代数的微分，積分と差分方程式

早　原　四　朗

岡山理科大学，理学部，機械理学科

（昭和57年９月24日　受理）

§0.　まえがき

定数係数の線形数列方程式や差分（定差）方程式

$$\sum_{r=0}^{m} a_r x_{n+r} = f_n,$$

$$\sum_{r=0}^{m} a_r x(t+r) = f(t)$$

の解法に関して，**新しい演算子法** New Operator Methods (N. O. M. と略称する）が [3], [4] に解説されている．ところが変数係数の場合は，例えば nx_n は数列空間 E においてコーシー積ではないから直ちに演算子空間 Q の元で表わせない．そこで，T. Fényes-P. Kosik[1] は代数的微分 $D\{x_n\}=\{-nx_n\}$ を導入して，E 空間の数列方程式を Q 空間の代数的微分方程式に変換し，その解を E 空間に戻して，求める解を得る方法を示した．この [1] の内容は簡潔に [4] の付録にまとめてある．

ただし，数列 $\{a_n\}$ を [1] では

$$\{a_n\}=\sum_{r=0}^{\infty} a_r(1+q)^{-r},\ q=(l-1)^{-1} \tag{1}$$

$$l=\{1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots\},$$

[4] では

$$\{a_n\}=\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r,\ u=\{0,\ 1,\ 0,\ \cdots\ ,0,\ \cdots\} \tag{2}$$

を基礎にしている．この(1)と(2)が同値であることは [2] で証明している．[1] では１階の代数的微分方程式の解法の解説に止まるに対し，本論文では新たに代数的対数関数に相当する演算子を導入して，２階の代数的常微分方程式から２変数の代数的偏微分方程式の解法について述べる．

§1.　代数的微分と代数的積分

（簡単のために以下では主として定義，定理，公式を述べ証明は省略する）

１次元無限数列 $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$ を代表元 a_n を用いて $\{a_n\}$ で表わす．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ との和と**コーシー積**を

$$\{a_n\}+\{b_n\{=\{a_n+b_n\},\ \{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\}$$

で表わし，**コーシー商** $\{a_n\}/\{b_n\}$ を**演算子**という．

数列の全集合をE，演算子の全集合をQとすれば演算子はEに属するとは限らない．

$$E \subset Q.$$

数列 $\{a_n\}$ を変位演算子 u を用いて表示すれば $\{a_n\}=\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r$ となる．この右辺を u の関数 $a_n(u)$ で表わせば

$$a_n(u)b_n(u)=(\sum a_r u^r)(\sum b_r u^r)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0)u^n$$
$$=\{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\}=\{a_n\}\cdot\{b_n\}.$$

これからEにおけるコーシー積はQにおける普通積に対応する．これがN.O.M.の原理である．

定義1. 数列空間Eにおいて

$$D\{a_n\}=\{-na_n\} \quad \text{つまり}$$
$$D\{a_n\}=\{0,\ -a_1,\ -2a_2,\ \cdots,\ -na_n,\ \cdots\} \qquad (1,\ 1)$$

となるDは一種の微分法の作用をもつから**代数的微分**という．

定理1. $D\{a_n+b_n\}=D\{a_n\}+D\{b_n\}$, (1, 2)

$$D(\{a_n\}\cdot\{b_n\})=(D\{a_n\})\cdot\{b_n\}+\{a_n\}\cdot(D\{b_n\}. \qquad (1,\ 3)$$

紛れなければ以下では $\{a_n\}=a_n$ と略記する．

定義2. 演算子 a_n/b_n に対する演算Dはつぎのように定義する．

$$D(a_n/b_n)=[(Da_n)\cdot b_n-a_n\cdot(Db_n)]/(b_n\cdot b_n)\ \ (b_n\neq\{0\}) \qquad (1,\ 4)$$

