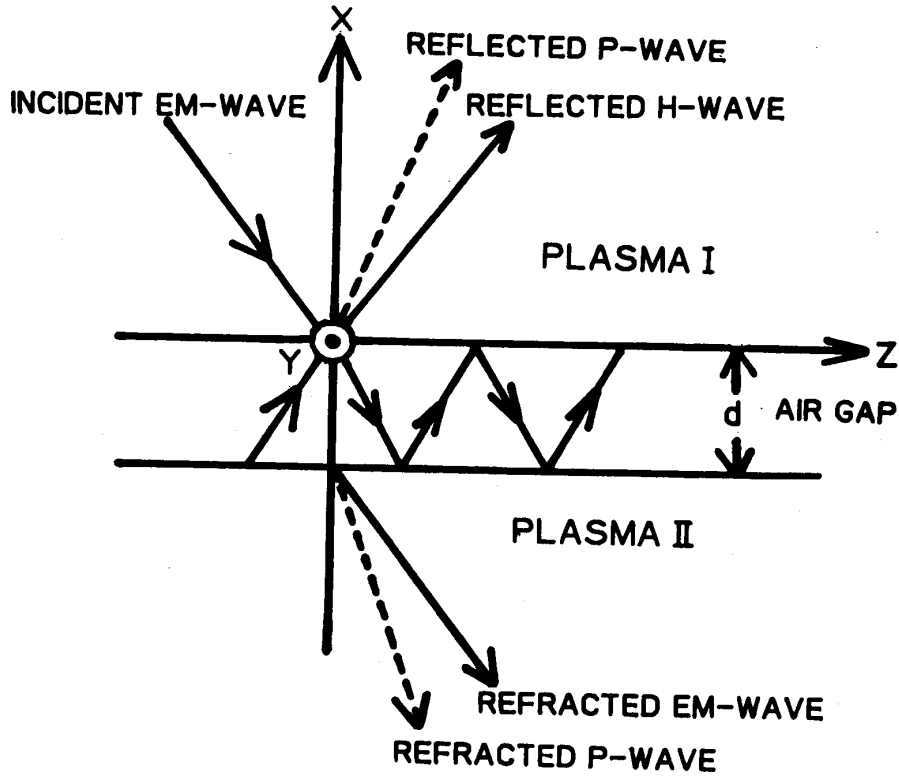


図2. 構成図

4. 反射係数，透過係数

4-1 I Bモデル

4-1-1 入射 H 波の場合

図1において，入射波の H 波は成分でつぎのようにかける。

$$H_y^i = H_0^i e^{j\omega t + jk_{1x}x - jk_z z} \quad (14)$$

$$E_x^i = \frac{k_z}{\omega \epsilon_0 X_{P1}} H_y^i \quad (15)$$

$$E_y^i = \frac{k_{1x}}{\omega \epsilon_0 X_{P1}} H_y^i \quad (16)$$

ここで，

$$X_{P1} = 1 - \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2}, \quad k_{1x}^2 + k_z^2 = k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} X_{P1} \quad (17 a, b)$$

反射，透過電磁波の磁界成分はつぎのようにかける。

$$H_y^r = H_0^r e^{j\omega t - jk_{1x}x - jk_z z} \quad (18)$$

$$H_y^t = H_0^t e^{j\omega t + jk_{2x}x - jk_z z} \quad (19)$$

ここで，

$$k_{2x}^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2}\right) \quad (20)$$

つぎに、反射、透過プラズマ波の微小変動量はつぎのようにかける。

$$n^r = n_0^r e^{j\omega t - jh_{1x}x - jk_z z} \quad (20)$$

$$n^t = n_0^t e^{j\omega t + jh_{2x}x - jk_z z} \quad (22)$$

$$h_{1x}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v_{T1}^2} \left(1 - \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2}\right), \quad h_{2x}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v_{T2}^2} \left(1 - \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2}\right) \quad (23 \text{ a, b})$$

