Topological Aspects for Solving Generalized Transportation Problems

成　久　洋　之

岡山理科大学教養部

（昭和57年9月24日　受理）

1. まえがき

Hichcock and Koopmans の stepping stone method として知られている古典的輸送問題に対し，Generalized Transportation Problems に対する解法は一般的にかなり複雑となる。しかしながら，現実的には機械割当て問題その他として定式化されるケースが多い．そこで，単体法で直接解くよりは効率的アルゴリズムとして，classical transportation problems の場合に対応した Generalized stepping stone method を利用しようという考え方が，Egon Balas, P. L. Ivanescue, J. R. Lorie や K. Eisemann 等により提案されているが，本論文ではこれらのアルゴリズムを Topological な側面よりまとめてみたものである．

Generalized Transportation Problems は Ferguson and Dantzig や Charnes and Cooper 等によりすでに取り扱われているように

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} / \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \pm x_{is} = a_i, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \geqq 0,\ x_{is} \geqq 0 \right\} \tag{1}$$

として定式化されるものである。ここで，機械が m 種類，n 種類の製品，i 機械での生産時間を a_i，j 製品についての需要数を b_j，i 機械で j 製品の製造に要する時間を d_{ij}，その費用を c_{ij}，i 機械での j 製品の生産量を x_{ij} として考えると，いわゆる Machine Loading Problems とみなすことができる．

この問題については，まず初期実行可能解から出発し，逐次その解を改善しながら最適解を求めようとするものである．したがって，その解が最適解となっているかどうかをチェックし，最適でなければ解を改善するように基底要素の入れ替えをおこなうものである．

古典的輸送問題の解法において利用するループ技法は stepping stone method に対応して極めて効率的手法であるが，これはグラフにおけるループが完全に閉じているので好都合であった．しかるに Generalized 型の問題となると，それに対応するグラフは閉じたループを含むトリーを構成することになり簡単な方法で最適解は求められない事になる．

(1)の問題において，$d_{ij}=1, \forall i,j$ とし，$x_{is}=0, \forall i,s$ とするといわゆる古典的輸送問題となり compact tableau で表示され表1のように示される．ここで，この輸送問題の実行

表 1

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}	a_i
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_j		b_n	

表 2

5	2				7
	4	3			7
		1	4	3	8
5	6	4	4	3	

可能解のみを表わすものとしてたとえば表 2 のように示すものとする．この問題は $m=3$, $n=5$ で，$a_1=7$, $a_2=7$, $a_3=8$, $b_1=5$, $b_2=6$, $b_3=b_4=4$, $b_5=3$ を示している．そこで 1 つの実行可能解としては表 2 数字がそれぞれ対応する変数値を示すものとする．たとえば $x_{11}=5$, $x_{12}=2$, $x_{13}=0$ となっている．表 2 での実行可能解を改善するとき，何らかの方法で，x_{13} を基底とする方が望ましいと判明したとしよう．このとき，表 2 より表 3 のような形で新しい実行可能解を考える．

表 3

$5-\theta$	$2+\theta$				7
	$4-\theta$	$3+\theta$			7
θ		$1+\theta$	4	3	8
5	6	4	4	3	

表 3 では各値が実行可能解となるためには

$$\min\{5-\theta,\ 4-\theta,\ 1-\theta\}\geqq 0$$

となるように $\max\theta$ をとれば $\theta=1$ となる．すなわち，表 2 の実行可能解から表 3 の実

行可能解を求める段階で，$\{x_{ij}\}$ をグラフにおけるノード集合と考えると，

$$\{x_{31},\ x_{33},\ x_{23},\ x_{22},\ x_{12},\ x_{11},\ x_{31}\}$$

となって1つのループを形成することがわかる．つまり表3で点線で示したループに対応しているわけである．実行可能解の改善法としてこのようなループ技法で古典的な輸送問題の最適解を求めうる．

2. 基本的概念

(1)で表わされる問題は明らかに線形計画問題であり，x_{ij} に対応する係数要素は

$$(\underbrace{\underbrace{\cdots\cdots\cdots d_{ij}}_{i}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{m}\underbrace{\underbrace{\cdots 1}_{j}\cdots\cdots\cdots}_{n})$$

となっており x_{is} に対応する要素は $(\underbrace{\cdots\cdots\ \pm 1\cdots}_{m})$ となっていることから，条件式の係数行列を $\mathbf{P}$ として，その列ベクトルを p_{ij} とするとつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{array}{ll} p_{ij}=d_{ik}e_i+e_{m+k} & (k\neq n+1) \\ p_{i,n+1}=\pm e_i & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ただし，e_h $(h=1,\ \cdots\cdots,\ m+n)$ は $(m+n)$ 次元線形空間の h 番目の単位ベクトルを表わすものとする．

いまある基底実行可能解 x^0 が求められたものと仮定しよう．このとき，$x^0{}_{ij}>0$ となるような p_{ij} のすべての集合 M^0 を基底という．さらに，x^0 が non-degenerate であると仮定すると，$x^0{}_{ij}>0$ に対応して $(m+n)$ 個の1次独立な p_{ij} が存在するはずである．いまもし $p_{i_0j_0}$ が解を改善するために基底に導入されるべき要素であるとすると $\widetilde{M}=M^0U\{p_{i_0j_0}\}$ とする．

