# 分数計画法の特性

成　久　洋　之

岡山理科大学　電子理学科

(昭和58年９月20日　受理)

## 1. まえがき

分数計画法 (Fractional Programming) は目的関数が分数形式で与えられる数理計画問題の解法手法に関する理論のことである．たとえば，経済活動での単位時間当りの稼ぎあるいは利益，または費用対効果等を論ずる時にこの種の分数形式で表わされる目的関数を持った問題にしばしば遭遇するはずである．

目的関数が分数形式で与えられる数理計画問題は一般に非線形計画問題として取扱われるわけであるが，従来考えられたきた非線形アルゴリズムをそのまゝ適用して解きうるものではない．したがって，一概に分数計画問題と云っても，その問題構造により取扱い方は全然異ってくる．最も簡単な形式としては線形条件条で与えられる凸実行可能領域での分子，分母が線形で与えられるような線形分数計画問題であろう．Charnes and Cooper は線形分数計画問題をパラメトリックな線形計画問題に変換して単体法 (Simplex Method) で解く手法を提案したが，パラメトリックな特性を如何に脱却させるかが，解法アルゴリズムの効率性に大きく効いてくる．

線形分数計画問題に限定したとしても，その変形問題は種々のタイプのものが考えられ，統一した理論構成は極めて困難であるが，ましてや非線形分数計画問題についての解法理論の構築に至って尚難しい．しかしながら求解の可能性については，これまで開発されている諸アルゴリズムを利用することによりかなり解きうるタイプも存在するわけである．

本論文では分数計画法のパラメトリック特性を明らかにするとともにパラメータ利用による問題変換により，凸計画法，凹計画法，二次計画法，単体法等の既開発理論への対応関係を確立するものである．第２節では分数計画法の概要を線形分数計画問題を中心に記述している．第３節では分数計画法のパラメトリック特性について論述している．あくまでも線形分数計画問題を中心に記述しているが，そのパラメトリック特性を明確にすることにより非線形分数計画への拡張の基確理論を確立している．第４節では線形分数形式の和として表わされる計画問題の解法理論に触れ，第５節では非線形分数計画法への一般化理論につき言及している．

## 2. 線形分数計画法の概要

分数計画問題は一般につぎのように定式化される．

$$\max\{N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\} \tag{1}$$

ただし，$\mathbf{x}$ は適当な次元の変数ベクトルとし，$S$ は実行可能領域，$N(\mathbf{x})$，$D(\mathbf{x})$ はそれぞれ $\mathbf{x}$ の実関数とする．ここで，$N(\mathbf{x})$，$D(\mathbf{x})$ が線形で与えられる場合として，つぎのような線形分数計画問題を考える事にしよう．

$$\max\{(\mathbf{cx}+\alpha)/(\mathbf{dx}+\beta)\mid \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\} \tag{2}$$

ただし，$\mathbf{A}$ は mxn 行列，$\mathbf{c}$，$\mathbf{d}$，$\mathbf{x}$ は $n$ 次元ベクトル，$\mathbf{b}$ は $m$ 次元ベクトルとし，$\alpha$，$\beta$ は定数とする．この場合，(2)の問題の実行可能領域 $S$ は

$$S=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$$

として表わされ，有界で空でないものとする，

$\mathbf{y}=t\mathbf{x}$ $(t\geqq0)$ とすると，(2)の目的関数は

$$\frac{\mathbf{cx}+\alpha}{\mathbf{bx}+\beta}=\frac{t(\mathbf{cx}+\alpha)}{t(\mathbf{dx}+\beta)}=\frac{\mathbf{cy}+\alpha t}{\mathbf{d}\mathbf{y}+\beta t}$$ となり，また

$$\mathbf{dy}+\beta \mathrm{t}=\gamma \tag{3}$$

とすると(2)はつぎのように表わせる．

$$\left.\begin{aligned}&\max(\mathbf{cy}+\alpha t)\\ s.t.\quad &\mathbf{Ay}=\mathbf{d}t,\ \mathbf{dy}+\beta t=\gamma,\ \mathbf{y}\geqq0,\ t\geqq0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ところが(4)の $\gamma$ を 1 となるように調整すると，

$$\left.\begin{aligned}&\max(\mathbf{cy}+\alpha t)\\ s.t.\quad &\mathbf{Ay}=\mathbf{b}t,\ \mathbf{dy}+\beta t=1,\ \mathbf{y}\geqq\mathbf{0},\ t\geqq0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

として与えられるが，$\gamma$ の正負にさらに変形する．

$$\left.\begin{aligned}&\max(\mathbf{cy}+\alpha t)\\ s.t.\quad &\mathbf{Ay}-\mathbf{b}t=\mathbf{0},\ \mathbf{dy}+\beta t=1,\ (\mathbf{y},\ t)=\geqq\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\max(-\mathbf{cy}-\alpha t)\\ s.t.\quad &\mathbf{Ay}-\mathbf{b}t=\mathbf{0},\ -\mathbf{dy}-\beta t=1,\ (\mathbf{y},\ t)\geqq\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

**実理 1**　(i)　(2)における最適解 $\mathbf{x}^*$ に対して $sgn(\mathbf{dx}^*+\beta)=sgn(\gamma)>0$ であり，(ii)　$(\mathbf{y}^*, t^*)$ が(4)の最適解であるならば，$\mathbf{y}^*/t^*$ は(2)の最適解である．ただし，$sgn(\gamma)$ は $\gamma$ の符号を意味する．

(証明)　$S$ の中に $\mathbf{x}^*$ が存在するものと仮定すると，

$$\frac{\mathbf{cx}^*+\alpha}{\mathbf{dx}^*+\beta}>\frac{\mathbf{c}(\mathbf{y}^*/t^*)+\alpha}{\mathbf{d}(\mathbf{y}^*/t^*)+\beta} \tag{8}$$

(i)の条件より，$\theta>0$ に対し $\mathbf{dx}^*+\beta=\theta\gamma$ となるはずである．ここで，$\hat{\mathbf{y}}=\theta^{-1}\mathbf{x}^*$，$\hat{t}=\theta^{-1}$ とすると

$$\theta^{-1}(\mathbf{dx}^*+\beta)=\mathbf{d}\hat{\mathbf{y}}+\hat{t}\beta=\gamma$$

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{b}\hat{t}=\mathbf{A}\theta^{-1}\mathbf{x}^*-\mathbf{b}\theta^{-1}=\theta^{-1}(\mathbf{Ax}^*-\mathbf{b})=\mathbf{0}$$