定理2. Qにおいて

1) $D(a_n/b_n+c_n/d_n)=D(a_n/b_n)+D(c_n/d_n)$, (1, 5)

2) $D[(a_n/b_n)(c_n/d_n)]=[D(a_n/b_n)](c_n/d_n)+(a_n/b_n)[D(c_n/d_n)]$, (1, 6)

3) $D[\alpha]=0$. ($[\alpha]$ は数値演算子) (1, 7)

［註］ $[\alpha]=\{\alpha,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}$ はQにおいて数 α と同じ作用をするが演算子のときは $[\alpha]$ で表わし**数値演算子**という．

定理3. 1) Eにおいて $Dx^{\cdot r}=rx^{\cdot(r-1)}\cdot(Dx)$,

Qにおいて $Dx^r=rx^{r-1}(Dx)$. (1, 8)

(r は正整数，$x^{\cdot r}=\overbrace{x\cdot x\cdots x.}^{r\text{コ}}$)

2) **変位演算子** u および $p=[1]/u$ に対し，Qにおいて

$$Du=-u,\ Du^r=-ru^r,\ D^k u^r=(-r)^k u^r,$$
$$Dp=p,\ Dp^r=rp^r,\ D^k p^r=r^k p^r. \qquad (1,\ 9)$$

(k：正の整数，r：正負の整数)

定義3. $exp\{a_n\}=e^{\{a_n\}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\{a_n\}^{\cdot r}}{r!}$ (1, 10)

を**指数関数列**という．

定理4． 1） Eにおいて　$e^{\{a_n\}}\cdot e^{\{b_n\}}=e^{\{a_n+b_n\}}$． (1，11)

2） Qにおいて　$De^{\{a_n\}}=e^{\{a_n\}}(D\{a_n\})$． (1，12)

べき級数 $\sum_{r=0}^{\infty} a_r s^r$ の係数の作る数列は $\{a_n\}$ であるからこのべき級数の表わす関数を数列 $\{a_n\}$ の**母関数**という．ここに s は実数でも複素数でもよい．実際に電子工学の理論に用いられる z 変換では $s=z$（複素数）である[5]。数列 $\{a_n\}=\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r$ であるから $\{a_n\}$ の演算子表示を $a_n(p)$ とすればこれは $\{a_n\}$ の母関数である．ゆえにこれまでの u または p をEに関係なく，Qにおいては実数の領域に拡張して考えてもよい．（例えば p^α，$\log p$ 等）そして（1，8），（1，12）と同様に

定義4． 拡張した領域の整関数 $g(x)$ に対し，

$$D\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}(Dx)=g(x)$$

となる $\log f(x)$ が存在する。これを**代数的対数関数**といい

$$\log f(x)=\int g(x)+[c]=\int g(x)(Dx)^{-1}dx+[c] \qquad (1，13)$$

で表わす．

定理5． Qにおいてつぎの等式がなりたつ．$(a_n=\{a_n\})$

1） $\log(a_n b_n)=\log a_n+\log b_n$，$\log a_n{}^r=r\log a_n$ (1，14)

2） $D\log a_n=(Da_n)/a_n$ (1，15)

3） $D\log u^r=-r$，$D\log p^r=r$ (1，16)

$$D\log(u-\alpha)^r=-ru/(u-\alpha),$$
$$D\log(p-\alpha)^r=rp/(p-\alpha),\ (r,\ \alpha：\text{実数}). \qquad (1，17)$$

4） 一般に $f(u)$，$f(p)$ がそれぞれ u，または p に関し普通の意味で微分可能ならば

$$Df(u)=-f'(u)u=-\frac{df}{du}u,$$
$$Df(p)=f'(p)p=\frac{df}{dp}p. \qquad (1，18)$$

