双対図法による論理関数の合成と無定義項

豊田準三・小西憲一

岡山理科大学理学部電子理学科

（昭和59年9月27日　受理）

まえがき

双対図による論理設計[1)]では論理関数形の変換が容易で，従ってその合成も容易である．その場合に条件としてあたえられる無定義項についても関数の合成として取扱えるが，それらが積和形式で無定義項となっている場合でも和積形式で無定義項となっている場合でも色々な観点からの検討が可能になる．本稿では複数個の成分関数を論理的に合成してえられる関数についての NAND または NOR 素子による3段構成の単極性入力のものにつき，入出力の極性調整をも含めて，無定義項がある場合の双対図法の有効性を検討した．

1．最小項図での論理関数合成と無定義項

双対図による論理設計では合成に用いられる複数個の成分関数に積和形のものと和積形のものとが混在している場合でも，それぞれについての変換が容易であり，一方の関数形に統一した上で容易に合成できることが特長である．結果を積和形で求める場合には成分関数を積和形に統一した上で最小項図（カルノ図）上で論理和合成をすればよく，和積形で求める場合には和積形に統一した上で最大項図上で論理積合成をすればよい．その結果について無定義項をも適合した関数形にした上で簡単化の合成を検討すればよいことになる．

最小項図上の合成例として積和形関数 $S_1(m)$ と和積形関数 $T_1(M)$ が成分関数として下記のようにあたえられ，無定義項については積和形の $DN(m)$ または和積形の $DT(M)$ があり，そのいずれかが選択できるという条件の下で，排他論理和関数Pを合成する場合につき下記する．

$$P=S_1(m)\overline{T}_1(M)+\overline{S}_1(m)T_1(M) \tag{1}$$

ここで $$S_1(m)=\underset{a}{A\overline{B}\overline{D}}+\underset{c}{\overline{A}B\overline{D}}+\underset{e}{\overline{A}\overline{C}D}+\underset{h}{BC\overline{D}}+\underset{i}{\overline{B}CD} \tag{2}$$

$$T_1(M)=\underset{x}{(\overline{A}+B+D)}\underset{y}{(A+\overline{C}+D)}\underset{z}{(A+\overline{B}+C)}\underset{u}{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{D})}\underset{r}{(\overline{A}+B+\overline{C})} \tag{3}$$

無定義項 $$DN(m)=m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{15} \tag{4}$$

$$DN(M)=M_{15}M_{14}M_{13}M_{12}M_{11}M_{10}M_9M_8M_7M_6M_5M_4 \tag{5}$$

$DT(M)=M_{15}M_{13}M_{12}M_{11}M_{10}M_9M_8M_7M_6M_5M_4M_3$　(6)

$DT(m)=m_1+m_{13}+m_{14}+m_{15}$　(7)

ここで m_i は最小項，M_j は最大項を示している．また $S_1(m)$ と $T_1(M)$ の図形表示は，最小項番地図および最大項番地図と共に付図に示してある．無定義項については一般には最小項群の論理和として積和形であたえられることが多いが，ここでは変換の便宜を考えて，対応した和積形のものも併記した．$S_1(m)$ と $T_1(M)$ はそれぞれ5種類ある同値関数[1)] のひとつとして与えられているものであるが，双対図形演算はすべて最小項または最大項に還元して実施されるので，他にどのような関数形のものがあるかについては問題にする必要はない．

$S_1(m)$と $T_1(M)$ を成分関数とした図形演算は図1の上部に示してある．$T_1(M)$ を積和形 $T_1(m)$ に変換した上で最小項図上での排他論理和合成を実施して求めようとする関数Pの積和形 $P(m)$ がえられる．無定義項 $DN(m)$ または $DT(M)$ の $P(m)$ との論理和条件での簡単化も，同様にして最小項図上での合成で求められ，その結果としてそれぞれ $P'(m)$ または $P''(m)$ がえられる．えられた図形の空白部を最大項番地でよみとれば和積形の $P(M)$，$P'(M)$ および $P''(M)$ がえられるが，$P''(M)$ については最大項図上での合成も示してある．これにより最小項図合成と最大項図合成の双対性が理解できるであろう．

図1　下部にはこれらの関数の単極性入力による NAND または NOR 素子の3段構成として回路化した結果を真理値表と共に示してある．$P(m)$ と $P(M)$ は素子数がそれぞれ7と6とが必要になるものであるが無定義項条件で節減され，$P'(m)$ を除いては3素子に簡単化されている．DT による場合は結果は単純論理項として2段構成でえられているが，これは1段省略された形での積和形または和積形のいずれとしても取扱えるものである．（真理値表の0に付加された添字は，同じ数字のついている共通ゲート出力からえられることを示し，（　）は単変数否定出力を示す．また素子記号の●印は低位の素子出力を示すものである。）