となって，$(\hat{\mathbf{y}},\ \hat{t})$ は(4)の実行可能解となっている．この場合の目的関数値は

$$\frac{\mathbf{c}\mathbf{x}^*+\alpha}{\mathbf{d}\mathbf{x}^*+\beta}=\frac{\theta^{-1}(\mathbf{c}\mathbf{x}^*+\alpha)}{\theta^{-1}(\mathbf{d}\mathbf{x}^*+\beta)}=\frac{\mathbf{c}\hat{\mathbf{y}}+\alpha\hat{t}}{\mathbf{d}\hat{\mathbf{y}}+\beta\hat{t}}=\frac{\mathbf{c}\hat{\mathbf{y}}+\alpha\hat{t}}{\gamma}$$

となる．一方，$\mathbf{y}^*/t^*$ での目的関数値は

$$\frac{\mathbf{c}(\mathbf{y}^*/t^*)+\alpha}{\mathbf{d}(\mathbf{y}^*/t^*)+\beta}=\frac{\mathbf{c}\mathbf{y}^*+\alpha t^*}{\mathbf{d}\mathbf{y}^*+\beta t^*}=\frac{\mathbf{c}\mathbf{y}^*+\alpha t^*}{\gamma}$$

となるので，これを(8)に代入し，$\gamma>0$ とすると

$$\mathbf{c}\hat{\mathbf{y}}+\alpha\hat{t}>\mathbf{c}\mathbf{y}^*+\alpha t^* \tag{9}$$

となる．これは（$\mathbf{y}^*$, $t^*$）が(4)の最適解ということに矛盾する．したがって，$\mathbf{x}^*=\mathbf{y}^*/t^*$

Q.E.D.

(2)での最適解 $x^*$ に対し，$\mathrm{sgn}(\mathbf{d}\mathbf{x}^*+\beta)<0$ ならば(2)の分数の分子，分母に（$-1$）を乗じても不変であることから，$\mathrm{sgn}(\mathbf{d}\mathbf{x}^*+\beta)>0$ とすることができる．また，目的関数を $f(\mathbf{x})$ とすると，$\max f(\mathbf{x})=\max\frac{-1}{f(\mathbf{x})}$ であることから，つぎの定理が成立する．

**定理 2**　$S$ が有界で空でないとき，(2)の最適解は(6), (7)の線形計画問題を解けば十分である．

(2)における $\mathbf{A}$ は mxn 行列であるが $\mathbf{A}$ は $m$ 個の列の1次独立であると仮定する．

**定理 3**　(2)の最大値は $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}\geqq\mathbf{0}$ での基底実行可能解である．

（証明）(6)と(7)において，それぞれの最大値は基底解となっている．(6)に限定すると基底解では $t>0$ である．この場合，基底変数の数は（m+1）個であり，その1つは必らず $t$ である．そこで $m$ 個の基底変数ベクトルを$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$とし $\mathbf{y}$ ベクトルの最初に並べる．$\mathbf{A}$ の階数は $m$ であるからこの $\mathbf{y}$ ベクトルに対応する $\mathbf{x}$ ベクトルも(2)の実行可能解となる．つまり，$\mathbf{y}=t\mathbf{x}$ の対応により，定理1から $\mathbf{y}^*/t^*=\mathbf{x}^*$ となっているので，$\mathbf{x}^*$ は当然(2)の基底実行可能解となっている．　Q.E.D.

つぎの線形分数計画問題を考える．

$$\max\{(\mathbf{c}\mathbf{x}+\alpha)/(\mathbf{d}\mathbf{x}+\beta)\,|\,\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$$

ここで，$\mathbf{d}\mathbf{x}+\beta>0$ を仮定する．いは基底実行可能解 $\mathbf{x}_B$ が求められたとする．$\mathbf{B}\mathbf{x}_B=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{B}=(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m)$, $\mathbf{x}_B\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{B}$ は $\mathbf{x}_B$ に対する基底行列である．さらに $\mathbf{x}_B$ に対応する $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{d}_B$ に対し，$\mathbf{z}^1=\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B+\alpha$, $\mathbf{z}^2=\mathbf{d}_B\mathbf{x}_B+\beta$, $\mathbf{a}_j\in\{\mathbf{A}-\mathbf{B}\}$ に対し，$\mathbf{u}_j=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$, $\mathbf{z}_j{}^1=\mathbf{c}_B\mathbf{u}_j$, $\mathbf{z}_j{}^2=\mathbf{d}_B\mathbf{u}_j$ をそれぞれ計算する．

ここで，単体法の場合と同様に $\mathbf{B}$ の列のどれか1つと $\mathbf{A}$ の中で $\mathbf{B}$ に含まれてない列との入れかえをする．この結果として得られた新しい基底変数値を $\hat{\mathbf{x}}_B$ とし，これに対応する基底を $\hat{\mathbf{B}}$ で示す．すなわち，

$$\hat{\mathbf{x}}_B=\hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{b},\ \hat{\mathbf{B}}=(\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{b}}_m)$$

となっている．ただし，$\hat{\mathbf{b}}_i=\mathbf{b}_i$ $(i\neq s)$, $\mathbf{b}_s=\mathbf{a}_j$ このとき，

$$\hat{\mathbf{x}}_{Bi}=\mathbf{x}_{Bi}-\mathbf{x}_{Bs}(U_{ij}/U_{sj}) \qquad (i\neq s)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{Bs}=\mathbf{x}_{Bs}/U_{sj}=\theta$$

となっているし，$\mathbf{u}_j=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ であるから

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{m} U_{ij}\mathbf{b}_i$$

として表わされる．

$$z = z^1/z^2, \quad \hat{z} = \hat{z}^1/\hat{z}^2$$

として基底が入れかわる前後の(2)の目的関数値を表わすとつぎのようになる．

$$\hat{z}^1 = z^1 + \theta(c_j - z_j{}^1)$$

$$\hat{z}^2 = z^2 + \theta(d_j - z_j{}^2)$$

したがって，目的関数値が改善されるためには $\hat{z} > z$ であればよい．

$$\frac{z^1 + \theta(c_j - z_j{}^1)}{z^2 + \theta(d_j - z_j{}^2)} < \frac{z^1}{z^2} \tag{10}$$