定義5． この演算 $Df(u)$，$Df(p)$ を**代数的微分**という．

定義6． **一般の指数**

x，$y\in Q$ に対し，一般の指数 $x^y\in Q$ は

$$x^y=\exp(y\log x) \qquad (1，19)$$

で定義する．

定義7． 与えられた $x\in Q$ に対し，

$$Dy=x$$

である演算子 $y\in Q$ が存在すれば，y を x の**代数的積分**といい

$$y=\int x+[c] \qquad (1，20)$$

で表わす。

定理6. 積分定数を省略してつぎの公式がなりたつ.

$$
\begin{aligned}
&\int (Df)g=fg-\int f(Dg),\\
&\int f'(u)u=-f(u),\quad \int f'(p)p=f(p),\\
&\int (u-\alpha)^r/u=(u-\alpha)^r/u+r\int (u-\alpha)^{r-1},\\
&\int (p-\alpha)^r/p=-(p-\alpha)^r/p+r\int (p-\alpha)^{r-1},\\
&\int (u-\alpha)^r=-r^{-1}(u-\alpha)^r-\alpha\int (u-\alpha)^{r-1},\\
&\int (p-\alpha)^r=r^{-1}(p-\alpha)^r-\alpha\int (p-\alpha)^{r-1},\\
&\int u^{r+1}e^u=-u^re^u-r\int u^re^u,\\
&\int p^{r+1}e^p=p^re^p-r\int p^re^p,\\
&\int u^{r+1}e^{-u}=u^re^{-u}+r\int u^re^{-u},\\
&\int p^{r+1}e^{-p}=-p^re^{-p}+r\int p^re^{-p},\\
&\int e^uu^{-1}=e^uu^{-1}+\int e^u,\\
&\int e^pp^{-1}=-e^pp^{-1}+\int e^p,\\
&\int e^{-u}u^{-1}=e^{-u}u^{-1}-\int e^{-u},\\
&\int e^{-p}p^{-1}=-e^{-p}p^{-1}-\int e^{-p},\\
&\int [\alpha]=-[\alpha]\log u=[\alpha]\log p,\\
&\int u/(u-\alpha)=-\log(u-\alpha),\\
&\int p/(p-\alpha)=\log(p-\alpha),\\
&\int u/(u-\alpha)^{k+1}=k^{-1}(u-\alpha)^{-k},\\
&\int p/(p-\alpha)^{k+1}=-k^{-1}(p-\alpha)^{-k}.
\end{aligned}
\tag{1, 21}
$$

§2. 定数系数の代数的線形微分方程式

定数係数の多項式を $f(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n$ とする.

定理7. 代数的微分および代数的積分に関し，つぎの等式がなりたつ.

1) $Dp^a=ap^a$, $f(D)p^a=f(a)p^a$ (a：定数) (2, 1)

2)　$D[p^aF(p)]=p^a(D+a)F(p)$.

$f(D)[p^aF(p)]=p^af(D+a)F(p)$.　(2, 2)

3)　$D^ny=0$ を代数的に積分すれば

$$y=c_1+c_2\log p+\cdots+c_n(\log p)^{n-1}\ (c_i：定数). \quad (2,\ 3)$$

4)　方程式 $(D-a)^ny=0$ の代数的一般解は

$$y=[c_1+c_2\log p+\cdots+c_n(\log p)^{n-1}]p^a. \quad (2,\ 4)$$

5)　$f(D)^{-1}[p^a]=f(a)^{-1}p^a\ \ (f(a)\neq 0)$.　(2, 5)

6)　$f(D)^{-1}[F(p)]=p^af(D+a)^{-1}[p^{-a}F(p)]$,　(2, 6)

$$(D-a)^{-1}F(p)=p^a\int[p^{-a}F(p)],$$

$$(D-a)^{-n}F(p)=p^a\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{ 回}}[p^{-a}F(p)]. \quad (2,\ 7)$$