ここで注意を要するのは素子に起用されている論理方式が一定の場合（ここでは正論理に限るとする.）には NAND または NOR 構成では入力と出力とで極性が逆転する場合のあることである．他に既存している論理回路との関係で一定極性（ここでは高位極性に限るとする。)をえるためには変数に適用する論理方式には充分な注意が必要である．単極性入力の NAND または NOR の3段回路の極性については文献(1)で取扱はれているが，正論理の素子を起用して所定の高位極性出力がえられない関数形は次のような条件のものである．

i）NAND 3段の場合；積和形展開項に正関数項がひとつもない関数形（終段には少くともひとつの低位入力が必要である.）

ii）NOR 3段の場合；　和積形展開項に負関数項がひとつでも存在する関数形（終段入力はすべてが低位入力でなければならない.）

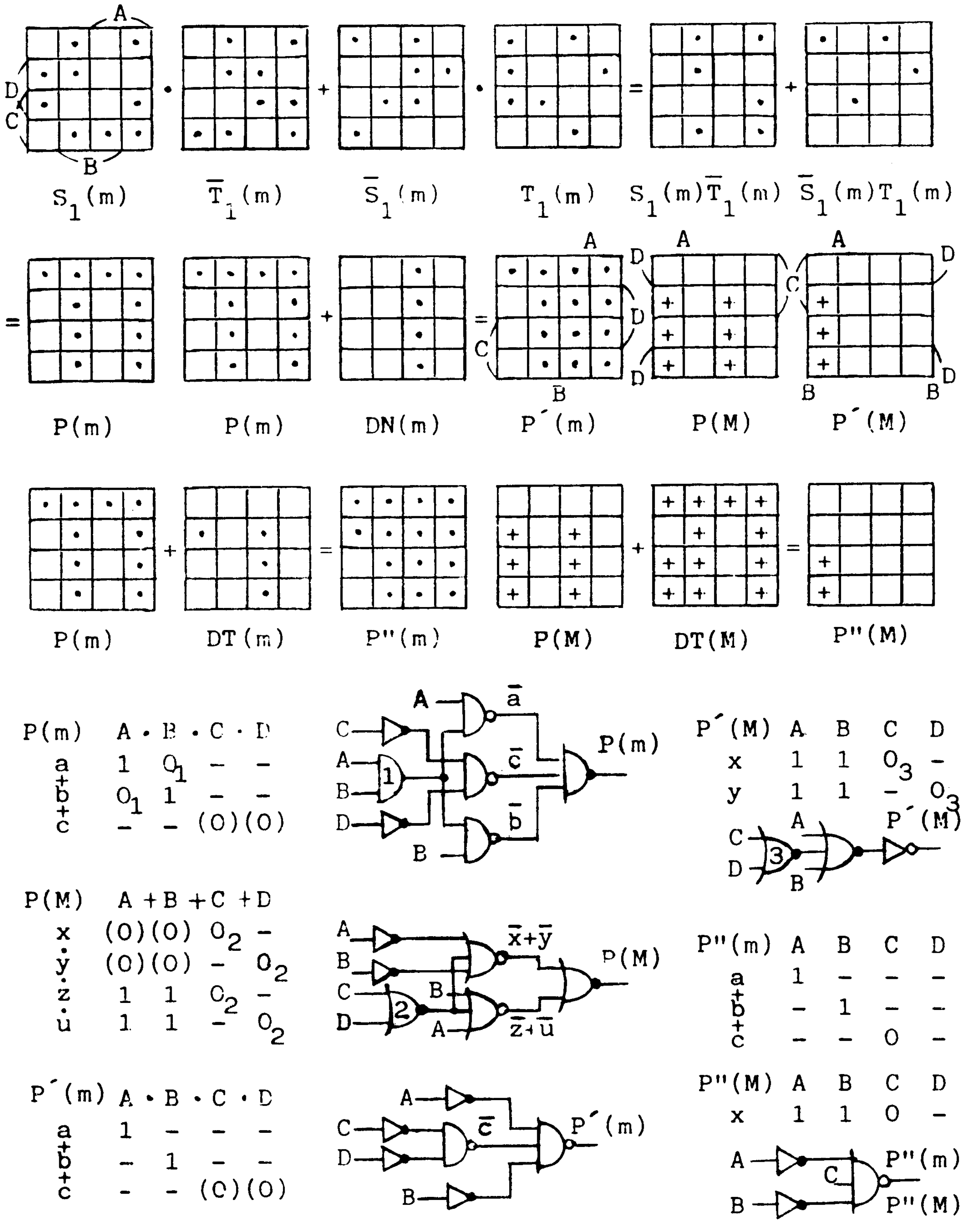


図1　関数 P の図形合成演算と無定義項演算

上記にえられた $P(m)$，$P(M)$ はこれらの条件に該当したもので，図示したように変数に正論理方式を適用する場合には所定の高位極性出力はえられない．関数形によっては（例えば次に示す関数 Q）高位極性出力がえられる場合もある．また関数 P だけに特定して高位極性出力をえるためには，この関数の回路にとりいれる変数だけに負論理を適用して目的は達せられるが，その変数が既存する回路で正論理で取扱はれている場合には変数のすべてについて否定素子を前置したとりいれ方をしなければならない．しかし無定義項が起用できる場合には事情がちがってくる．