ところが，この問題では $\mathbf{dx} + \beta > 0$ を仮定しているので，$\hat{z}^2$，$z^2$ はつねに正であることからつぎのように整理される．

$$z^2\{z^1 + \theta(c_j - z_j{}^1)\} - z^1\{z^2 + \theta(d_j - z_j{}^2)\} > 0$$

さらに，ここでは非縮退の場合を考慮しているので，$\theta > 0$ となっている．したがって，

$$z^2(c_j - z_j{}^1) - z^1(d_j - z_j{}^2) > 0$$

となればよい．いま $\Delta_j$ をつぎのように定義する．

$$\Delta_j = z^2(c_j - z_j{}^1) - z^1(d_j - z_j{}^2)$$

$\Delta_j > 0$ となるためにはつぎの 3 つの場合が考えられる．

(i) $z_j{}^2 - d_j < 0$，$(z_j{}^1 - c_j)/(z_j{}^2 - d_j) > z^1/z^2$

(ii) $z_j{}^2 - d_j > 0$，$(z_j{}^1 - c_j)/(z_j{}^2 - d_j) < z^1/z^2$

(iii) $z_j{}^2 - d_j = 0$，$z_j{}^1 - c_j < 0$

以上のことから，ある任意の基底実行可能解が求められれば，非基底変数に対応する列の $\Delta_j$ を計算し，$\Delta_j > 0$ となるものがあれば，それを新基底に導入することにより目的関数を改善できる．このくり返しにより，基底の入れかえをおこなう毎に解を改善できるわけであるが，全ての列について，$\Delta_j \leqq 0$ となったときには，最適解となっているはずである．この場合，基底変数に対応する列については

$$z_j{}^1 = \mathbf{c}_B\mathbf{u}_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_i = c_j$$

$$z_j{}^2 = \mathbf{d}_B\mathbf{u}_j = \mathbf{d}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{d}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_i = d_j$$

となっているので

$$\Delta_j = z^2(c_j - z_j{}^1) - z^1(d_j - z_j{}^2) = 0$$

となって単体法の場合の目的関数の係数が基底変動のところでは 0 となっていることに対応している．

## 3. 分数計画法のパラメトリック特性

分数計画問題(1)は本来パラメトリックな特質を持つ．そこで，凸計画法あるいは凹計画法との関連において記述してみよう．まずつぎの凸計画法につき考える．

$$\min\{F(\lambda,\ \mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\in S,\ \lambda\in R^1\}$$

ただし，　$F(\lambda,\ \mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\lambda\mathbf{px}$

とし，$\mathbf{x}$，$\mathbf{p}$ は $n$ 次元ベクトル，$f(\mathbf{x})$ は $S$ 上で凸とする．さらに，つぎの各集合を定義する．

$$F(\lambda)=F(\lambda,\ \mathbf{x}_\lambda)=\min\{f(\mathbf{x})-\lambda\mathbf{px}\,|\,\mathbf{x}\in S\}$$

$$C_\lambda=\{\mathbf{x}\,|\,f(\mathbf{x})-\lambda\mathbf{px}=F(\lambda),\ \mathbf{x}\in S\}$$

ここで，$S$ は空でない閉じた有界集合と仮定する．

**定理 4**　$F(\lambda)$ は $\lambda$ に関して凹関数であり，しかも連続である．

（証明）　$v=t\lambda+(1-t)\mu,\ 0\leqq t\leqq 1$　とする．

$$F(v)=f(\mathbf{x}_v)-v\mathbf{px}_v$$
$$=t[f(\mathbf{x}_v)-\lambda\mathbf{px}_v]+(1-t)[f(\mathbf{x}_v)-\mu\mathbf{px}_v]\geqq tF(\lambda)+(1-t)F(\mu)$$

となることから $F(\lambda)$ は $\lambda$ に関する凹関数である．また $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ に関して連続であることから，$F(\lambda)$ は $\lambda$ に関して連続である．　Q.E.D.

**定理 5**　$\mu>\lambda$ ならば $\mathbf{px}_\mu\geqq\max\{\mathbf{px}\,|\,\mathbf{x}\in C_\lambda\}$

（証明）　$\mathbf{x}_\lambda\in C_\lambda$ であるということは

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{px}_\lambda\leqq f(\mathbf{x}_\mu)-\lambda\mathbf{px}_\mu$$

が成立することを意味する．同様に，$\mathbf{x}_\mu\in C_\mu$ は

$$f(\mathbf{x}_\mu)-\mu\mathbf{p}_\mu\leqq f(\mathbf{x}_\lambda)-\mu\mathbf{px}_\lambda$$

であることを意味する．この両不等式より

$$(\mu-\lambda)(\mathbf{px}_\mu-\mathbf{px}_\lambda)\geqq 0$$

となる．ところが，$\mu-\lambda>0$ であることから

$$\mathbf{px}_\mu\geqq\mathbf{px}_\lambda$$

$$\therefore\quad \mathbf{px}_\mu\geqq\max\{\mathbf{px}\,|\,\mathbf{x}\in C_\lambda\}$$

となり定理が成立する．　Q.E.D.

**系 5.1**　$f(\mathbf{x}_\lambda)-f(\mathbf{x})\leqq\lambda(\mathbf{px}_\lambda-\mathbf{px})$

であり，$\lambda\geqq 0$，$\mathbf{px}_\lambda\leqq\mathbf{px}$ であれば，

$$f(\mathbf{x}_\lambda)\leqq f(\mathbf{x})$$　となる．

（証明）　$F(\lambda)$ の定義より

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{px}_\lambda\leqq f(\mathbf{x})-\lambda\mathbf{px},\ \mathbf{x}\in S$$

が成り立つ．ゆえに，

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-f(\mathbf{x})\leqq\lambda(\mathbf{px}_\lambda-\mathbf{px})$$

となる．そこで，$\lambda\geqq 0$，$\mathbf{px}_\lambda-\mathbf{px}\leqq 0$ であれば，

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-f(\mathbf{x})\leqq 0$$

ゆえに，　$f(\mathbf{x}_\lambda)\leqq f(\mathbf{x})$　となる．　Q.E.D.