定理8.　Q における定数係数の方程式

1)　$Dx-ax=F(p)$

の一般解は

$$x=cp^a+p^a\int[p^{-a}F(p)]. \quad (2,\ 8)$$

2)　$(D-a)(D-b)x=F(p)\quad (a\neq b)$

の一般解は

$$x=c_1p^a+c_2p^b+(a-b)^{-1}\{p^a\int[p^{-a}F(p)]-p^b\int[p^{-b}F(p)]\}. \quad (2,\ 9)$$

3)　$(D-a)^2x=F(p)$

の一般解は

$$x=p^a(c_1+c_2\log p)+p^a\int\int[p^{-a}F(p)]. \quad (2,\ 10)$$

例1.　$n^2x_n+nx_n-12x_n=u$ を満たす x_n の一般式を求めよ．

解　$-nx=Dx$ とおき

$$(D^2-D-12)x=p^{-1}. \quad ①$$

①に関係する同次方程式

$$(D-4)(D+3)x=0 \quad ②$$

の一般解は $\tilde{x}=c_1p^4+c_2p^{-3}$.　③

①の特殊解は

$$x_p=\frac{1}{4+3}[p^4\int p^{-4}\cdot p^{-1}-p^{-3}\int p^3\cdot p^{-1}]=-\frac{1}{10}p^{-1}. \quad ④$$

③，④より

$$x_n=c_1u^{-4}+c_2u^3-\frac{1}{10}u. \quad ⑤$$

特に E に限れば $c_1=0$ とおき

$$x_n=c_2u^3-\frac{1}{10}u=\{0,\ -\frac{1}{10},\ 0,\ c_2,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}. \quad ⑥$$

§3. 変数係数の代数的線形微分方程式（1階の場合）

Eにおける数列方程式

$$nx+\{a_n\}\cdot x=\{-F_n\} \tag{3, 1}$$

は $-nx=Dx$ とおき，Qで

$$Dx-a_n(p)x=F_n(p) \tag{3, 2}$$

となる．ここに $a_n(p)$, $F_n(p)$ はそれぞれ数列 $\{a_n\}$, $\{F_n\}$ に対応する演算子である．

(3, 2) が同次方程式の場合，つまり $F_n(p)=0$ の場合は

$$Dx-a_n(p)x=0 \tag{3, 3}$$

の $x\neq 0$ に対して $Dx/x=a_n(p)$ を代数的に積分して

$$\log x=\int a_n(p)+[c_0].$$

故に (3, 3) の一般解は

$$\tilde{x}=[c]\exp\int a_n(p). \tag{3, 4}$$

(3, 4) の一つの解 $\tilde{x}$ を用いて (3, 2) の特殊解は

$$x_p=\tilde{x}\int[\tilde{x}^{-1}F_n(p)]. \tag{3, 5}$$

実際に $[D-a_n(p)]x_p=[D-a_n(p)]\tilde{x}\int\boxed{}+\tilde{x}D\int[\tilde{x}^{-1}F_n]=F_n.$