以上の式に I B モデルの境界条件式(8)~(11)を適用して、電力反射係数 R 、電力透過係数 T が次のように求められる。

$$R_{EM}^H = \frac{B_0 B_0^*}{A_0 A_0^*} \quad (24)$$

$$T_{EM}^H = \frac{R_e[k_{2x}]}{k_{1x}} \frac{X_{P1}}{X_{P2}} \left(1 + \frac{B_0}{A_0}\right) \left(1 + \frac{B_0}{A_0}\right)^* \quad (25)$$

$$R_P^H = \frac{\omega^2}{\omega_{P1}^2} \frac{R_e[h_{1x}^*]}{k_{1x} X_{P1}^2} \frac{C_0}{A_0} \left(\frac{C_0}{A_0}\right)^* \quad (26)$$

$$T_P^H = \frac{\omega^2}{\omega_{P2}^2} \frac{R_e[h_{2x}^*]}{k_{1x} X_{P1} X_{P2}} \frac{C_0}{A_0} \left(\frac{C_0}{A_0}\right)^* \quad (27)$$

ここで、

$$A_0 = A + B + C, \quad B_0 = A - B - C \quad (28 \text{ a, b})$$

$$A = \frac{k_{1x}}{X_{P1}} \left(\frac{\omega^2}{\omega_{P1}^2} \frac{h_{1x}}{X_{P1}} + \frac{\omega^2}{\omega_{P2}^2} \frac{h_{2x}}{X_{P2}} \right) \quad (29)$$

$$B = \frac{k_{2x}}{X_{P2}} \left(\frac{\omega^2}{\omega_{P1}^2} \frac{h_{1x}}{X_{P1}} + \frac{\omega^2}{\omega_{P2}^2} \frac{h_{2x}}{X_{P2}} \right) \quad (30)$$

$$C = k_z^2 \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} \right)^2 \quad (31)$$

$$C_0 = -2k_{1x}k_z \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} \right) \quad (32)$$

上式において $R_e[]$ は実部をとる操作を表わし、記号*は複素共役を表わす。下添字 EM および P はそれぞれ電磁波成分およびプラズマ波成分を表わすものとし、上添字 H は入射 H 波の場合を表わす。

4-1-2 入射 P 波の場合

次式で表わされるようなプラズマ波

$$n^i = n_0^i e^{j\omega t + jh_{1x}x - jk_z z} \quad (33)$$

が入射した場合の反射、透過係数は前と同様にして、次のように求められる。

$$R_{EH}^P = 4 \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{R_e[k_{1x}]k_z^2}{h_{1x}} \left(\frac{1}{X_{P1}} - \frac{1}{X_{P2}} \right)^2 \left(\frac{\omega^2 h_{1x}}{\omega_{P1}^2 X_{P1}} \right)^2 / A_1 A_1^* \quad (34)$$

$$T_{EM}^P = 4 \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{X_{P1} R_e[k_{2x}]k_z^2}{X_{P2}} \left(\frac{1}{X_{P1}} - \frac{1}{X_{P2}} \right) \left(\frac{\omega^2 h_{1x}}{\omega_{P1}^2 X_{P1}} \right)^2 / A_1 A_1^* \quad (35)$$

$$R_P^P = \frac{B_1 B_1^*}{A_1 A_1^*} \quad (36)$$

$$T_P^P = \frac{n_{01} X_{P1} R_e[h_{2x}^*]}{n_{02} X_{P2} h_{1x}} \frac{4 A_2 A_2^*}{A_1 A_1^*} \quad (37)$$

ここで、

$$A_1 = A_2 + B_2 + C_2, \quad B_1 = A_2 - B_2 - C_2 \quad (38 \text{ a, b})$$

$$A_2 = \frac{\omega^2 P_1 h_{1x}}{\omega^2 X_{P1}} \left(\frac{k_{1x}}{X_{P1}} + \frac{k_{2x}}{X_{P2}} \right) \quad (39)$$

$$B_2 = \frac{\omega^2 P_2 h_{2x}}{\omega^2 X_{P2}} \left(\frac{k_{1x}}{X_{P1}} + \frac{k_{2x}}{X_{P2}} \right) \quad (40)$$