**系 5.2**　$\mathbf{px}_\mu\neq\mathbf{px}_\lambda$，$\mu>\lambda$ であるとき，

$$\lambda \leqq (f(\mathbf{x}_\mu)-f(\mathbf{x}_\lambda))/(\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda) \leqq \mu$$

となる関係が成立する．

（証明） $\mathbf{x}_\lambda \in C_\lambda$, $\mathbf{x}_\mu \in C_\mu$ であることより

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda \leqq f(\mathbf{x}_\mu)-\lambda\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu$$

$$f(\mathbf{x}_\mu)-\mu\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu \leqq f(\mathbf{x}_\lambda)-\mu\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda$$

が成立する．この2式よりつぎの関係が求められる．

$$\lambda(\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda) \leqq f(\mathbf{x}_\mu)-f(\mathbf{x}_\lambda) \leqq \mu(\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda)$$

となる．ゆえに，$\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda \fallingdotseq 0$ で，$\mu<\lambda$ のとき定理5より，$\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda \geqq 0$ であることから，$\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda>0$ となり

$$\lambda \leqq (f(\mathbf{x}_\mu)-f(\mathbf{x}_\lambda))/(\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu-\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda) \leqq \mu$$

が成立する． Q.E.D.

ここでつぎの2つの仮定を設ける．

仮定1 $\mathbf{p}\mathbf{x}>0$, $\mathbf{x} \in S$

仮定2 $\mathbf{p}\mathbf{x} \geqq 0$, $\mathbf{x} \in S$ で $S_0=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}\mathbf{x}=0,\ \mathbf{x} \in S\}$ は空でなくコンパクトであるものとする．

**定理6** 仮定2が成り立ち，$M_0=\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S_0\}$ であれば，$F(\lambda)<M_0$ ということとすべての $\mathbf{x} \in C_\lambda$ に対して $\mathbf{p}\mathbf{x}>0$ となる $\lambda$ が存在することとは同値である．

（証明） 仮定2により

(i) $F(\lambda)=M_0$ ということは $\mathbf{p}\mathbf{x}=0$ となるような $C_\lambda$ に含まれる $\mathbf{x}$ が存在する $\lambda$ のことであり，すべての $\lambda$ に対して，(ii) $F(\lambda) \leqq M_0$，すべての $\mathbf{x} \in S$ に対して，(iii) $\mathbf{p}\mathbf{x} \geqq 0$ となっている．したがって，(ii)より(i)を取除いた場合，(iii)を考慮すると定理の成立することがわかる． Q.E.D.

ここでつぎの集金を定義する．

$$I_0=\{\lambda \mid F(\lambda)=M_0\}$$

$$I_1=\{\lambda \mid F(\lambda)<M_0\}$$

**定理7** (i) 仮定1と $\mu>\lambda$ であることは $F(\mu)<F(\lambda)$ であることと同値である．(ii) 仮定2と $\mu \in I_1$ で $\mu>\lambda$ であることは $F(\mu)<F(\lambda)$ であることと同値である．

（証明） (i) $F$ の定義より

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\mu\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda \geqq f(\mathbf{x}_\mu)-\mu\mathbf{p}\mathbf{x}_\mu=F(\mu)$$

となる．$\mu>\lambda$ であるから，$\theta>0$ を用いて，$\mu=\lambda+\theta$ とする．

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\mu\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda=f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda-\theta\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda$$

となるが，$\theta>0$, $\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda>0$ であるから

$$f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda-\theta\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda<f(\mathbf{x}_\lambda)-\lambda\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda=F(\lambda)$$

となり，$F(\mu)<F(\lambda)$ が成立する．

(ii) $\lambda \in I_1$ のとき，定義より $\mathbf{p}\mathbf{x}_\lambda>0$ となるので，(i)での証明と同様に $F(\mu)<F(\lambda)$ が

成立する．$\lambda \in I_0$ のとき，$I_0$ の定義より $F(\lambda)=M_0$ となっている．ところが，$\mu \in I_1$ であるから

$$F(\mu)<M_0=F(\lambda)$$

となって $F(\mu)<F(\lambda)$． Q.E.D.

**系 7** $\mathbf{px}>0$，$\mathbf{x}\in S$ のとき，$k$ のすべての値に対して，$F^{-1}(k)$ は連続である．

**定理 8** $\mathbf{px}>0$，$\mathbf{x}\in S$ のとき，

(i) $\mathbf{x}_{\lambda k}$ は $\min\{(f(\mathbf{x})-k)/\mathbf{px} \mid \mathbf{x}\in S\}$ の解である．

(ii) (i)の分数計画問題に対するすべての解の集合は $C_{\lambda_k}$ であり，目的関数値の最小値は $\lambda_k$ である．

（証明） (i) $F^{-1}(k)$ はすべての $k$ に対し連続である．したがって，$\lambda_k=F^{-1}(k)$ となるものが各 $k$ に対し唯一つ存在する．いま，

$$(f(\mathbf{x})-k)/\mathbf{px}<(f(\mathbf{x}_{\lambda_k})-k)/\mathbf{px}_{\lambda_k}$$

を満たす $\mathbf{x}\in S$ が存在するものと仮定しよう．

この場合，$k$ はつぎのようになっている．

$$k=F(\lambda_k)=f(\mathbf{x}_{\lambda_k})-\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}$$

この $k$ を上式に代入すると

$$\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_{\lambda_k})+\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}}{\mathbf{px}}<\frac{\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}}{\mathbf{px}_{\lambda_k}}$$

となるが，$\mathbf{px}>0$ であるので，

$$\mathbf{px}_{\lambda_k}\{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_{\lambda_k})+\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}\}<\mathbf{px}(\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k})$$

となる．これを整理するとつぎのようになる．

$$\mathbf{px}_{\lambda_k}\{f(\mathbf{x})-\lambda_k\mathbf{px}\}<\mathbf{px}_{\lambda_k}\{f(\mathbf{x}_{\lambda_k})-\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}\}$$

ゆえに，

$$f(\mathbf{x})-\lambda_k\mathbf{px}<f(\mathbf{x}_{\lambda_k})-\lambda_k\mathbf{px}_{\lambda_k}=F(\lambda_k)$$

となるが，このことは $F(\lambda_k)$ の定義に矛盾する．

(ii) いま $\mathbf{x}^*_k$ を分数計画問題の解とし，

$$\theta=\frac{f(\mathbf{x}_k^*)-k}{\mathbf{px}_k^*},\quad \mathbf{x}_k^*\in S$$

とすると，

$$(f(\mathbf{x})-k)/\mathbf{px}\geqq\theta$$

となる．ところが，$\mathbf{px}>0$，$\mathbf{x}\in S$ であるから，

$$f(\mathbf{x})-k\geqq\theta\mathbf{px}$$

$$f(\mathbf{x})-\theta\mathbf{px}\geqq k=f(\mathbf{x}_k^*)-\theta\mathbf{px}_k^*,\quad \mathbf{x}\in S$$

$$\therefore\quad F(\theta)=k,\quad \theta=F^{-1}(k)=\lambda_k$$

$F^{-1}(k)$ は $k$ に対し 1 価関数であり，$\mathbf{x}_k^*\in C_\theta$ となっている． Q.E.D.