無定義項 DN または DT の起用によって変貌した $P'(m)$ には正関数項（単独の変数真値）があり，$P'(M)$ には負関数項がない．従って前記の条件 i), ii) を外れており，図 1 に示したように適正な関数形が適正な高位極性出力としてえられることになる．同図の $P(m)$ または $P(M)$ に否定素子を付加しても出力には関数形の変貌を伴い，それぞれ $\overline{P}(M)$ または $\overline{P}(m)$ となり，極性の調整はできても関数形の確保はできないことになる．以下では議論の斉一性を保つために，適用論理は素子についても変数についても正論理に限定し，出力は積和形についても和積形についても高位極性に限ることにする．

2. 最大項図での論理関数合成と無定義項

論理関数の合成結果を和積形で求めたい場合には前述のように成分関数を和積形にそろえた上で最大項図上で合成すればよい．その例を和積形関数 $S_1(M)$ と和積形関数 $T_1(M)$ を成分関数として，対等論理和関数 Q を合成する場合につき下記する．

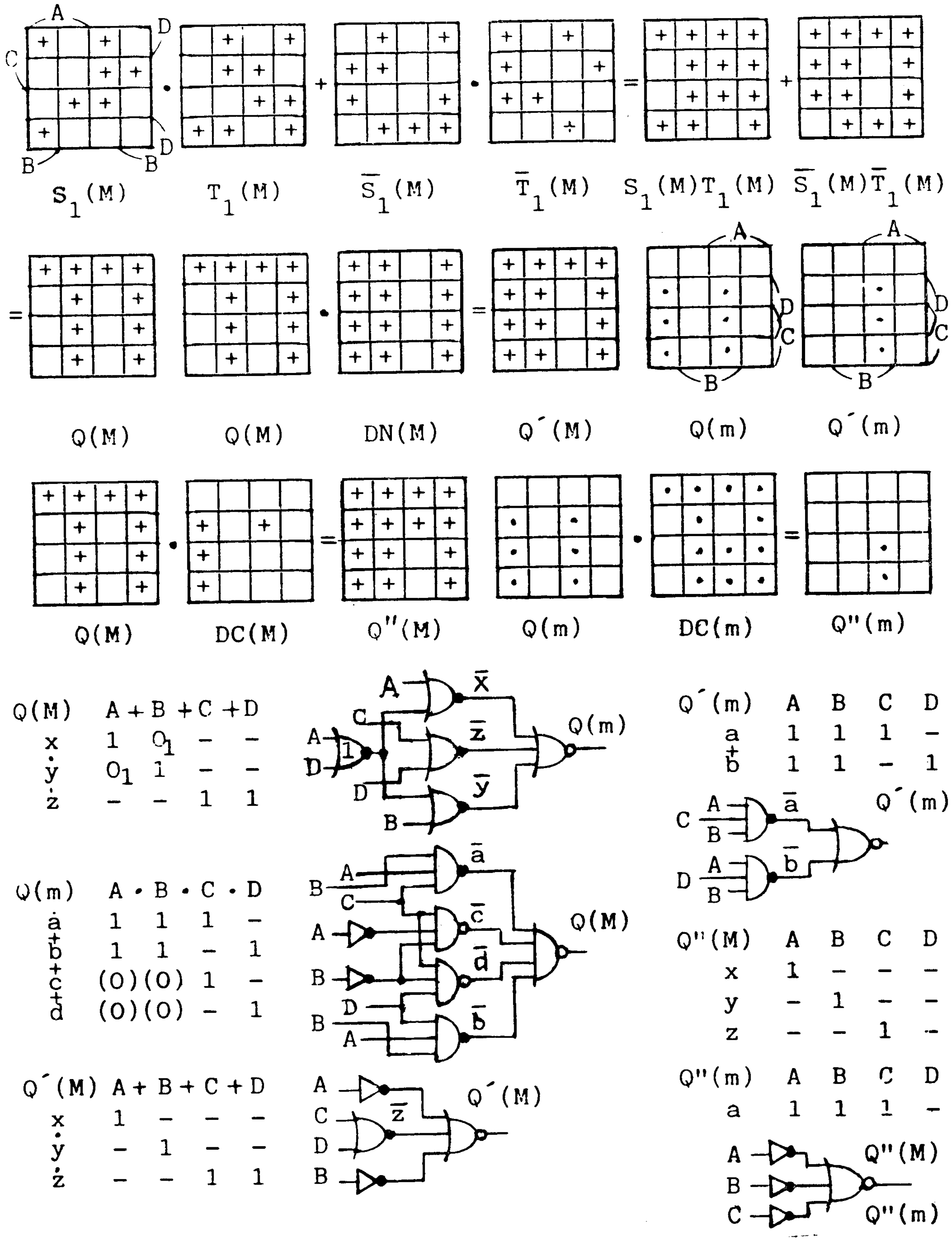
$$Q(M)=S_1(M)T_1(M)+\overline{S}_1(M)\overline{T}_1(M) \tag{8}$$