有限次元でのベクトル空間での一次従属なベクトル集合で，そのすべての真の部分集合が一次独立であるようなベクトル集合を最小従属集合という．

$p_{i_0j_0}\notin M^0$ と M^0 の部分集合とからなる最小従属集合は $p_{i_0j_0}$ の最小従属集合という．集合 S が $p_{i_0j_0}$ の最小従属集合であるための必要十分条件は $p_{i_0j_0}$ が S の他のすべての要素の線形結合として表わされることは明らかである．

$\widetilde{M}$ の異なる要素からなる系列 $\{p_{i_1j_1},\ p_{i_2j_2},\ \ldots,\ p_{i_tj_t}\}$ で，

しかも　$i_{\alpha-1}=i_\alpha\neq i_{\alpha+1},\ j_{\alpha-1}\neq j_\alpha=j_{\alpha+1}$

あるいは　$j_{\alpha-1}\neq i_\alpha=i_{\alpha+1},\ j_{\alpha-1}=j_\alpha\neq j_{\alpha+1}$

で，さらに　$j_k\neq n+1 \quad (k=2,\ \ldots,\ t-1)$

となっているものを $\widetilde{M}$ における径路 (path) という．

$\widetilde{M}$ の部分集合 S において，S の要素 $p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ に対し $p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ との間に径路が存在しているとき，$S\subseteqq\widetilde{M}$ は連結 (connected) しているという．

連結している集合 S が与えられたとき，S の要素 p_{ij} において，$j=n+1$ である場合，

または $p_{i_1j}\in S$ と $p_{ij_1}\in S$ とにおいて $i_1\neq i,\ j_1=j$ である場合，これらの S の要素のことを S の隅 (corner) という．

連結集合 $S\subseteqq\widetilde{M}$ が隅のみから構成されるとき，これをループ (loop) あるいは巡回路 (circuit) という．

ループ L の要素 p_{ij} に対して，ただ1個の $p_{i_1j}\in L$ $(i_1\neq i)$ とただ1個の p_{ij_1} $(j_1\neq j)$ からなるループを単純ループという．単純ループと $p_{i,n+1}\in\widetilde{M}$ とを核 (kernel) という．核 $k_1, k_2, \dots, k_h$ の集合において

$$K_{i_0}\subsetneqq\bigcup_{i=1,i\neq i_0}^{k}K_i\quad(i_0=1,\ \dots,\ h)\tag{3}$$

となるとき，この核の集合は独立であるという．2個の独立な核を含むループを二重ループ (double loop) といい，単純ループでも二重ループでもないものを多重ループ (multiple loop) という．

単純ループ $(p_{i_1j_1}, p_{i_1j_2}, \cdots, p_{i_kj_1})$ が与えられたとき，

$$\overset{k}{\underset{h=1}{\pi}}d_{i_hj_h}=\overset{k}{\underset{h=1}{\pi}}d_{i_hj_{h+1}}\ (j_{h+1}=j_1)\tag{4}$$

であるならば，このループは対称 (symmetricel) であるという．基底の連結部分集合の最大のものをその基底の成分 (components) という．

3. 最小従属集合の性質

定理1. いかなる最小従属集合 $S\subseteqq\widetilde{M}$ も連結している．

(証明) S が連結してないと仮定すると，少くとも1個の最大連結部分集合 S_0 をもつことになる．この S_0 は最小従属集合の定義より従属ではない．すなわち，

$$\sum_{p_{ij}\in S_0}\alpha_{ij}p_{ij}=\sum_{p_{ij}\in S_0}\alpha_{ij}(d_{ij}e_i+e_{m+j})\neq0$$

となり，$(\sum_{p_{i_0j}\in S_0}\alpha_{i_0j}d_{i_0j})e_{i_0}\neq0$ となる i_0 が存在するかあるいは $(\sum_{p_{ij_0}\in S_0}\alpha_{ij_0})e_{m+j_0}\neq0$ となる j_0 が存在するかのいずれかである．しかしながら，

$$p_{i_0j}\in S-S_0\quad\text{あるいは}\quad p_{ij_0}\in S-S_0$$

となるような e_{i_0} あるいは e_{m+j_0} は存在しないので，S の従属性と矛盾する．

定理2 非対称な単純ループ $L=\{p_{i_1j_1}, p_{i_2j_1}\cdots, p_{i_1j_t}\}$ が与えられたとき，集合 $\{e_{ir}\}\cup L$ と集合 $\{e_{m+jr}\}\cup L$ とは最小従属である．ただし，$r=1,\ 2,\ \cdots,\ t$ とする．

(証明)

$$\triangle=\overset{t}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_kj_k}-\overset{t}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}$$

$$g^1{}_{i_kj_h}=\frac{1}{\triangle}\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_kj_k}\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1)$$

$$g^1{}_{i_tj_t}=\frac{1}{\triangle}\overset{t-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}$$

$$g^1{}_{i_{h+1}j_h}=-g^1{}_{i_hj_h}\quad(h=1,\ \cdots,\ t)$$

$$g^2{}_{i_{h+1}j_h}=\frac{d_{i_1j_1}}{\triangle}\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_kj_k}\quad(h=1,\ \cdots,\ t-1)$$

$$g^2{}_{i_1j_t}=\frac{1}{\triangle}\overset{t-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}$$

$$g^2{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-\frac{d_{i_{h+1}j_h}}{d_{i_{h+1}j_{h+1}}}g^2{}_{i_{h+1}j_h}\quad(h=1,\ \cdots,\ t)$$