## 4. 線形分数関数計画法

一般に線形分数関数計画問題はつぎのように定式化される.

$$\max\{\sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in S\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_i(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{c}_i\mathbf{x}+a_i}{\mathbf{d}_i\mathbf{x}+\varepsilon_i},\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k) \\ S=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{A}\mathbf{x}\leqq\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\} \end{array}\right\} \tag{12}$$

ただし, $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{d}_i$ は $n$ 次元ベクトル, $\mathbf{A}$ は mxn 行列 $a_i$, $\varepsilon_i$ は実数, $\mathbf{b}$ は $m$ 次元ベクトルとし, $\mathbf{0}\in S$ と仮定する. また, また全ての $\mathbf{x}\in S$ に対して

$$\mathbf{d}_i\mathbf{x}+\varepsilon_i>0,\ (\varepsilon_i\fallingdotseq 0)\quad i=1,\ \cdots\cdots,\ k$$

であり, $S$ は有界な凸多面体であるとする.

これらの諸仮定により, 新たに,

$$f_i(\mathbf{x})=(\mathbf{c}_i\mathbf{x}+a_i)/(\mathbf{d}_i\mathbf{x}+1) \tag{13}$$

として表わし得る. (13)より

$$f_i(\mathbf{x})\mathbf{d}_i\mathbf{x}+f_i(\mathbf{x})=\mathbf{c}_i\mathbf{x}+a_i$$

となってつぎのように変形する.

$$f_i(\mathbf{x})=[\mathbf{c}_i-f_i(\mathbf{x})\mathbf{d}_i]\mathbf{x}+a_i \tag{14}$$

このことから, (11)の目的関数はつぎのようになる.

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{k}[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}+\sum_{i=1}^{k} a_i \tag{15}$$

まず, つぎの計画問題を考えてみよう.

$$\max\{\sum_{i=1}^{k}[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in S\} \tag{16}$$

ここで. $\mathbf{f}=(f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_k)$ としてつぎの各記号を定義する.

$$G(\mathbf{f})=\max\{\sum[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in S\} \tag{17}$$

$$P(\mathbf{f})=G(\mathbf{f})-\mathbf{1f}+\sum_{i=1}^{k} a_i \tag{18}$$

$$\{v\}=\{\mathbf{f}\mid P(\mathbf{f})=0\}$$

$$\{w\}=\{\mathbf{f}\}=(f_i)\mid f_i(\mathbf{x})=[\mathbf{c}_i-f_i(\mathbf{x})\mathbf{d}_i]\mathbf{x}+a_i\}$$

ただし, (18)の $\mathbf{1}$ はそのすべての要素が 1 からなる $k$ 次元ベクトルとする.

**定理 9** ベクトル $\mathbf{f}^*$ が(11)の問題の最適解となるための必要十分条件は $\mathbf{f}^*\in\{v\}\cap\{w\}$ である.

(証明) (11)の問題は

$$\max\{\sum_{i=1}^{k}[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}+\sum_{i=1}^{k} a_i\} \tag{19}$$

$$s.t.\quad \mathbf{x}\in S,\ f_i\geqq[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}+a_i \tag{20}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$$

として定義されるので十分条件は満足される.

必要条件については, $\{v\}\cap\{w\}$ が空集会でないことを主張すれば十分である. いま,

$$y_i(f_i)=[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\overline{\mathbf{x}}+a_i\quad (i=1,\ \cdots\cdots,\ k)$$

とする．ただし，$\bar{\mathbf{x}}$ は $f_i$ をメラメータとした(16)の問題の最適解とする．$\mathbf{f}$ から $y(\mathbf{f})$ への写像は連続写像であり，$G(\mathbf{f})$ は$\mathbf{f}$で単調非増加関数であるから，$E^k$ における閉じた単体 $F$ は $\mathbf{f} \in F$ を $F$ の部分集合に写像するようにとることができる．この場合，角谷の不動点定理により，$\mathbf{f}^\circ \in y(\mathbf{f}^\circ)$ となる点 $\mathbf{f}^\circ$ が存在することがわかる．つまり，$\{v\} \cap \{w\} \neq \phi$ となる． Q.E.D.

(11)の問題に対して，その解の唯一性を保証することは一般に困難である．しかしながら目的関数が変数分離可能に場合についてはこのことが保証される．そこでつぎの問題を考えよう．

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x}_i) \\ s.t. & \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b},\ \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \ i=1,\ \cdots\cdots,\ k \end{array}\right\} \quad (21)$$

この問題でのベクトル $\mathbf{f}^*$ の唯一性を証明するために，いわゆる Le Chatelier の原理と呼ばれているものにつきのべる．

**補助定理 1** $\mathbf{x}^*=(\mathbf{x}_1^*,\ \mathbf{x}_2^*,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{x}_r^*)$ が

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i \\ s.t. & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b},\ \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \ i=1,\ \cdots\cdots,\ r \end{array}$$

で与えられる線形計画問題の有限な最適解とし，

$\hat{\mathbf{x}}=(\hat{\mathbf{x}}_1,\ \hat{\mathbf{x}}_2,\ \cdots\cdots,\ \hat{\mathbf{x}}_r)$ が

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{d}_i \mathbf{x}_i \\ s.t. & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_i x_i \leqq \mathbf{b},\ \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \ i=1,\ \cdots\cdots,\ r \end{array}$$

で与えられる線形計画問題に対し，

$$\mathbf{d}_i \geqq \mathbf{c}_i\ \ (i=1,\ \cdots\cdots,\ m), \qquad \mathbf{d}_j < \mathbf{c}_j\ \ (j=m+1,\ \cdots\cdots,\ r) \quad (22)$$

ならば有限な最適解を与えるものとするとき，

つぎの条件は同時に成立しない．

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{d}_i \hat{\mathbf{x}}_i \leqq \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i^*\ \ (i=1,\ \cdots\cdots,\ m) \\ \mathbf{d}_j \hat{\mathbf{x}}_j > \mathbf{c}_j \mathbf{x}_j^*\ \ (j=m+1,\ \cdots\cdots,\ r) \end{array}\right\} \quad (23)$$