この場合は図 2 の上部の図形演算で示したように和積形 $Q(M)$ がえられるが，その空白部を最小項番地でよみとることにより積和形 $Q(m)$ はただちに求められる．関数 P と関数 Q との間には否定関係のあることは図 1 と図 2 を比較すれば明らかである．この場合の無定義項として関数 DN（前出），または関数 DC（下記）が起用できる場合について図 2 に示してある．

$$DC(m)=m_0+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{11}+m_{12}+m_{14}+m_{15} \tag{9}$$

$$DC(M)=M_{14}M_{13}M_{12}M_2 \tag{10}$$

簡単化結果をみると無定義項に関数 DN を起用しても関数 DC を起用しても，関数 $Q(M)$ との間の論理積結合で合成することにより，積和形 $Q'(m)$，$Q''(m)$ の双方について，また和積形 $Q'(M)$，$Q''(M)$ の双方について正関数項の形に簡単化され，高位極性出力が確保されていることがわかる．（$Q''(M)$ は14項の最大項の論理積と考えればよい.）



Q(M)	A +	B +	C +	D
x	1	0_1	−	−
•y	0_1	1	−	−
•z	−	−	1	1

Q(m)	A •	B •	C •	D
a	1	1	1	−
+b	1	1	−	1
+c	(0)	(0)	1	−
+d	(0)	(0)	−	1

Q´(M)	A +	B +	C +	D
x	1	−	−	−
•y	−	1	−	−
•z	−	−	1	1

Q´(m)	A	B	C	D
a	1	1	1	−
+b	1	1	−	1

Q''(M)	A	B	C	D
x	1	−	−	−
y	−	1	−	−
z	−	−	1	−

Q''(m)	A	B	C	D
a	1	1	1	−

図2　関数 Q の図形合成演算と無定義項演算

3. NAND または NOR 回路構成における極性調整

起用する素子についても変数についても正論理方式を用いるという前提で，積和形と和積形の双方について高位極性の出力にすることは，前述のように無定義項を起用することのほかに段数を4段まで許容することによっても可能で，これらについて下記の6変数の関数 R[2)] を引用して記述する．

$$R(m)=\Sigma(m_4,\ m_5,\ m_6,\ m_7,\ m_{13},\ m_{14},\ m_{15},\ m_{16},\ m_{17},\ m_{21},\ m_{23},\ m_{24},\ m_{25},\ m_{26},\ m_{27},\ m_{28},\ m_{30},\ m_{34},\ m_{35},\ m_{36},\ m_{37},\ m_{38},\ m_{39},\ m_{42},\ m_{43},\ m_{48},\ m_{57},\ m_{59}) \tag{11}$$