故に (3, 2) の一般解は (3, 4), (3, 5) から

$$x=c\exp\int a_n(p)+x_p. \tag{3, 6}$$

[註] (3, 2) の $a_n(p)=a$（定数）のとき (3, 6) は

$$x=cp^a+p^a\int[p^{-a}F_n]$$

となり (2, 8) と一致する．

例2. 差分方程式

$$a(x+1)f(x)-xf(x+1)=a^{x+1},\ f(0)=1,\ (a：定数) \qquad ①$$

を満たす $f(x)$ の一般式を求めよ．

解 ガウスの記号 $[x]=n$ とおき①に対応する数列方程式は

$$a(n+1)f_n-nf_{n+1}=a^{n+1}. \qquad ②$$

$-nf_n=Df_n$, $f_{n+1}=pf_n-p\cdot 1$, $a^n=p/(p-a)$ により

$$a(-Df_n)+af_n+D(pf_n-p)=ap(p-a)^{-1},$$

$$(p-a)Df_n+(p+a)f_n=p+ap(p-a)^{-1},$$

$$Df_n+(p+a)(p-a)^{-1}f_n=p(p-a)^{-1}+ap(p-a)^{-2}. \qquad ③$$

③に関係する同次方程式

$$Df_n+(p+a)(p-a)^{-1}f_n=0. \qquad ④$$

に対して $Df_n/f_n=-(p+a)(p-a)^{-1}=1-2p(p-a)^{-1}$,

代数的に積分して

$$\log f=\log p-2\log(p-a)+c_0,$$

$$\tilde{f}=cp(p-a)^{-2}. \qquad ⑤$$

③に対する特殊解は

$$f_p=\tilde{f}\int\tilde{f}^{-1}[p(p-a]^{-1}+ap(p-a)^{-2}]$$

$$=p(p-a)^{-2}\int p=p^2(p-a)^{-2}$$

$$=p(p-a)^{-1}+ap(p-a)^{-2}. \qquad ⑥$$

⑤，⑥ により E における②の一般解は

$$f=cna^{n-1}+(n+1)a^n.$$

n 項をとり $f_n=cna^{n-1}+(n+1)a^n$ （n：定数）．

したがって対応する①の一般解は

$$f(x)=cxa^{x-1}+(x+1)a^x. \qquad ⑦$$

$c=-a$ とおけば①の特殊解 $f(x)=a^x$ を得る．

§4．変数係数の代数的線形微分方程式（2階の場合）

Q において

$$L[x]\equiv D^2x+a_n(p)Dx+b_n(p)x=F_n(p) \qquad (4,\ 1)$$

を考える．ここに $a_n(p)$，$b_n(p)$，$F_n(p)$ は概知の演算子である．同次方程式

$$L[x]\equiv D^2x+a_n(p)Dx+b_n(p)x=0 \qquad (4,\ 2)$$

が1次独立な二つの解 x_1，と x_2 をもてば（4，2）の一般解は $c_1x_1+c_2x_2$ である．$x_1/x_2\neq$ 定数だからロンスキーの行列式

$$W[x_1,\ x_2]\equiv x_1(Dx_2)-x_2(Dx_1)\neq 0,$$

$$DW=x_1(D^2x_2)-x_2(D^2x_1)=x_1(-a_nDx_2)-x_2(-a_nDx_1)=-a_nW,$$

$$W=W_0\exp\int-a_n. \qquad (4,\ 3)$$

（4，2）の一つの解 $x_1\neq\{0\}$ を知ると $x=x_1\int y$ で y に変換し，$L[x_1]=0$ を利用すると

$$Dy+(2Dx_1/x_1+a_n(p))y=0 \qquad (4,\ 4)$$

を得る．これから

$$y=x_1^{-2}\exp\int[-a_n(p)]$$

$$x_2=x_1\int x_1^{-2}\exp\int[-a_n(p)]. \qquad (4,\ 5)$$

（4，2）の1次独立な解 x_1 と x_2 を得れば（4，1）の特殊解は定数変化法で，つぎのように求められる．

$x=A(p)x_1(p)+B(p)x_2(p)$ とおく．Dx の項のうち

$DA(p)x_1+DB(p)x_2=0$ とおけば

$$L[x]=DA(p)(Dx_1)+DB(p)(Dx_2)=F_n(p)$$

$$DA(p)=-x_2F_n/W,\quad DB(p)=x_1F_n/W$$

を積分して

$$A(p)=\int -x_2F_n/W+c_1,\quad B(p)=\int x_1F_n/W+c_2.$$

故に

$$x=x_1\int -x_2F_n/W+x_2\int x_1F_n/W+c_1x_1+c_2x_2. \tag{4, 6}$$

(4, 6) は (4, 1) の一般解で，(4, 1) の特殊解 x_p は

$$x_p=x_1\int -x_2F_n/W+x_2\int x_1F_n/W. \tag{4, 7}$$

(4, 1) が因数分解されて

$$[D-\alpha(p)][D-\beta(p)]x=F(p) \tag{4, 8}$$

で $\alpha(p)\neq\beta(p)$ ならば (4, 6) を用いて $W=x_1x_2[\beta(p)-\alpha(p)]$ から (4, 8) の一般解は

$$x=c_1x_1+c_2x_2+x_1\int x_1^{-1}F(p)[\alpha(p)-\beta(p)]^{-1}-x_2\int x_2^{-1}F(p)[\alpha(p)-\beta(p)]^{-1}$$