**定理10** ベクトル $\mathbf{f}^*$ が(21)の最適解に対応するとき，$\{v\} \cap \{w\}$ の唯一の点である．

(証明) いま $\mathbf{f} \in \{v\} \cap \{w\}$，$\mathbf{f} \neq \mathbf{f}^*$ となる $\mathbf{f}$ が存在するものと仮定しよう．すると，$\mathbf{f}$ も $\mathbf{f}^*$ も $\{v\}$ に含まれているので，$P(\mathbf{f})$ の単調減少性から

$$f_m^* > \bar{f}_m,\ \ 1 \leqq m \leqq k$$

$$f_n^* < \bar{f}_n,\ \ 1 \leqq n \leqq k$$

となっているはずである．そこでつぎのように仮定しても何ら一般性を失うものではない．

$$f_i^* > \bar{f}_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r$$

$$f_j^* = \bar{f}_j,\ \ j=r+1,\ \cdots\cdots,\ p$$

$$f_l^* < \bar{f}_l,\ \ l=p+1,\ \cdots\cdots,\ k$$

もし，$\bar{\mathbf{f}}$ が $\{w\}$ に含まれるならば，$\bar{f}_i$ $(i=1, \cdots\cdots, k)$ は(14)を満たさなければならない．ところが補助定理1により不可能である．よって，$\bar{\mathbf{f}}\notin\{v\}\cap\{w\}$ であり，$\mathbf{f}^*$ は $\{v\}\cap\{w\}$ の唯一の要素となる． Q.E.D.

**定理11** 関数 $\sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x}_i)$ の $S$ 上におけるすべての最大値は全域的最大値である．

（証明） (16)のようなパラメトリック表示より，局所的な最大値は閉じた凸集合 $S$ の内部において起こりうるはずはない．そこで，可能性があるとすれば，境界上においてである．いま $S$ の境界上で局所的最大値をとるものと仮定しよう．この $S$ の境界上 $\bar{\mathbf{x}}$ で最大値ととるとしたとき，$\bar{\mathbf{x}}$ の閉じた近傍点は $S$ に対する閉じた凸多面体部分集合 $\bar{S}\subset S$ となっている．この場合，$\bar{\mathbf{x}}$ に対応した $\bar{\mathbf{f}}$ は $\bar{\mathbf{f}}\in\{w\}$ であり，しかも $\bar{S}$ に対応して，$\bar{\mathbf{f}}\in\{v\}$ ともなっているはずである．

このことから，$\bar{\mathbf{x}}$ における $\bar{S}$ の支持超平面

$$H:\ \sum\,[\mathbf{c}_i-\bar{f}_i\mathbf{d}_i]\mathbf{x}_i$$

はまた同時に $S$ に対する支持超平面でもある．すなわち，$\bar{\mathbf{f}}\in\{v\}$ でもあることを意味する．したがって，$S$ の中に2個以上の最大点を持つという事は定理5に矛盾する．よって，局所的最大の存在を仮定した事が誤りであり定理が成立する． Q.E.D.

このように与えられた問題のパラメトリック化は非線形目的関数を最適解において線形化してしまう．このことは最適解が多面体集合 $S$ の頂点で生起するのでなければ，この線形化は最適解よりは目的関数の最適値の線形化であるという点でラグランジュ法のそれは類似しているといえる．

さて，ここで行列 $\mathbf{A}$ の要素が非負要素で構成されている場合（たとえば輸送問題等）につき考えてみると，パラメトリック表現における組合せ的特質より解法アルゴリズムを導ける．このような場合，明らかに補助定理1をつぎのように拡張できる．

**補助定理2** 補助定理1の場合と同じ条件および記号を用いるとすると，

$\mathbf{x}_j^*\neq 0$ に対して

$$\mathbf{d}_i\hat{\mathbf{x}}_i\geqq\mathbf{c}_i\mathbf{x}_i^* \qquad 1\leqq i\leqq m$$

$$\mathbf{d}_j\hat{\mathbf{x}}_j<\mathbf{e}_j\mathbf{x}_j^* \qquad m+1\leqq j\leqq r$$

となるような，$i$，$j$ が必らず存在する．

さて，つぎの $\partial_i(f_i)$ を定義しよう．

$$\partial_i(f_i)=[\mathbf{c}_i-f_i\mathbf{d}_i]\bar{\mathbf{x}}_i-f_i+a_i \qquad (24)$$

$$(i=1, \cdots\cdots, k)$$

ただし，$\bar{\mathbf{x}}$ はパラメータベクトル $\mathbf{f}$ のときの(16)の最適解とする．すると，$\{v\}$ における如何なる点も $\sum\partial_i(f_i)=0$ を満足するので，$\mathbf{f}\in\{v\}\cap\{w\}$ であることは $\partial_i(f_i)=0$ を意味する．定理5より最適な $\mathbf{f}$ は唯一つであることからそれに対応するものを

$$\min\ \sum\partial|_i(f_i)|=\sum\,|\partial_i(f_i^*)|=0 \qquad (25)$$

として探すことができる．

補助定理2により， $f_i > f_i^*$ $(i=1, \cdots\cdots, p)$， $f_j = f_j^*$ $(j=p+1, \cdots\cdots, q)$， $f_l > f_l^*$ $(l=(q+1, \cdots\cdots, k)$ となるような $\mathbf{f}$ に対し，少くとも $\partial_m(f_m)<0$ となる $f_m$ $(1 \leqq m \leqq p)$ が1つ，また $\partial_n(f_n)>0$ となる $f_n$ $(q+1 \leqq n \leqq k)$ が1つ存在するはずである．したがって，つねに $f_m$，$f_n$ の対を選び，

$$\Sigma|\partial_i(f_i)| > \Sigma|\partial_i(\hat{f}_i)|$$

となるように新しいベクトル $\mathbf{f}$ を求めればよい．

以上のことからつぎの解法手順が得られる．

勾配法によりアルゴリズム

ステップ1　$S$ における実行可能解を求める．

ステップ2　端点における目的関数の勾配を計算する．

ステップ3　目的関数の勾配に並行な線形関数の最大化の方向に単体法を適用する．

(i) もしこの単体法の適用が不可能であれば，その時は最適解となっている．

(ii) 単体法の適用が可能であるが，目的関数が実行可能方向に増加しないとき，パラメトリック手順に進む．

パラメトリック手順

ステップ1　現状での端点に対応する $\mathbf{f}$ に関して，$\{v\}$ に含まれる $\bar{\mathbf{f}}$ を求める．さらに，$\bar{\mathbf{f}} \in \{v\} \cap \{w\}$ であるか調べる．もし，$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^*$ であり，しかも $\bar{\mathbf{f}}$ としたときの $\bar{\mathbf{x}}$ が線形計画問題(16)の最適解であればそのときに $\bar{\mathbf{x}}$ が(21)の分数計画問題の最適解となっている．そうでないときにはステップ2へ進む．