と各記号を定義する．ただし $i_{t+1}=i_1$, $j_{t+1}=j_1$ とする．

$$g^1{}_{i_hj_h}p_{i_hj_h}+g^1{}_{i_{h+1}j_h}p_{i_{h+1}j_h}=g^1{}_{i_hj_h}(p_{i_hj_h}-p_{i_{h+1}j_h})$$
$$=\frac{1}{\triangle}\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_kj_h}(d_{i_hj_h}e_{i_h}-d_{i_{h+1}j_h}e_{i_{h+1}})\tag{5}$$

$$g^1{}_{i_{h+1}j_{h+1}}p_{i_{h+1}j_{h+1}}+g^1{}_{i_{h+2}j_{h+1}}p_{i_{h+2}j_{h+1}}$$
$$=\frac{1}{\triangle}\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+2}{\pi}}d_{i_kj_k}(d_{i_{h+1}j_{h+1}}e_{i_{h+1}}-d_{i_{h+2}j_{h+1}}e_{i_{h+2}})\tag{6}$$

(5), (6)式において

$$(\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_hj_h})d_{i_{h+1}j_h}=(\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+2}{\pi}}d_{i_kj_k})d_{i_{h+1}j_{h+1}}$$

であることから(5)+(6)においては $e_{i_{h+1}}$ の係数は 0 となる．これらの事を順次 $h=1,\cdots,t$ までくり返すことにより

$$e_{i_1}=g^1{}_{i_1j_1}p_{i_1j_1}+g^1{}_{i_2j_1}p_{i_2j_1}+\cdots+g^1{}_{i_1j_t}p_{i_1j_t}\tag{7}$$

となり，同様な考え方で

$$e_{m+j_1}=g^2{}_{i_1j_1}p_{i_1j_1}+g^2{}_{i_2j_1}p_{i_2j_1}+\cdots+g^2{}_{i_1j_t}p_{i_1j_t}\tag{8}$$

がそれぞれ求められる．つまり $\{e_{ir}\}\cup L$ は $\{e_{ir}\}$ のまた $\{e_{m+jr}\}\cup L$ は $\{e_{m+jr}\}$ の最小従属集合となっていることがわかる．

定理 3　単純ループ $L'=\{p_{i_0j_0}, p_{i_0j_1},\ \cdots,\ p_{i_tj_t}p_{i_tj_1}\}$ が，一次従属であるための必要十分条件はそのループが対称であることである．このとき，L' は最小従属でもある．

（証明）　いま L' を対称ループとし，

$$f_{i_hj_{h+1}}=\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_k}/\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}}\quad(h=0,\ \cdots,\ t)$$

$$f_{i_{h+1}j_{h+1}}=-f_{i_hj_{h+1}}\quad(h=0,\ \cdots,\ t-1)$$

としよう．すると，

$$f_{i_hj_{h+1}}p_{i_hj_{h+1}}+f_{i_{h+1}j_{h+1}}p_{i_{h+1}j_{h+1}}=f_{i_hj_{h+1}}(p_{i_hj_{h+1}}-p_{i_{h+1}j_{h+1}})$$
$$=\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}p_{i_kj_k}/\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}}(d_{i_hj_{h+1}}e_{i_h}-d_{i_{h+1}j_{h+1}}e_{i_{h+1}})\tag{9}$$

$$f_{i_{h+1}j_{h+2}}p_{i_{h+2}}+f_{i_{h+2}j_{h+2}}p_{i_{h+2}j_{h+2}}$$
$$=\overset{h+1}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_k}/\overset{h+1}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}}(d_{i_{h+1}j_{h+2}}e_{i_{h+1}}-d_{i_{h+2}j_{h+2}}e_{i_{h+2}})\tag{10}$$

(9)と(10)とにおいて

$$(\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_k}/\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}})d_{i_{h+1}j_{h+1}}$$
$$=(\overset{h+1}{\underset{h=0}{\pi}}d_{i_kj_k}/\overset{h+1}{\underset{h=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}})d_{i_{h+1}j_{h+2}}$$

であるから(9)＋(10)において $e_{i_{h+1}}$ の係数は 0 となる．これらを $h=0,\cdots,t$ までくり返すと

$$p_{i_0j_0}=f_{i_0j_1}p_{i_0j_1}+f_{i_1j_1}p_{i_1j_1}+\cdots+f_{i_tj_t}p_{i_tj_t}+f_{i_tj_{t+1}}p_{i_tj_1} \tag{11}$$

となる．一方，対称条件を考えると，

$$\overset{t}{\underset{k=0}{\pi}} d_{i_kj_k}=\overset{t}{\underset{k=0}{\pi}} d_{i_kj_{k+1}}$$

であるから，$f_{i_tj_{t+k}}=\overset{t}{\underset{k=0}{\pi}} d_{i_kj_k}/\overset{t}{\underset{k=0}{\pi}} d_{i_kj_{k+1}}=1$ となり，L' は一次従属となっていることがわかる．すなわち，十分性は証明される．逆に必要条件は定理 2 より成立する．また L' は単純ループの定義から，$p_{ij}\in L'$ に対してただ 1 個の $p_{i_1j}\in L'$ とただ 1 個の $p_{ij_1}\in L'$ を持つことになる．したがって，L' からその真の部分集合 L'' を除去すると，少なくとも $p_{rs}\in L'-L''$ のみを含む 1 個の列と 1 個の行のみが存在することとなり，これらは一次独立であるから L' は最小従属となっていることがわかる．