$$C_2 = k_z^2 \left(\frac{1}{X_{P1}} - \frac{1}{X_{P2}} \right)^2 \quad (41)$$

上添字は入射 P 波を表わす。

4-2 ERBモデル

この場合の反射係数，透過係数は前節と同様の手順で求められるので，入射 H 波，入射 P 波の結果の式のみを次に示す。

4-2-1 入射 H 波の場合

$$R_{EM}^H = \frac{B_3 B_3^*}{A_3 A_3^*} \quad (42)$$

$$T_{EM}^H = 4 \frac{R_e[k_{2x}]}{k_{1x}} \frac{X_{P1}}{X_{P2}} \frac{A_4 A_4^*}{A_3 A_3^*} \quad (43)$$

$$R_P^H = \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{v_{T1}^2}{c^2} \frac{h_{1x} k_{1x}}{(\omega/c)^2} \frac{h_1^2}{X_{P1}^3 h_{1x}^2} \frac{C_3 C_3^*}{A_3 A_3^*} \quad (44)$$

$$T_P^H = \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2} \frac{v_{T2}^2}{c^2} \frac{h_{2x} k_{1x}}{(\omega/c)^2} \frac{h_2^2}{X_{P1} X_{P2}^2 h_{2x}^2} \frac{C_3 C_3^*}{A_3 A_3^*} \quad (45)$$

$$A_3 = A_4 + B_4 + C_4, \quad B_3 = A_4 - B_4 - C_4, \quad C_3 = 2k_z \quad (46 \text{ a, b, c})$$

$$A_4 = \frac{k_{1x}}{X_{P1}}, \quad B_4 = \frac{k_{2x}}{X_{P2}} \quad (47 \text{ a, b})$$

$$C_4 = \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{h_{1x} X_{P1}} + \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{h_{2x} X_{P2}} \quad (47 \text{ c})$$

4-2-2 入射 P 波の場合

$$R_{EM}^P = 4 \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{R_e[k_{1x}]}{h_{1x}} \frac{k_z^2}{X_{P1}^2} \frac{1}{A_5 A_5^*} \quad (48)$$

$$T_{EM}^P = 4 \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{R_e[k_{2x}]}{h_{1x}} \frac{k_z^2}{X_{P1} X_{P2}} \frac{1}{A_5 A_5^*} \quad (49)$$

$$R_P^P = \frac{B_5 B_5^*}{A_5 A_5^*} \quad (50)$$

$$T_P^P = 4 \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2} \frac{R_e[h_{2x}^*]}{h_{1x}} \frac{k_z^4}{h_{2x} h_{2x}^* X_{P1} X_{P2}} \frac{1}{A_5 A_5^*} \quad (51)$$

$$A_5 = \frac{k_{1x}}{X_{P1}} + \frac{k_{2x}}{X_{P2}} + \frac{k_z^2}{h_{1x} X_{P1}} \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} + \frac{k_z^2}{h_{2x} X_{P2}} \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2} \quad (52)$$

$$B_5 = \frac{k_{1x}}{X_{P1}} + \frac{k_{2x}}{X_{P2}} - \frac{k_z^2}{h_{1x}} \frac{\omega_{P1}^2}{\omega^2} + \frac{k_z^2}{h_{2x} X_{P2}} \frac{\omega_{P2}^2}{\omega^2} \quad (53)$$

5. 数値計算および検討

電磁波およびプラズマ波成分の反射係数，透過係数の総和は，IBモデル，ERBモデルいずれの場合も

$$R_{EM} + T_{EM} + R_P + T_P = 1 \tag{54}$$

を満足しエネルギー保存則を満足している。そこで、以下では電磁波とプラズマ波の反射係数 R_{EM} , R_P についてのみ数値計算例を挙げて、I BモデルとE R Bモデルについて比較