ここで $x_1=\exp\int\alpha(p)$, $x_2=\exp\int\beta(p)$.　　(4, 9)

また $\alpha(p)=\beta(p)$ ならば (4, 8) の一般解は

$$x=x_1(c_1+c_2\log p)+x_1\int\int x_1^{-1}F(p), \tag{4, 10}$$

ここで　$x_1=\exp\int\alpha(p)$.

［註］ (4, 8) の $\alpha(p)$, $\beta(p)$ が定数のとき (4, 9), (4, 10) はそれぞれ (2, 9), (2, 10) と一致する．

例3. $\{n^2x\}+u\cdot\{-nx\}-u\cdot\{x\}=u^{-1}$　　①

を満たす $\{x\}$ を求めよ．

解　E の①を Q に移せば

$$D^2x+uDx-ux=u^{-1} \tag{②}$$

②に関係する同次方程式

$$D^2x+uDx-ux=0 \tag{③}$$

に対し，まず $x_1=e^u$ は③の特殊解である． $x=e^u\int y$ で②を y に変換すると

$$Dy+(-2u+u)y=e^{-u}u^{-1}. \tag{④}$$

④に関係する同次方程式の解 $y_1=e^{-u}$ から

$$y=e^{-u}\int e^ue^{-u}u^{-1}=e^{-u}u^{-1}+Ae^{-u}. \tag{⑤}$$

したがって

$$x=e^u\int[e^{-u}u^{-1}+Ae^{-u}]=u^{-1}+Be^u\int e^{-u}+ce^u. \tag{⑥}$$

特に $x=u^{-1}=p$ は②の特殊解であるが $p\notin E$ で①の解でない．

［註］ $x=\sum_{-\infty}^{\infty}a_nu^n$ とおくと②は

$$\sum n^2 a_n u^n - \sum n a_n u^{n+1} - \sum a_n u^{n+1} = u^{-1}.$$

この等式がなりたつのは $n=-1$ のときだけで，$x=a_{-1}u^{-1}=u^{-1}$ から $a_{-1}=1$. 故に②の特殊解は $x_p=u^{-1}$.

§5.　1階の代数的線形偏微分方程式

2次元空間 E_2, Q_2 において

$$D_1\{z_{m,n}\}=\{-mz_{m,n}\},\quad D_2\{z_{m,n}\}=\{-nz_{m,n}\} \tag{5, 1}$$

で定義した演算 D_1, D_2 について1次元空間 E_1, Q_1 の場合と同様につぎの定理がなりたつ．

定理9.

(1) $D_i[\{a_{m,n}\}+\{b_{m,n}\}]=D_i\{a_{m,n}\}+D_i\{b_{m,n}\}$,　$(i=1,\ 2)$

$$D_i[\{a_{m,n}\}\{b_{m,n}\}]=[D_i\{a_{m,n}\}]\{b_{m,n}\}+\{a_{m,n}\}[D_i\{b_{m,n}\}]. \tag{5, 2}$$

(2) $D_i[a_{m,n}/b_{m,n}+c_{m,n}/d_{m,n}]=D_i(a_{m,n}/b_{m,n})+D_i(c_{m,n}/d_{m,n})$,

$$D_i[(a_{m,n}/b_{m,n})(c_{m,n}/d_{m,n})]=[D_i(a_{m,n}/b_{m,n})](c_{m,n}/d_{m,n})\quad (i=1,\ 2)$$
$$+(a_{m,n}/b_{m,n})[D_i(c_{m,n}/d_{m,n}]. \tag{5, 3}$$