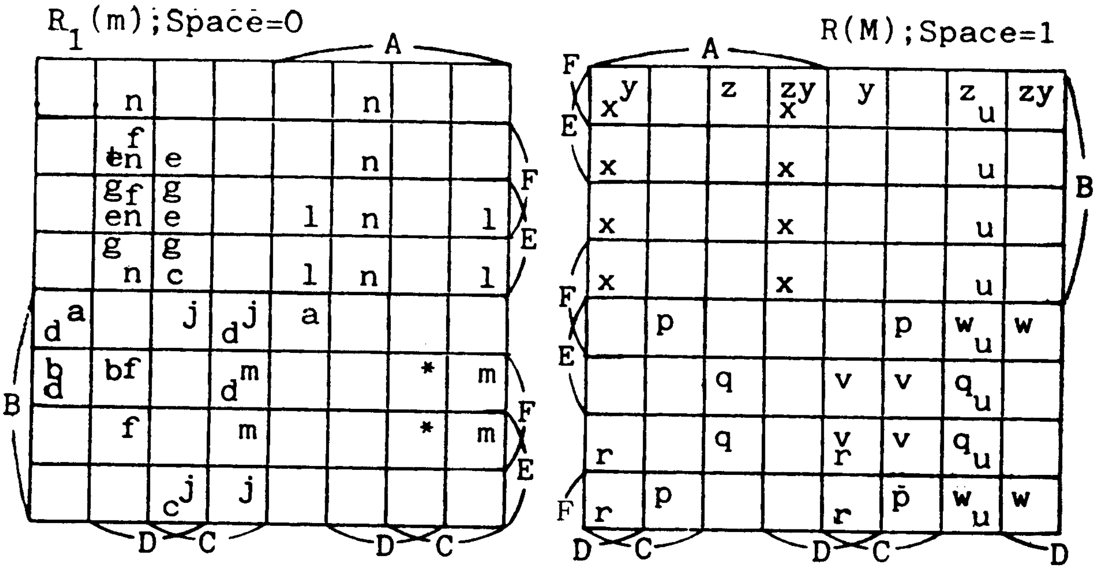
この関数の単極性入力による NAND または NOR の3段論理設計は文献 1) で取扱はれており，積和形のひとつ $R_1(m)$ と唯一最簡和積形 $R(M)$ の図形表示と真理値表は図 3 に示してある．前者は真値否定混成項のみで構成され，前記条件 i) に該当し，後者は負関数項を含んでおり，条件 ii) に該当しているものである．

まづ無定義項起用の場合を $R_1(m)$ について考えると，必要となる最小項の数が最少で，必要とされる正関数項が作りやすい展開項を選定することにして，ここでは $(m_{63}+m_{61})$ を無定義項に選んだ．図形表示では＊印で示してある．こうすることにより正関数項(＊)＝BCF がえられる．この1項（3入力 NAND 素子1個）で最終段には低位入力がえられるのであるから $R_1'(m)$ としての出力には高位極性のものがえられることになる．

無定義項 ＊＝BCDF の積和形へのとりいれは，論理関数の双対性から和積形では論理積項 M_0M_2 が取除かれる（常数1となる）ことを意味する．これを図3の$R(M)$で検討すると展開項 $u=\bar{A}\bar{C}\bar{D}$ が $u'=\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ になり，$q=\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{F}$ が $q'=A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{F}$ に変化したことになる．すなわち真値変数 A，B をとりいれた関数形 $R'(M)$ は，u' と q' の簡単化をとりやめたものとみることができる．$R'(M)$は負関数項がない関数形であるから高位極性の出力がえられることになる．このようにしてえられた結果の論理回路構成は図4 に示してある．このような無定義項の選定は，積和形，和積形のいづれにしてもよいが上記を一般化して，〝入力について組合せ禁止と考えてよい正関数項のひとつを論理和結合条件の無定義項としてとりあげる〟ということがひとつの基準と考えてよいことになるであろう．（なおここでは素子のファンイン特性は論外としていることを付言しておく．）

無定義項の設定それ自体が禁じられている場合には前置段を2段構成のものにして極性調整を考える以外に適当な手段が見出せない．この場合は展開項のひとつを選んで，その中間段への変数入力のすべてが高位となるように前置段を構成すればよい．これには積和形では NOR 素子，また和積形では NAND 素子の追加前置が必要になり，2段構成の前置段で対処することになる．このような対処の例を，図4 の無定義項起用の場合と図示を兼用した形で同図に示した．$R_1(m)$ については展開項 n を選んで2段の前置段を設定したものである．また $R(M)$ については展開項 q に真値変数 A をとりいれて $q'=A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{F}$

とした上で，項uについて2段構成の前置段を設定したもので，負関数項が2項ある場合の対処の例である．全体としては4段構成となるのであるからパルス伝送特性の点ではそれだけの劣化はやむをえない．いずれにしても極性調整を安易に否定素子の起用にたよることは関数形の変化を伴い，伝送特性にも問題のある不必要な多段化を招きやすい．ここに示した例により，任意の論理関数は積和形でも和積形でも単極性入力による NAND または NOR 回路を4段以内の構成で極性調整と関数形の双方が確保された形での回路化ができるといえるであろう．