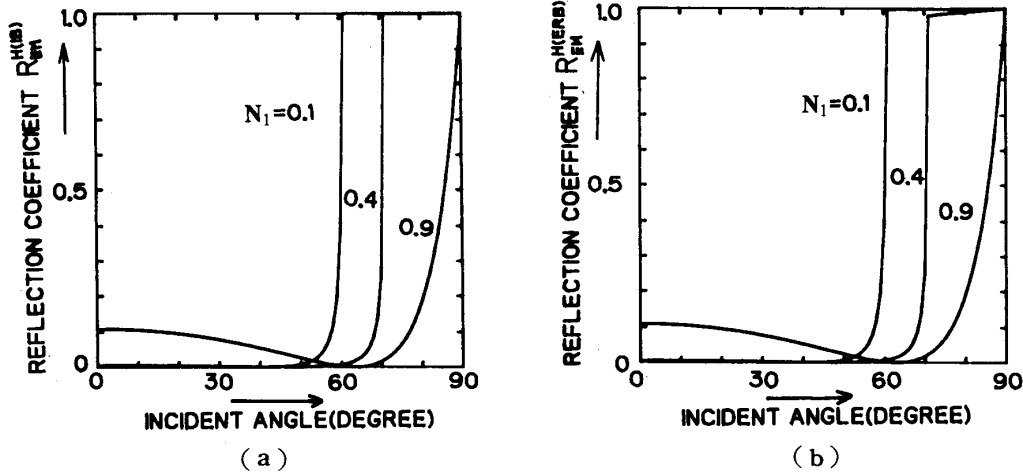


図3. 入射 H 波の場合の反射係数 ($N_2=0.5$, $G_1=0.01$, $G_2=0.001$)

検討する。図3は、入射 H 波の場合の反射係数の数値計算例を示す。図中で上添式(EM)および(P)はそれぞれ電磁波成分およびプラズマ波成分を表わし、パラメータは正規化プラズマ周波数、 G は正規化熱電子速度を表わしつぎのように与えられる量である。

$$N = \frac{\omega_P}{\omega}, \quad G = \frac{v_T}{c} \tag{55 a, b}$$

図3. a の $N_1=0.9$ の場合は $R_{EM}^{H(IB)}$ は 60° を越えた入射角で Brewster 角の現われることを示している。 $N_1=0.1$ および $N_1=0.4$ の曲線は第2のプラズマ媒質の正規化プラズマ周波数 $N_2=0.5$ に比べ小さい場合で $R_{EM}^{H(IB)}$ が1 (図では、ほぼ $R_{EM}^{H(IB)}=1$ と読みとれるが厳密には1より僅かに小さい。)となる全反射領域のあることが分る。ここでは、第1のプラズマ媒質の正規化熱速度 $G=0.01$ が第2のプラズマ温度より高い場合について

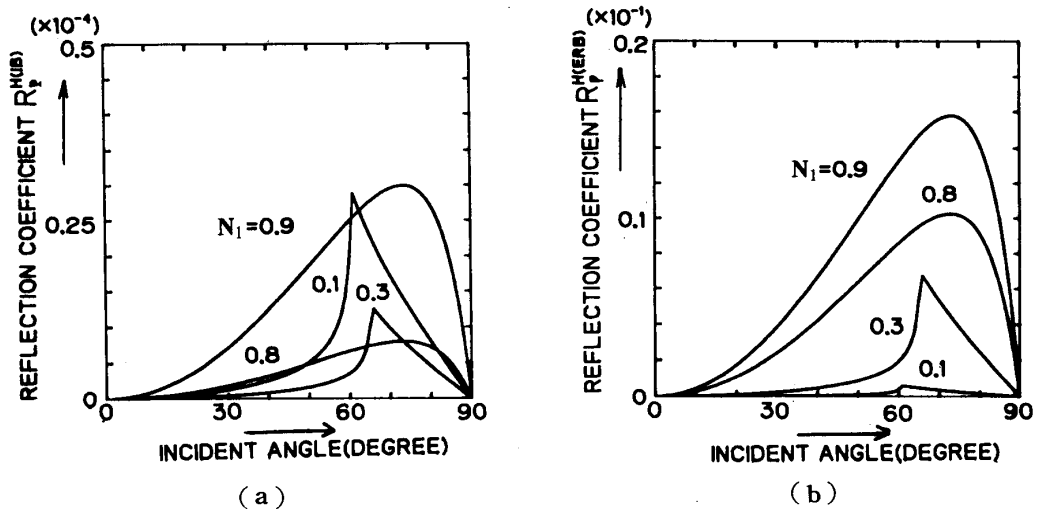


図4. 入射 H 波の場合の反射係数 ($N_2=0.5$, $G_1=0.01$, $G_2=0.001$)