ステップ2　$\partial_j(\bar{f}_j)<0$ ならば，$f_j^* \leqq \bar{f}_j$，

$\partial_j(\bar{f}_j)>0$ ならば，$f_j^* \geqq \bar{f}_j$ である．

(i) $\mathbf{f}^*$ が有界であれば，その上限を計算し，それらの中から新しい $\hat{\mathbf{f}}$ を選んでステップ1へ進む．

(ii) もし $\mathbf{f}^*$ のすべての要素が有界でないならば $\bar{\mathbf{f}}$ の要素の値を部分的に修正して有界になるようにしステップ1へ進む．

勾配法の効率性は如何に容易に勾配が計算できるかどうかによる．パラメトリック表示では

$$\partial f_j / \partial x_{ij} = c_{ij} - f_j d_{ij} - (\partial f_j / \partial x_{ij}) \mathbf{d}_j \mathbf{x}_j$$

となっている．したがって，単体法の軸操作では，$\mathbf{c}_j \mathbf{x}_j$ と $f_j \mathbf{d}_j \mathbf{x}_j$ の2項に対応する2つの独立な単体表を作成すれば単体表より直ちに勾配を求めうるはずである．勾配法のステップ3における(i)は Kuhn-Tucker の必要条件に対応するものである．勿論ここでは十分条件にもなっている．

## 5. 非線形分数計画法

$S$ をコンパクトな $E^n$ の部分集合とし，$N(\mathbf{x})$，$D(\mathbf{x})$ を連続な $\mathbf{x} \in S$ の実関数とする．

さらに，すべての $\mathbf{x}\in S$ に対して $D(\mathbf{x})>0$ と仮定する．

$(P1)\quad \max\{N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}$

$(P2)\quad \max\{N(\mathbf{x})-qD(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\},\ q\in E^1$

**補助定理 3** $F(q)=\max\{N(\mathbf{x})-qD(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}$ は $q\in E^1$ に対し $E^1$ で凸である．

（証明） $\mathbf{x}_t$ が $F(tq'+(1-t)q'')$ を $q'\neq q''$, $0\leqq t\leqq 1$ で最大にするものと仮定する．

$$
\begin{aligned}
F(tq'+(1-t)q'')&=N(\mathbf{x}_t)-(tq'+(1-t)q'')D(\mathbf{x}_t)\\
&=t\{N(\mathbf{x}_t)-q'D(\mathbf{x}_t)\}+(1-t)\{N(\mathbf{x}_t)-q''D(\mathbf{x}_t)\}\\
&\leqq t[\max\{N(\mathbf{x})-q'D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}]\\
&\quad+(1-t)\cdot[\max\{N(\mathbf{x})-q''D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}]\\
&=tF(q')+(1-t)F(q'')
\end{aligned}
$$

となって $F(q)$ は凸である． Q.E.D.

**補助定理 4** $F(q)$ は $q\in E^1$ に関し連続である．

**補助定理 5** $F(q)$ は厳に単調減少である．

（証明） いま $\mathbf{x}''$ が $F(q'')$ を最大化するものと仮定する．また $q'<q''$, $q'$, $q''\in E^1$ とする．

$$
\begin{aligned}
F(q'')&=\max\{N(\mathbf{x})-q''D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}\\
&=N(\mathbf{x}'')-q''D(\mathbf{x})<N(\mathbf{x}'')-q'D(\mathbf{x}'')\\
&\leqq\max\{N(\mathbf{x})-q'D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}=F(q')
\end{aligned}
$$

すなわち，$q'<q''$ のとき $F(q'')<F(q')$ となるので，$F(q)$ は厳に単調減少である．

Q.E.D.

**補助定理 6** $F(q)=0$ は唯一の解を持つ．

（証明） $F(q)$ は連続でしかも単調である．さらに，$\lim_{q\to-\infty}F(q)=+\infty$, $\lim_{q\to+\infty}F(q)=-\infty$ となることから $F(q)=0$ は唯一の解を持つ． Q.E.D.

**補助定理 7** $\mathbf{x}^+\in S$, $q^+=N(\mathbf{x}^+)/D(\mathbf{x}^+)$ とするとき，$F(q^+)\geqq 0$

（証明） $F(q^+)=\max\{N(\mathbf{x})-q^+D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}\geqq N(\mathbf{x}^+)-q^+D(\mathbf{x})=0$

ゆえに $F(q^+)\geqq 0$ Q.E.D.

**定理12**
$$
\begin{aligned}
q_0&=N(\mathbf{x}_0)/D(\mathbf{x}_0)\\
&=\max\{N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}
\end{aligned}
$$

となるための必要十分条件は

$$F(q_0)=\max\{N(\mathbf{x}_0)-q_0D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}=0$$

で，しかも $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ で $F(q_0)=0$ となる．

（証明）

$(a)$ $\mathbf{x}_0$ を $(P1)$ の解とすると

$$q_0=N(\mathbf{x}_0)/D(\mathbf{x}_0)\geqq N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in S$$

となっているはずである．このことから

(i) $N(\mathbf{x})-q_0D(\mathbf{x})\leqq 0 \quad \mathbf{x}\in S$

(ii) $N(\mathbf{x}_0)-q_0D(\mathbf{x}_0)=0$

が成立する．(i)より

$$F(q_0)=\max\{N(\mathbf{x})-q_0D(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}$$

であり，しかも補助定理７より $F(q_0)\geqq 0$ となっていることを考慮すると

$$\max\{N(\mathbf{x})-q_0D(\mathbf{x})\}=0$$

でなくてはならない．ゆえに $F(q_0)=0$

(ii)では $\max\{N(\mathbf{x})-q_0D(\mathbf{x}_0)\}$ が $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ をとれることを示している．

$(b)$ $\mathbf{x}_0$ を ($P2$) の解とし，しかも

$$N(\mathbf{x}_0)-q_0D(\mathbf{x}_0)=0$$

となっているものとする．仮定より

$$N(\mathbf{x})-q_0D(\mathbf{x})\leqq N(\mathbf{x}_0)-q_0D(\mathbf{x}_0)=0,\ \mathbf{x}\in S$$

であるから，(a)の場合と同様に(i)，(ii)のケースが成立する．ところが(i)より

$$q_0\geqq N(\mathbf{x})/D(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in S$$

となり，（$P1$）の問題の最大値を与えることがわかる．また，(ii)より $q_0=N(\mathbf{x}_0)/D(\mathbf{x}_0)$ となって，$\mathbf{x}_0$ が（$P1$）の解となっていることを示す． Q.E.D.