$R_1(m)$	A	B	C	D	E	F
m	-	1	1	(0)	-	1
+ a	-	1	0^1	(0)	(0)	(0)
+ e	(0)	0^1	-	1	-	1
+ f	(0)	-	0^1	1	-	1
+ d	(0)	1	-	(0)	(0)	-
+ g	(0)	(0)	-	1	1	-
+ j	(0)	1	1	-	-	(0)
+ l	1	(0)	-	(0)	1	-
+ n	-	(0)	(0)	1	-	-
Dn´t.C.						
*= m_{61}	1	1	1	1	(0)	1
+ m_{63}	1	1	1	1	1	1

R(M)	A	+ B	+ C	+ D	+ E	+ F
x	1	1	-	1	-	-
• y	-	1	-	1	1	-
• z	-	1	(0)	-	1	1
• r	-	(0)	1	1	(0)	-
• p	-	(0)	1	(0)	-	1
• v	(0)	(0)	1	-	-	(0)
• w	(0)	(0)	(0)	-	-	1
• q	-	(0)	(0)	(0)	-	(0)
• u	(0)	-	(0)	(0)	-	-
u´	(0)	1	(0)	(0)	-	-
q´	1	(0)	(0)	(0)	-	(0)

b,c : other prime implicants.

図3　関数 $R_1(m)$，$R(M)$ の図形表示と真理値表

なお4図　の $R(M)$ の回路は，N 変数 M 展開項の積和形または和積形の任意の関数を単極性入力の3段構成の NAND または NOR 素子で回路化する場合の，必要素子数についての上限値　$N+M+1$（この例では16）と同一（無定義項の場合）か，1だけこえた数（4段構成の場合）で作られているものである．また関数 $R(M)$ の展開項の各項の図3における記入パターンをみると単一項名記入となっている最大項区画がいづれの項についても最低1区画はあるので，これは唯一最簡和積形であり，積和形に展開すれば完全主項和となるものである.[1] 一方 $R_1(m)$ については，4段構成の場合でも，無定義項による $R'_1(m)$ の場合でも $N+M+2$ となっており，他の主項bとcとが欠けているので完全主項和ではない．主項bとcを起用した $R_2(m)$[1] でも事情は同じである．一般に和積形における負関数項の除去には，積和形における正関数項の導入のように追加項を必要とせず，真値変数のとりいれということになるので，無定義項が起用できる場合には和積形，従っ