数値計算例を示している。以下も同じパラメータで計算例を示す。図 3. b は E R B モデルの反射係数 $R_{EM}^{H(ERB)}$ の数値計算例である。全体の概形は $R_{EM}^{H(IB)}$ と同じであるが、 $N_1 = 0.4$ の全反射領域で、 $R_{EM}^{H(ERB)}$ は明らかに 1 より小さいことが図から読みとれる。図 4 は、入射 H 波の場合のプラズマ波成分の反射係数 R_P^H の数値計算例である。全般に、 $R_P^{H(IB)}$ と $R_P^{H(ERB)}$ の曲線はどちらも 1 に比べ小さいが $R_P^{H(ERB)}$ は $R_P^{H(IB)}$ に比べ大きな値を持っている。

次に、プラズマ波が境界面に入射した場合について考察する。図 5 は、入射プラズマ波の場合の電磁波成分の反射係数 R_{EM}^P の計算例である。2 つのモデルで共通していえるのは非常に小さい入射角の場合にしか反射電磁波は励振されない。すなわち、プラズマ波が

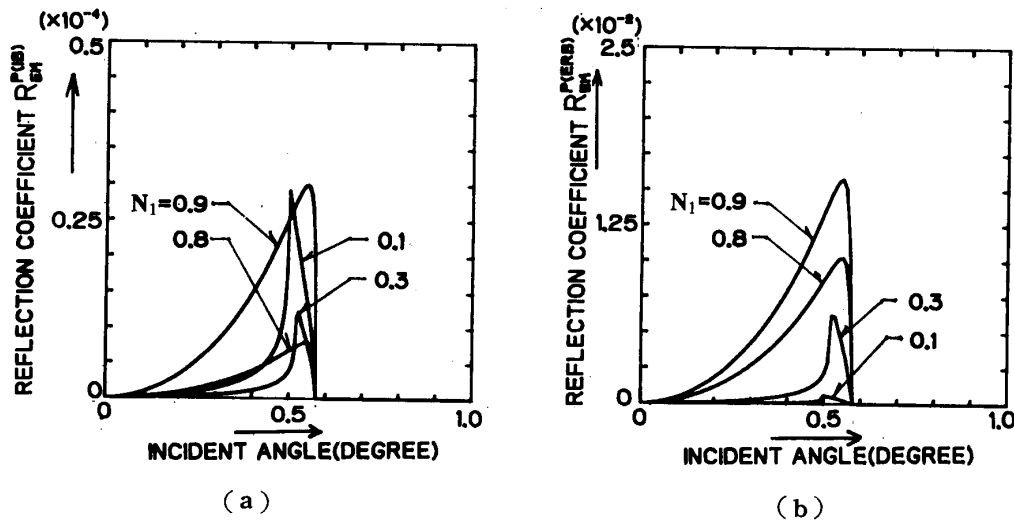


図 5. 入射プラズマ波の場合の反射係数 ($N_2=0.5, G_1=0.01, G_2=0.001$)