定義8.　代数的偏微分

$$D_1z(p,\ q)=\frac{\partial z}{\partial p}p,\quad D_2z(p,\ q)=\frac{\partial z}{\partial q}q \tag{5, 4}$$

全微分　$Dz(p,\ q)=D_1z+D_2z=\dfrac{\partial z}{\partial p}p+\dfrac{\partial z}{\partial q}q$

逆に

$$\int Dz(p,\ q)=\int_1 D_1z+\int_2 D_2z=\int_1\frac{\partial z}{\partial p}p+\int_2\frac{\partial z}{\partial q}q=z$$

ここで $\int_1$, $\int_2$ はそれぞれ p, q に関する代数的積分を示す．

[1]　定数係数の偏微分方程式

E_2 の数列方程式

$$mz_{m,n}-anz_{m,n}+bz_{m,n}=-F_{m,n}\quad (a,\ b：定数) \tag{5, 5}$$

は Q_2 において偏微分方程式

$$D_1z-aD_2z-bz=F(p,\ q). \tag{5, 6}$$

に相当する．$z=p^b w$ とおけば (5, 6) は

$$p^b(D_1w-aD_2w)=F(p,\ q)\quad となり$$

$$D_1w-aD_2w=p^{-b}F(p,\ q). \tag{5, 7}$$

(5, 4) により普通の偏微分方程式に移し

$$p\frac{\partial w}{\partial p}-aq\frac{\partial w}{\partial q}=p^{-b}F(p,\ q) \tag{5, 8}$$

Lagrange の方法で補助方程式

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{-aq}=\frac{dw}{p^{-b}F} \tag{5, 9}$$

$$a\log p+\log q=c_0,\quad w=\int p^{-b-1}F(p,\ cp^{-a})dp+c_1$$

から (5, 8) の一般解は

$$w=\int p^{-b-1}F(p,\ cp^{-a})dp+\phi(p^a q)\quad(\phi\in C^1\ は任意関数)$$

したがって

$$z=p^b\int p^{-b-1}F(p,\ cp^{-a})dp+p^b\phi(p^a q). \tag{5, 10}$$

例4. $D_1z-2D_2z=-q$ の一般解は

$z=q/2+\phi(p^2q),\ \phi\in C^1.$

例5. $D_1z-2D_2z+z=p^2q$ の一般解は

$z=p^2q+p^{-1}\phi(p^2q),\ \phi\in C^1.$

[2] 変数係数の偏微分方程式

Q_2 における偏微分方程式

$$D_1z-a(p,\ q)D_2z-b(p,\ q)z=F(p,\ q) \tag{5, 11}$$

を考える.

1) $b(p,\ q)=b$ (定数) のときは $z=p^bw$,

2) $b(p,\ q)=bp$ (b 定数) のときは $z=e^{bp}w$, (5, 12)

3) $b(p,\ q)=-cqa(p,\ q)$ (c 定数) のときは $z=e^{cq}w$

とおき (5, 11) は

$$D_1w-a(p,\ q)D_2w=F_1(p,\ q) \tag{5, 13}$$

の型になる. これを普通の偏微分方程式に移し

$$p\frac{\partial w}{\partial p}-qa(p,\ q)\frac{\partial w}{\partial q}=F_1(p,\ q). \tag{5, 14}$$

$a(p,\ q)$ が変数分離形 $a(p,\ q)=a_1(p)a_2(q)$ のときは Lagrange の方法によりつぎのように解くことができる.