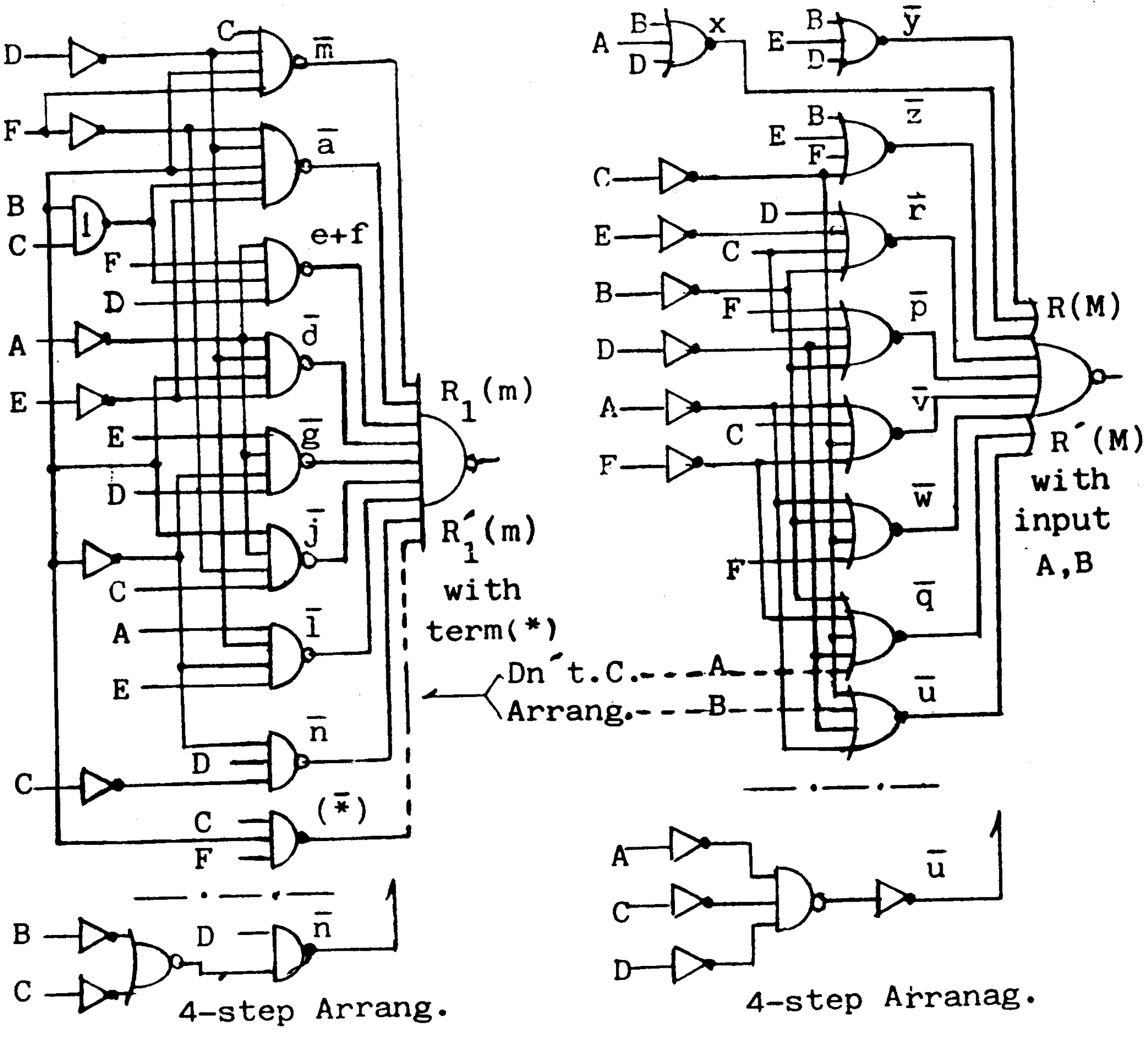
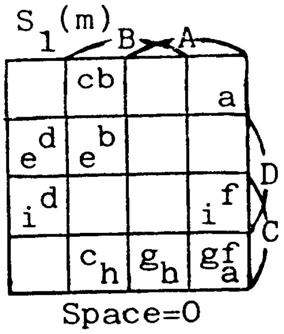


図4　関数 $R_1(m)$，$R(M)$ の高位極性出力論理回路

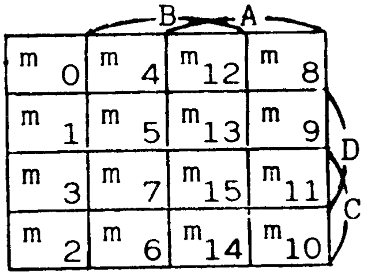
(注)　4段構成の $R_1(m)$ の場合は(＊)項を取除き $\overline{n}$ 項をとりかえる．

4段構成の $R(M)$ の場合は入力 A を取除き $\overline{u}$ 項をとりかえる．



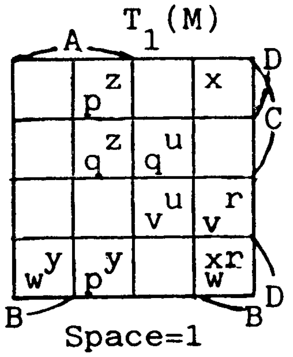
	^{cb}		a
e^{d}	e^{b}		
i^{d}			i^{f}
	c_{h}	g_{b}	$\overset{gf}{a}$

4 変数最小項番地



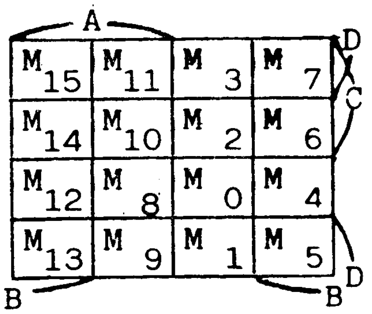
m_{0}	m_{4}	m_{12}	m_{8}
m_{1}	m_{5}	m_{13}	m_{9}
m_{3}	m_{7}	m_{15}	m_{11}
m_{2}	m_{6}	m_{14}	m_{10}