定理 4 $p_{i_0j_0}\in\widetilde{M}$ が M^0 の核 K_c と結合しているならば，集合 $\{e_{i_0}\}_i\cup D_r\cup K_c$ は最小従属である．ただし，D_r は $\{p_{i_0j},\cdots\}$ となる径路で K_c と $\widetilde{M}$ との結合を表わすものとする．

（証明） $p_{i_uj_v}$ を K_c と $p_{i_0j_0}$ とを結合する径路 D の最後の要素であるとしよう．つまり，$p_{i_uj_v}\notin K_c$ であることは明らかである．ここで，つぎの各量を定義する．

$$w'_{i_uj_v}=\begin{cases} d_{i_uj_v} & v=v \\ 1 & u\neq v \end{cases},\quad w''_{i_uj_v}=\begin{cases} 1 & u=v \\ d_{i_uj_v} & u\neq v \end{cases}$$

$$\gamma=\begin{cases} + & K^c \text{ が要素で} \quad p_{i,n+1}=e_i \\ - & K_c \text{ が要素で} \quad p_{i,n+1}=-e_i \\ 1 & K_c \text{ がループで} \quad u=v \\ 2 & K_c \text{ がループで} \quad u\neq v \end{cases}$$

$$\delta=\begin{cases} + & K_c \text{ が要素で} \quad p_{i,n+1}=-e_i \\ - & K_c \text{ が要素で} \quad p_{i,n+1}=+e_i \\ 1 & K_c \text{ がループで} \quad u\neq v \\ 2 & K_c \text{ がループで} \quad u=v \end{cases}$$

また各関係式で用いる記号 $g^1{}_{i_rj_s}$ と $g^2{}_{i_rj_s}$ とは e_{i_u} あるいは e_{m+j_u} をそれぞれ表わすために定理 2 の証明で使用したものと同じものとし，K_c がループでないときには

$$K_c=\{e_i\} \quad \text{に対し} \quad g^+{}_{i_r,n+1}=1$$

$$K_c=\{-e_i\} \quad \text{に対し} \quad g^-{}_{i_r,n+1}=-1$$

とする．さらに，

$$g^3{}_{i_0j_1}=1/d_{i_0j_1} \quad (p_{i_0j_1}\in D_r)$$

$$g^3{}_{i_hj_{h+1}}=\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}} d_{i_kj_k}/\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}} d_{i_kj_{k+1}} \quad (p_{i_hj_{h+1}}\in D_r)$$

$$g^3{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-g^3{}_{i_hj_{h+1}} \quad (p_{i_{h+1}j_{h+1}}\in D_r)$$

$$g^3{}_{i_rj_s} = -w^1{}_{i_uj_v}g^3{}_{i_uj_v}g^7{}_{i_rj_s} \quad (p_{i_rj_s} \in K_c)$$

とすると,

$$e_{i_0} = \sum_{p_{ij} \in D_r} g^3{}_{ij}p_{ij} + \sum_{p_{ij} \in K_e} g^3{}_{ij}p_{ij}$$

となる関係式が求められ, $\{e_{i_0}\}UD_rUK_c$ は最小従属であることが証明される.

定理 5 $p_{i_0j_0} \in \widetilde{M}$ が M^0 の核 K_c と径路 D_r により結合しているならば, 集合 $\{e_{m+j0}\}UD_sUK_c$ は最小従属である. ただし, D_s は $\{p_{ij_0}, \cdots\}$ となる径路で K_c と $\widetilde{M}$ とを結合するものとする.

(証明) 定理4での記号をそのまま使用するものとし

$$g^4{}_{i_1j_0} = 1 \quad (p_{i_1j_0} \in D_s)$$

$$g^4{}_{i_hj_h} = -\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}} d_{i_kj_{k-1}} / \overset{h}{\underset{k=1}{\pi}} d_{i_kj_k} \quad (p_{i_hj_h} \in D_s)$$

$$g^4{}_{i_{h+1}j_h} = -g^4{}_{i_hj_h} \quad (p_{i_{h+1}j_h} \in D_s)$$

$$g^4{}_{i_rj_s} = -w''{}_{i_uj_v}g^4{}_{i_uj_v}g^8{}_{i_rj_s} \quad (p_{i_rj_s} \in K_c)$$

とすると,

$$e_{m+j_0} = \sum_{p_{ij} \in D_s} g^4{}_{ij}p_{ij} + \sum_{p_{ij} \in K_c} g^4{}_{ij}p_{ij}$$

となり, 定理と同様に成立することがわかる.

4. 基底とループとの関連性

基底 M^0 の成分を c とする. c の要素を含む行 i の集合を I_c とし, c の要素を含む列 j ($j \neq n+1$) の集合を J_c とし, それらの集合の要素数を $|I_c|$, $|J_c|$ とする. c は基底の成分であるから,

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{j \in J_c} d_{ij}x_{ij} \pm x_{is} = a_i & (i \in I_c) \\ \sum_{i \in I_c} x_{ij} = b_j & (j \in J_c) \\ x_{ij} \geqq 0 \quad (i \in I_c,\ j \in J_c) & \end{array}\right\} \tag{12}$$

となる関係式が成立する.