この定理により分数計画問題がパラメトクック計画問題に変換できることを示した．そこで，非線形分数計画問題として，$N(\mathbf{x})$ を凹関数，$D(\mathbf{x})$ を凸関数として与えられる問題の解法手法につき記述しよう．

（$P1$）の問題は与えられた $\delta>0$ に対し

$$F(q_n)-F(q_0)=F(q_n)<\delta$$

となるような $q_n=N(\mathbf{x}_n)/D(\mathbf{x}_n)$ と $\mathbf{x}_n$ とを求めるものとして定式化される．

ここで，$F(0)=\max\{N(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}\geqq 0$ と仮定しよう．

ステップ１　$q_2=0$，$k=2$ としてステップ３へ．

ステップ２　$\mathbf{x}_1=\in S$，$q_2=N(\mathbf{x}_1)/D(\mathbf{x}_1)$，$k=2$ としてステップ３へ．

ステップ３　凹計画法によりつぎの問題を解き，その解を $\mathbf{x}_k$ とする．

$$F(q_k)=\max\{N(\mathbf{x})-q_kD(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in S\}$$

ステップ４　$F(q_k)<\delta$ ならば停止．

このとき，$F(q_k)>0$ ならば $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_n$

$F(q_k)=0$ ならば $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_0$

ステップ５　$F(q_k)\geqq\delta$ ならば $q_{k+1}=N(\mathbf{x}_k)/D(\mathbf{x}_k)$ を計算し，$k$ を $k+1$ としてステップ３へ．

**定理13**　上記アルゴリズムは必ず収束する．

（証明）(a)補助定理７より $F(q_k)\geqq 0$ であるが，最適解が求められてない段階では $F(q_k)>0$ となっている．定義より $N(\mathbf{x}_k)=q_{k+1}D(\mathbf{x}_k)$，したがって

$$F(q_k)=N(\mathbf{x}_k)-q_k(\mathbf{x}_k)=q_{k+1}D(\mathbf{x}_k)-q_kD(\mathbf{x}_k)$$
$$=(q_{k+1}-q_k)D(\mathbf{x}_k)$$

ところが，$D(\mathbf{x}_k)>0$ であるから $q_{k+1}>q_k$ となる．

(b) $\lim_{k\to\infty} q_k=q(\mathbf{x}_0)=q_0$ となっているはずである．もし，そうでなければ，$\lim_{k\to\infty} q_k=q^*<q_0$ となる $q^*$ が存在し $\lim_{k\to\infty} F(q_k^*)=F(q^*)=0$ となるような $\mathbf{x}_k^*$ の系列を構成しうるはずである．ところが $F(q)$ に補助定理5より厳に単調減少であるから

$$0=F(q^*)>F(q_0)=0$$

となる．これは矛盾することになり $\lim_{k\to\infty} F(q_k)=F(q_0)$ となり，そのとき補助定理4より $\lim_{k\to\infty} q_k=q_0$ となる．以上よりこのアルゴリズムは収束する． Q.E.D.

## 6. まとめ

分数計画法としての最も基本的な線形分数計画問題とその解法策略 (solution strategy) につきのべ，本来分数計画の宿命として特質，すなわち，パラメトリック計画法との関連性を明確にした．特に線形分数計画問題に対しては単体法が適用されるわけであるが，パラメトリック線形計画法としてみなしてしまうと効率性が低下する．そこで，可能な限りパラメトリック特性を除去しながら単体法的手法で解きうるならば，その方が望ましいわけである．しかしながら，分数計画を一般化する段階で，このパラメトリック特性の故に，本来与えられた変数に関し非線形で与えられる問題が，ある特定のパラメータに関し線形化されることもあり得る．このことはある意味ではラグランジュ法と類似しているものであるが，このような線形化により非線形の問題も解きうる形に変換しうる利点も兼供えているといえよう．以上，分数計画法として個々に提案された線形分数計画法におけるパラメータ特性を明らかにすることにより，非線形計画法への一般化を試みたものである．このことにより，分子，分母の形式が凸関数，凹関数，準凸関数，擬似凸関数あたりの分数計画問題も，与えられた実行可能領域が凸領域であれば従来の解法手法を適用することにより解きうる事を示した．しかしながら，いまのところ，分数計画問題を即凸計画法あるいは凹計画法で解く事は不可能のようである．これらの可能性については今後の検討を待ちたい．

### 文献

[1] Charnes, A. and Cooper, W. W. "Programming with Linear Fractional Functionals," Naval Research Logistics Quarterly, **9**, No. 3, pp. 181～186 (1962)

[2] Wagner, H. M. and Yuan, J. S. C. "Algorithmic Equivalence in Linear Fractional Programming," Management Science, **14**, No. 5, pp. 301～305 (1968)

[3] Bector, C. R. "Programming Problems with Conuex Fractional Functions," Journal of Operations Research Society America, **16**, pp. 383～391 (1968)

[4] Bitɹan, G. R. and Novaes, A. G. "Linear Programming with a Fractional Objective Function," Journal of Operations Research Society America, **21**, pp. 22～29 (1973)

# Some Properties on Fractional Programming

Hiroyuki NARIHISA

*Depertment of Electronic Science*
*Okayama University of Science*
*Ridaicho 1-1 Okayama 700, JAPAN*

(Received September 20, 1983)

The importance of fractional objective function derives from fact that it usually represents a time rate of earnings or profit (equivalent to an interest rate on capital investment) and, thus is a true measure of economic performance.

In any case, fractional program can not be treated as the original fractional form itself. Therefore, the fractional programs must be transformed to some mathematical program by some means. Generally, fractional programs are reduced to parametric programs.

In this paper, we reresent some characteristics of parameters concerning the fractional programs. By analysing the properties on a linear fractional progarm, a general fractional programming can be developed with the condition of the convex feasible region.