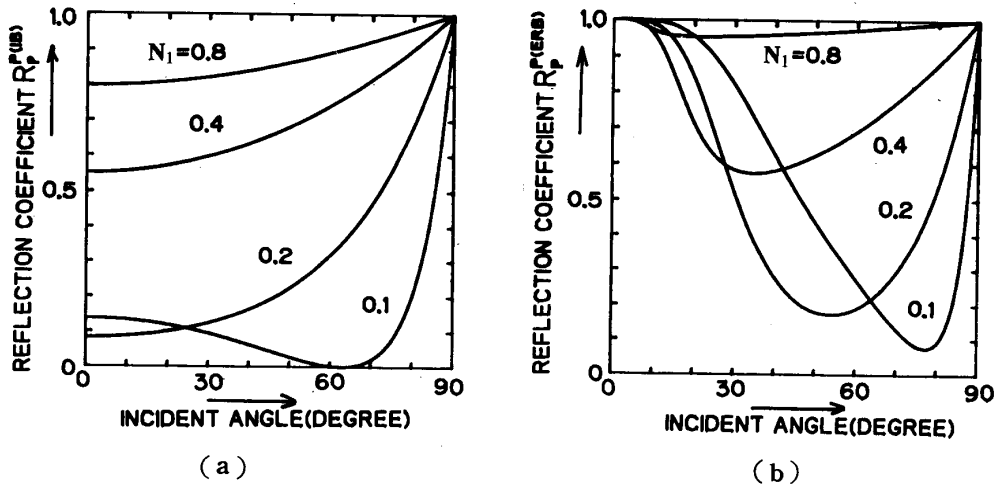


図 6. 入射プラズマ波の場合の反射係数 ($N_2=0.5, G_1=0.01, G_2=0.001$)

ほぼ垂直に入射した時にしか電磁波は境界面から励起されないことがわかる(入射角 0.5° 位で、 R_{EM}^P は最大)。図 6 は、プラズマ波が入射した場合のプラズマ波成分の反射係数 R_P^P である。本図 3 ~ 図 5 に比べ 2 つのモデルで著しく異った曲線となっているので両モ

デルの優劣を比較するに格好の図である。まず、図 6. a の I B モデルでは、小さい N_1 の値 ($N_1=0.1$) で Brewster 角が現れる。これは縦波では説明出来ない。一方、図 6. b では垂直入射の場合、 R_P^P は 1 となるこれは現実的には不合理な結果であるが、図 2 のようなモデルでは垂直入射したプラズマ波は、AIR GAP 間に電磁波を励起せず従って、第 2 プラズマ領域に何ら波動を励振しないという解釈から当然の帰結となる。すなわち、E R B モデルでは垂直プラズマ波に対して第 2 プラズマは完全に分離していることになる。

6. むすび

圧縮性プラズマの不連続部における 2 つの境界条件モデルについて、電力反射係数の数値計算例を挙げ、比較検討を行い次のことが明らかとなった。

I B モデルでは境界面上で不自然な条件を課しているにもかかわらずプラズマ波入射のあるパラメータの下で Brewster 角の現われるのを除いて現在最も合理的な境界条件モデルである。E R B モデルは I B モデルに比べ電磁波からプラズマ波への mode conversion が大きく、このことは Rigid Boundary Mode 一般についていえることとなるので圧縮性プラズマが他の音波を励起しない媒質と接する境界面での境界条件は、慎重な取り扱いが必要である。(本問題の構成図では、Rigid Boundary Mode はかなり否定的である。)

文 献

1. G. B. Field, *Astrophys*, 7 (1956) 555.
2. A. H. Kritz and D. Mintzer, *Phys. Rev.* 117 (1960) 382.
3. M. H. Cohen, *Phys. Rev.* 126 (1962) 389.
4. A. M. Fedrchenko, *Soviet Phys.* 7 (1962) 428.
5. A. Hessel, N. Marcuvitz and J. Shmoys, *IEEE* 12 (1964) 130.
6. A. Hessel and J. Shmoys, *Proc. Symp. on EFDGP*, Polytechnic Press (1962).
7. S. R. Seshadri, *IEEE*, 1 (1965) 79.
8. K. Nakagawa, *Sino-Japanese OFSET* (1985) 415.

SOME NOTES ON MODELS OF BOUNDARY CONDITIONS AT A PLASMA DISCONTINUITY

Kimio NAKAGAWA, Kazutoshi TAKEMASA,
Tadashi SHIMOJO and Terumi NOBUYOSHI

*Department of Electronics,
Okayama University of Science
1-1 Ridai-cho Okayama 700Mz, Japan*

Abstract

In order to examine the two types of boundary condition model at a plasma discontinuity, the problem of reflection and refraction at the plasma discontinuity is investigated for each type of model. First model is an impenetrable boundary model and the other is an extended rigid boundary model. It is found that the rate of mode-conversion by the former model is generally much larger than that by the latter. Furthermore, the validity of each model is studied in detail.