定理 6 non-degenerate な M^0 の成分 c は必らず1個の核を含む.

(証明) $c' = \{p_{ij} | p_{ij} \in c, j \neq n+1\}$ とする. ループを含まない場合 c' は ($|I_c| + |J_c| - 1$) 個以下の要素からなっているはずである. ところが, c は ($|I_c| + |J_c|$) 個の要素を含んでいるわけであるから, 要素 $p_{i,n+1}$ を含むかあるいは c にループを含むかのいずれかである. このことはいずれにしろ核を含むことを意味している.

いま c の中に2つの核が存在するものと仮定してみる.

すると, (i) 少くとも1つの核がループ (K'_c) である.

(ii) 核がループでない.

の2ケースが考えられる. (i) では K'_c の要素が少くとも1個は存在し, これは2つの径

路により K''_c と結合できる．このことから e_r と e_{m+s} は2つの径路と K''_c とによりその線形結合として表わしうることになり c が基底であることに矛盾する．(ii) では2つの核を結合する要素が常に存在する．したがって，定理4および5により，この径路の要素は2つの核と他の要素の線形結合として表わしうる．このことは (i) および (ii) のいずれのケースも c が基底の要素であることに矛盾する．このことから定理6が成立することが証明される．

定理7 最小従属集合 $S\subseteqq\widetilde{M}$ はループを構成する．

(証明) S がループではないと仮定する．すると隅ではない要素が存在しなければならない．$j\neq n+1$ でありしかも $p_{ij}=d_{ij}e_i+e_{m+j}$ であるが，S が最小従属であるから，

$\sum_{p_{rs}\in S} k_{rs}p_{rs}=0$ $(k_{rs}\neq 0)$ となるはずである．したがって，もし $j_1\neq j$ となるような $p_{ij_1}\in S$ が存在しない場合には，$k_{ij}d_{ij}e_i=0$ であるかまたに $i_1\neq i$ に対し $p_{i_1j}\in S$ が存在しない場合には $k_{ij}e_{m+j}=0$ となる．したがって，$k_{ij}=0$ となり S が最小従属であることに矛盾する．

定理8 二重ループ L は従属集合であり，それが最小従属であるための必要十分条件は対称サブループを含まない事である．

(証明) L の核を K_r と K_s とする．$L\neq K_rUK_s$ である場合，K_r と K_s とを結合する径路 D の要素を p_{ij} とする．このとき，$D=D_r\cup\{p_{ij}\}\cup P_s$ となるような径路とする．定理4および定理5より，e_i と e_{m+j} は $D_r\cup K_r$ と $D_s\cup K_s$ の要素の線形結合として表わしうる．したがって，$p_{ij}=d_{ij}e_j+e_{m+j}$ は $L-\{p_{ij}\}$ の要素の線形結合として表わしうるので L は従属である．もし $L=K_r\cup K_s$ である場合，$L-K_r$ の要素を p_{ij} とし，D_r と D_s を $L-K_r=D_r\cup\{p_{ij}\}\cup D_s$ に対する径路とすると，p_{ij} が $D_r\cup D_s\cup K_r$ の要素の線形結合で表しうることを証明でき，L は従属となる．いまループについてつぎの各ケースに区別してみる．

ケース1. $L=K_r\cup D\cup K_s$ $(D\neq\phi)$

ケース2. $L=K_r\cup K_s$ で

(i) $K_r\cap K_s$ は少くとも1個以上の要素をもつ

(ii) $K_r\cap K_s$ はただ1個の要素 p_{ij} をもつ

ケース1とケース2 (i) の場合，$p_{ij}\in L$ に対して，$L-\{p_{ij}\}$ の要素はその行および列において他の要素が存在しないことを意味しており，L は最小従属である．そうでないとすると補理7より $L-\{p_{ij}\}$ は最小従属とならない．この理論を $L'=L-\{p_{i'j'}\}$, $L''=L'-\{p_{i'j''}\}$, … に順次適用して最終的に L が最小従属集合を含まなくなるまで続行する．この事は L の仮定としての従属集合であることに矛盾する．ケース2 (ii) については $L-\{p_{ij}\}$ が単純ループ L' であるので，定理3よりその必要十分条件は対称性にあることで明白である．

5. 基底要素の変換

基底 M^0 の成分を $C_1, C_2, \cdots, C_t$ とし，$K_1, K_2, \cdots, K_t$ をそれらの核とする．各成分に対応した(12)式の添字集合をそれぞれ $I_1, I_2, \cdots, I_t\,;\,J_1, J_2, \cdots, J_t$ とする．

定理9 $p_{i_0j_0}\notin M^0$，$i_0\in I_r$，$j_0\in J_s$ とするとき，$p_{i_0j_0}$ は径路 D_r と D_s とにより K_r と K_s とに結合しうる．さらに，集合 $L_{i_0j_0}=K_r\cup D_r\cup\{p_{i_0j_0}\}\cup D_s\cup K_s$ は二重ループである．