区画間論理和結合



	p^{z}		x
	q^{z}	q^{u}	
		v^{u}	v^{r}
w^{y}	p^{y}		$\overset{xr}{w}$

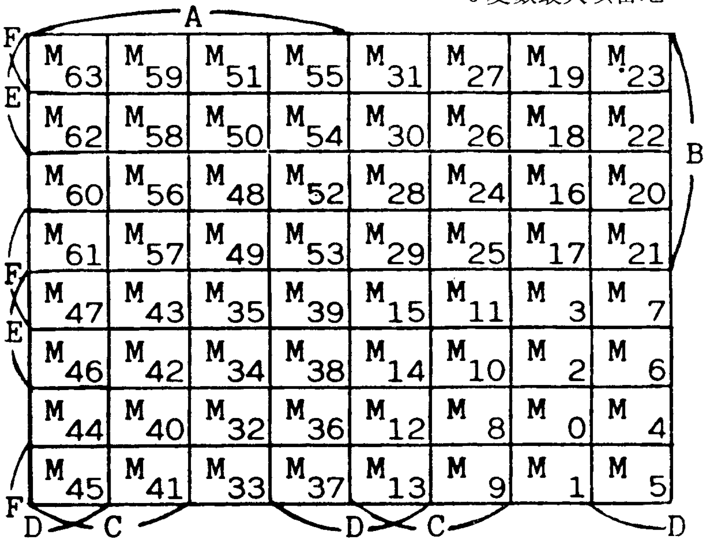
4 変数最大項番地



M_{15}	M_{11}	M_{3}	M_{7}
M_{14}	M_{10}	M_{2}	M_{6}
M_{12}	M_{8}	M_{0}	M_{4}
M_{13}	M_{9}	M_{1}	M_{5}

区画間論理積結合

6 変数最大項番地



M_{63}	M_{59}	M_{51}	M_{55}	M_{31}	M_{27}	M_{19}	M_{23}
M_{62}	M_{58}	M_{50}	M_{54}	M_{30}	M_{26}	M_{18}	M_{22}
M_{60}	M_{56}	M_{48}	M_{52}	M_{28}	M_{24}	M_{16}	M_{20}
M_{61}	M_{57}	M_{49}	M_{53}	M_{29}	M_{25}	M_{17}	M_{21}
M_{47}	M_{43}	M_{35}	M_{39}	M_{15}	M_{11}	M_{3}	M_{7}
M_{46}	M_{42}	M_{34}	M_{38}	M_{14}	M_{10}	M_{2}	M_{6}
M_{44}	M_{40}	M_{32}	M_{36}	M_{12}	M_{8}	M_{0}	M_{4}
M_{45}	M_{41}	M_{33}	M_{37}	M_{13}	M_{9}	M_{1}	M_{5}

区画間論理積結合

付図　関数 $S_1(m)$ の最小項図
関数 $T_1(M)$ の最大項図
および最小項図番地図，最大項番地図

てNOR回路構成による方が極性の調整については有利といえるであろう．

あとがき

NANDまたはNOR素子による単極性入力の論理回路構成が一般的なものとなってきているが，その最小化手法の方がおくれているように思はれる．またその基礎となる積和形，和積形の議論については前者に片よりすぎている感がある．これは論理関数には多数の同値関数形がありうるという事実に対して，両関数形を通じての最簡形を求めるということはたとえコンピュータプログラムによるとしても大変な手順3)が要求されるということのほかに極性調整の問題もあろうかと思はれる．双対図法によるとひとつの視野で両関数形の比較と変換ができて，無定義項条件についても関数形の立場からの検討ができるので論理設計機能は大幅に拡大される．このようなことを背景にしてNANDまたはNORの3段構成を中心に極性調整をふくめた関数合成と論理設計についての双対図起用の例を示した．集積回路の発達で素子の単価が低下した今日，回路構成段数についての最小化は演算速度の向上に関係して問題とされることのひとつであろう．そのような場合でのひとつのアプローチとなれば幸いである．

検討にご参加頂いた各位に深謝する．

文献

1)　豊田準三　双対図法による多変数論理設計　岡山理科大学紀要　第19号A，pp. 47～66，昭和59年3月

2)　B. R. Banister & Whitehead 著　雨宮好文，三宅康雄共訳　ディジタルシステム入門　マグロヒル好学社．昭和53年　頁59～63

3)　S. MUROGA著　室賀三郎，笹尾勤訳　論理設計とスイッチング理論　bit 別冊7　1981，共立社　頁86，頁134

双対図法による論理関数の合成と無定義項

Synthesis of switching functions by Dual Karnaugh Mapping

Junso TOYODA and Kenichi KONISHI

Department of Electronic Science, Okayama University of Science
Ridaicho 1-1, Okayama 700,JAPAN

(Received September 27, 1984)

Abstract

Synthesis of switching functions and designing NAND or NOR circuits arrangement by Dual Karnaugh Mapping are discussed, on the conditions of "dn't care terms" It is shown that "dn't care terms" are effective not only on simplification but also on adjusting input-output polarity which encounter on NAND or NOR circuit arrangement.