（**証明**） D_r と D_s の存在性については $\{p_{i_0j_00}\}\cup C_r$ と $\{p_{i_0j_0}\}\cup C_s$ との連結性からいえる．集合 $L_{i_0j_0}$ は明らかにループである． $r\neq s$ ならば，$L_{i_0j_0}$ は正に2個の核をもつことになる． $r=s$ で $D=D_r\cap D_s\neq\phi$ ならば $L_{i_0j_0}$ は異った核 K_r（あるいは K_s）と

$$K_t=[\{p_{i_0j_0}\}\cup D_r\cup D_r]-(D_r\cap D_s)$$

とをもつ二重ループである．$r=s$ で $D=\phi$ ならば，$p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ とを D_r と D_s とが $p_{i_0j_0}$ に結合している K_r（あるいは K_s）の要素とする．また $K^1{}_r$，$K^2{}_r$ を集合 K_r に対する二つの径路とする．

$$K_r=\{p_{i_1j_1}\}\cap K^1{}_r\cup\{p_{i_2j_2}\}\cup K^2{}_r$$

この結果，K_r と同様に

$$K_u=\{p_{i_0j_0}\}\cup D_r\cup\{p_{i_1j_1}\}\cup K^1{}_r\cup\{p_{i_2j_2}\}\cup D_s$$

$$K_v=\{p_{i_0j_0}\}\cup D_r\cup\{p_{i_1j_1}\}\cup K^2{}_r\cup\{p_{i_2j_2}\}\cup D_s$$

はともに核である． $K_r\subset K_u\cup K_v$ であるから，核 K_r，K_u，K_v の中の2種のみが独立であり，$L_{i_0j_0}$ は二重ループである．

定理10 $p_{i_0j_0}\notin M^0$ の最小従属集合 $S_{i_0j_0}$ はただ一通りに決定されるループである．もし単純対称ループ $L'\subset L_{i_0j_0}$ が存在すれば，$S_{i_0j_0}=L'$ であり，そうでないときには $S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}$ である．

（**証明**） 前半は定理7より成立し， $S_{i_0j_0}$ の唯一性について M^0 の基底である事実からいえる．定理8と定理9とにより， $L_{i_0j_0}$ は二重ループであり，したがって従属である．$L_{i_0j_0}$ は単純対称ループ L' を含むとき，$p_{i_0j_0}\in L'$（そうでないときには M^0 は定理3より従属な部分集合となる）であり，しかも L' は最小従属であるから $S_{i_0j_0}=L'$ となる．もし $L_{i_0j_0}$ が単純対称ループを含まない場合，定理8より最小従属であり，したがって， $p_{i_0j_0}$ の最小従属の唯一性から $S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}$ となる．以上のことから定理10の成立することがわかる．

$p_{i_0j_0}$ を基底ベクトルの線形結合で表わす場合の要素 p_{ij}（$p_{ij}\notin M^0$）の係数 $y^0{}_{ij}$ の決定法につき考えよう．

$$L_{i_0j_0}=K_r\cup D_r\cup\{p_{i_0j_0}\}\cup D_s\cup K_s$$

ただし， D_r は $p_{i_0j_0}$ を含む径路であり， D_s は p_{ij_0} を含む径路である． さらに， $T_r=K_r\cup D_r$，$T_s=K_s\cup D_s$ とする．$S_{i_0j_0}$ が単純対称ループ L' であるならば，

$$p_{i_0j_0}=\sum_{p_{ij}\in L'-\{p_{i_0j_0}\}} f_{ij}p_{ij}$$

となる．もし $S_{i_0j_0}$ が二重ループ $L_{i_0j_0}$ であれば，

$$p_{i_0j_0}=d_{ij_{00}}e_{i_0}+e_{m+j_0}$$
$$=d_{i_0j_0}\sum_{p_{ij}\in T_r}g^3{}_{ij}p_{ij}+\sum_{p_{ij}\in T_s}g^4{}_{ij}p_{ij}$$

となる．ただし，g^3, g^4 はすでに定理4および定理5の証明で定義されたものである．この結果として，$p_{i_0j_0}$ を基底ベクトルの線形結合で表わす場合，要素 p_{ij} の係数 $y^0{}_{ij}$ はつぎのように表わされる．

$$y^0{}_{ij}=\rho_{ij}[\lambda^0(\mu^0{}_{ij}d_{ij}g^3{}_{ij}+\upsilon^0{}_{ij}g^4{}_{ij})+(1-\lambda^0)f_{ij}]$$

ただし，

$$\rho_{ij}=\begin{cases}1 & p_{ij}\in S_{i_0j_0}\\ 0 & p_{ij}\notin S_{i_0j_0}\end{cases}$$

$$\lambda^0=\begin{cases}1 & S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}\\ 0 & S_{i_0j_0}=L'\end{cases}$$

$$\mu^0{}_{ij}=\begin{cases}1 & p_{ij}\in T_r\\ 0 & p_{ij}\notin T_r\end{cases}$$

$$\upsilon^0{}_{ij}=\begin{cases}1 & p_{ij}\in T_s\\ 0 & p_{ij}\notin T_s\end{cases}$$

とする．したがって，単体法の考え方から，基底から追い出される要素 p_{hk} に対して，

$$\frac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}}=\min_{p_{ij}\in L^+{}_{i_0j_0}}\frac{x^0{}_{ij}}{y^0{}_{ij}}$$

ただし，$L^+{}_{i_0j_0}$ は $y^0{}_{ij}>0$ となるような $L_{i_0j_0}\ni p_{ij}$ の部分集合である．この結果，新しい解はつぎのように求められる．

$$x^1{}_{ij}=\begin{cases}x^0{}_{ij} & p_i\in S_{i_0j_0}\\ x^0{}_{ij}-\dfrac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}}y^0{}_{ij} & p_{ij}\in S_{i_0j_0},\ p_{ij}\neq p_{i_0j_0}\\ \dfrac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}} & p_{ij}=p_{i_0j_0}\end{cases}$$

6. アルゴリズムの考え方

A. $S_{i_0j_0}=L'$ のとき，

（i） $p_{ij}\notin L' \longrightarrow y_{ij}=0$

（ii） $p_{ij}\in L' \longrightarrow y^0{}_{i_hj_{h+1}}=\prod_{k=0}^{h}d_{i_kj_k}/\prod_{k=0}^{h}d_{i_kj_{k+1}}$ $(h=0,\ \cdots,\ t)$

$$y^0{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-y^0{}_{i_hj_{h+1}}\quad (h=0,\ \cdots,\ t-1)$$

B. $S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}$ のとき

（i） $p_{ij}\in L_{i_0j_0} \longrightarrow y_{ij}=0$

（ii） $p_{ij}\in D_r$, $j=n+1$ （$p_{i,\ n+1}$ は核 K_r である）

$$y^r{}_{i_0j_0}=d_{i_0j_0}/d_{i_0j_1}$$

$$y^r{}_{i_hj_{h+1}}=\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_k}/\overset{h}{\underset{k=0}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}}$$

$$y^r{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-y^r{}_{i_hj_{h+1}}$$

(iii) $p_{ij}\in D_s$, $j=n+1$ ($p_{i,\ n+1}$ は核 K_s である)

$$y^s{}_{i_1j_0}=1$$

$$y^s{}_{i_hj_h}=-\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_kj_{k+1}}/\overset{h}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_kj_k}$$

$$y^s{}_{i_{h+1}j_h}=-y^s{}_{i_hj_h}$$

(iv) $p_{ij}\in K_q$ (q は r か s であり，K_q は単純ループ) であるとき，D の要素の最後のものを $p_{u_zv_w}$ で表わし，

$$K_q=\{p_{i_1j_1},\ p_{i_2,\ j_1},\ \cdots,\ p_{i_1j_t}\}$$

$$\triangle=\overset{t}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_hj_h}-\overset{t}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k},\quad i_{t+1}=i_1,\ j_{t+1}=j_1$$

として，$q=r$, $z=w$ あるいは $q=s$, $z\neq w$ に対して

$$y^q{}_{i_hj_h}=-\frac{d_{u_zv_w}y^q{}_{u_zv_w}}{\triangle}\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_kj_k}\quad(h=1,\ \cdots,\ t-1)$$

$$y^q{}_{i_tj_t}=-\frac{d_{u_zv_w}y^q{}_{u_zv_w}}{\triangle}\overset{t-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}$$

$$y^q{}_{i_{h+1}j_h}=-y^q{}_{i_hj_h}\quad(h=1,\ \cdots,\ t)$$

$q=r$, $z\neq w$ あるいは $q=s$, $z=w$ に対して

$$y^q{}_{i_{h+1}j_h}=-\frac{d_{i_1j_1}y^q{}_{u_zv_w}}{\triangle}\overset{h-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}\overset{t}{\underset{k=h+1}{\pi}}d_{i_kj_k}\quad(h=1,\ \cdots,\ t-1)$$

$$y^q{}_{i_1j_t}=-\frac{d_{i_1j_1}y^q{}_{u_zv_w}}{\triangle}\overset{t-1}{\underset{k=1}{\pi}}d_{i_{k+1}j_k}$$

$$y^q{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-\frac{d_{i_{h+1}j_h}}{d_{i_{h+1}j_{h+1}}}y^q{}_{i_{h+1}j_k}\quad(h=1,\ \cdots,\ t)$$

$$D_q=\phi\longrightarrow z=w,\ d_{u_zv_w}=d_{i_0j_0}$$

$$y_{u_zv_w}=-\triangle/|\triangle|$$

以上において $y^0{}_{ij}$ の計算方法を中心に記述したが，線形計画法における単体法と同じ考え方である．ある基底 M^0 から別の基底に変換するとき，M^0 のすべての成分から選択するのでなく，$S_{i_0j_0}\leqq M^0$ の中から選ぶわけであり係数 $y^0{}_{ij}$ は $p_{ij}\in S_{i_0j_0}$ についてだけ計算されることになる．$p_{ij}\notin S_{i_0j_0}$ に対しては $y^0{}_{ij}=0$ とするわけであるから本質的に計算量は減少することになる．

7. Generalized Stepping Stone Method

(1)で考えた問題の条件式は非負条件を除いて考えると

$$\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}\pm x_{is}=a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j$$

となる．この場合の変数は x_{ij} が mn 個，x_{is} が m 個で，総数 $(mn+m)=m(n+1)$ 個となっている．x_{is} はスラック変数であり，条件式の不等号の向きによりその係数の正負が決定される．そこでいま，少し条件を変更して x_{is} の係数が正の場合のみを考慮することでしよう．

さらに，スラック変数も含めてその係数を d_{ij} とすると

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n+1} d_{ij}x_{ij}=a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j\end{array}\right\} \tag{13}$$

として定式出来る．前節までの論述では p_{ij} として表わされる列ベクトルをグラフにおける1つのノードとして取扱って来た．ところがこの p_{ij} という列ベクトルは輸送問題を compact tableau で表1あるいは表2などのように記述すれば compact tableau の各 cell に対応することになる．たとえば p_{ij} は i 行，j 列の cell に対応している．したがって，これらの各 cell をグラクにおけるノードとみなせば，グムフにおけるループあるいはトリーの概念がより判然とするものと思われる．

compact tableau で表現することにより基底解の要素とそれらの線分より構成されるグラフでの性質はつぎのようになる．

（i） 基底要素の数は $(m+n+1)$ 個に限定されているから，基底は任意個数のループを含む．

（ii） 2個の相接するループは一次独立である．

（iii） 2個の連結ループは一次従属である．

（iv） 2個の連結したスラック要素は一次従属である．

（v） スラックに連結したループは一次従属である．

（vi） ループかあるいはスラックに連結してないトリーを含む一次独立なベクトルの集合は列ベクトル空間を張る（span）ことは出来ない．

このようにグラフとしての特質を利用すれば古典的な輸送問題の解法手法を修正した方法として最適解を求めうるはずである．まず初期実行可能解を何らかの方法で求めねばならない．さらに，

$$w_{ij}=d_{ij}v_i+v_{ij}-c_{ij}$$

を計算する．この式における u_i, v_j の値は基底要素対応する w_{ij} を $w_{ij}=0$ として求める．また，各スラック要素 $x_{i,n+1}$ に対しては $u_i=0$ とする．

つぎに，基底グラフにおけるすべてのループを決定し，各トルーに対してターミナル・ループあるいはスラックから出発し，そのトリーの連結した部分に沿って進む．初期分布に対応して，解の改善のために新規基底変数を決定しなければならず，コンパクト・タブ

ローにおける IJ 要素が新しい基底要素として選ばられたものとする．$x_{IJ}=\theta$ とすると，I 行の他の基底要素を調整しなければならず，このため I 行においては

$$f_{IJ}\theta=-(d_{IJ}/d_{IJ})\theta$$

だけの増減を交えに調整しながら進むことにする．IJ 要素から出発し，スラック要素かループで終っている行径路を求める．$J\neq n+1$ のとき，同様に列径路を求める．各行および列の径路における要素に対して x_{ij} の修正を $f_{ij}\theta$ だけ交互に行なう．このとき，径路が終るループに対しては任意にループの方向を定める．ここで，つぎのようにループ吸収係数入を決定する．

$2N$ 個のループ要素があるとする．そのループの任意の行を選択．その行に沿って，最初の要素に $2N$ のラベルをつけ，つぎに 1, 2, …, $2N-1$ とラベル付をする．そこで，ループ要素 $\boldsymbol{k}$ に対し

$$\alpha=\sum_{k=1}^{N} d_{2k-1}$$

$$\beta=\sum_{k=1}^{N} d_{2k}$$

$$\lambda=\alpha/(\alpha-\beta)$$

を計算し，$\lambda>0$ の方向にループ方向を定める．つぎに，(i', j') と (I, J) とと入れ替え，$x_{IJ}=\theta$，$x_{i'j'}=0$ とする．

$$\theta=\frac{x_{i'j'}}{|f_{i'j'}|}=\min_{f_{ij}<0}\left\{\frac{x_{ij}}{|f_{ij}|}\right\}$$

他の基底要素については $(x_{ij}+f_{ij}\theta)$ と修正された値に変化している．このようなステップを逐次くり返し，すべての $w_{ij}\geqq 0$ となった段階で最適解となっている．これが，Generalized Stepping Stone Method のアルゴリズムの概要であるが，LP における dnal feasibility る考慮した optimizatin 手法として直接に古典的輸送問題のループ技法を発展させたものとして取扱っている．すなわち，ループ技法をグラフ理論上に展開し，その特質を利用したアルゴリズムもいえる．線形計画問題として取扱う単体法よりは主実行可能解の distribution に対応させた最適化であるだけ効率的であるといえよう．

文　献

[1] Charnes, A, and W. W. Cooper, "The Steppiing Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transporation Problems," Management Science, **1**, pp. 49～69 (1954)

[2] E. Balas, "The Dual Method for the Generalized Tranrportation Problem, "Management Science, **12**, pp. 555～568 (1966')

[3] 成久，"拡張型輸送問題について" 経営科学，**18**，pp. 111～124 (1974)

Topological Aspects for Solving Generalized Transportation Problems

Hiroyuki NARIHISA

Department of General Education
Okayama University of Science
Ridaicho 1-1, Okayama 700, JAPAN

(Received Septemder 24, 1982)

In classical transportation problems, North-West Cornor Method is most famous algorithm. We can express this transportation problems as compact tableau in stead of simplex tableau. In conpact tableau, each cell of the compact tableau can be considered as the node of graph. That is to say, a basic solution corresponds to some non-zero valued nodes. Therefore, we can obtain the optical solution only using some loop of the given graph. This is the reason why North-West Cornor Method may be called as loop technique. Of cource, this method may be called as stepping stone method.

As an extension of this idea, the generalized tranportation problems is also able to use the loop technique. However, this extension is not necessary a straight forward modification of the famous stepping stone method for classical transportation problems.

In this paper, I represent some topological aspects of basic feasible solution for the generalized transportation problems. Consequently, we can consider the algorithm solving the generalized transportation problems by using the properties of given topology corresponding to the basic solntions.