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{-qa_1a_2}=\frac{dw}{F_1}$$

$$\int p^{-1}a_1dp+\int q^{-1}a_2{}^{-1}dq=c_0 \tag{5, 15}$$

$$w=\int p^{-1}F_1(p,\ q(p))dp+c_1 \tag{5, 16}$$

ここで $q(p)$ は (5, 15) を満たす関数 $q(p)$ である.

(5, 15), (5, 16) から (5, 14) の一般解は

$$w=\int p^{-1}F_1(p,\ q(p))dp+\phi\left[\int p^{-1}a_1dp+\int q^{-1}a_2{}^{-1}dq\right],\ \phi\in C^1.$$

ゆえに w から z に戻して (5, 11) の一般解を得る.

例6. $D_1z-uv\cdot D_2z-2z=-v/u$ を満たす $z(p,\ q)$ を求めよ.

解 $D_1z-p^{-1}q^{-1}D_2z-2z=-pq^{-1}$ ①

$z=p^2w$ とおくと

$$D_1 w - p^{-1}q^{-1}D_2 w = -p^{-1}q^{-1} \qquad ②$$

普通の偏微分方程式に移し

$$p\frac{\partial w}{\partial p} - p^{-1}\frac{\partial w}{\partial q} = -p^{-1}q^{-1} \qquad ③$$

Lagrange の方法で

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{-p^{-1}} = \frac{dw}{-p^{-1}q^{-1}}$$

$$\int p^{-2}dp + \int dq = c_0 \quad \text{から} \quad -p^{-1}+q=c_1$$

$$dw = q^{-1}dq \quad \text{から} \quad w = \log q + c_2$$

ゆえに③の一般解は

$$w = \log q + \phi(q-p^{-1}), \quad \phi \in C^1. \qquad ④$$

したがって①の一般解は

$$z = p^2 \log q + p^2\phi(q-p^{-1}), \quad \phi \in C^1. \qquad ⑤$$

§6. 2階の代数的線形偏微分方程式

E_2 における数列方程式

$$m^2 z_{m,n} + amnz_{m,n} + bn^2 z_{m,n} + cmz_{m,n} + dnz_{m,n} + ez_{m,n} = F_{m,n}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e：定数) \qquad (6,\ 1)$$

を Q_2 に移せば

$$D_1^2 z + aD_1 D_2 z + bD_2 z - cD_1 z - dD_2 z + ez = F(p,\ q). \qquad (6,\ 2)$$

(6，2) が

$$(D_1 - \alpha_1 D_2 - \beta_1)(D_1 - \alpha_2 D_2 - \beta_2)z = F \quad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2：定数) \qquad (6,\ 3)$$

に分解される場合は（5，10）と同様に同次方程式の場合

（$F=0$）の一般解は

$$z = p^{\beta_1}\phi_1(p^{\alpha_1}q) + p^{\beta_2}\phi_2(p^{\alpha_2}q). \qquad (6,\ 4)$$

(6，3) の特殊解 z_p が視察により得られると，それを (6，4) に加えて (6，3) の一般解となる．

例7. $D_1^2 z - D_2^2 z = u^a v^b$ ($a \neq b$ 定数)

を満たす z の一般解を求めよ．

解 $(D_1 - D_2)(D_1 + D_2)z = p^{-a}q^{-b}$ ①

$(D_1 - D_2)z_1 = 0$ に対して $z_1 = \phi_1(pq)$

$(D_1 + D_2)z_2 = 0$ に対して $z_2 = \phi_2(pq^{-1})$

①の特殊解 $z_p = Ap^{-a}q^{-b}$ とすれば

$D_1^2 z_p = Aa^2 p^{-a}q^{-b}$, $D_2^2 z_p = Ab^2 p^{-a}q^{-b}$

から

$A = 1/(a^2 - b^2)$

ゆえに①の一般解は

$$z=\phi_1(u^{-1}v^{-1})+\phi_2(u^{-1}v)+(a^2-b^2)^{-1}u^a v^b, \qquad ②$$

$$(\phi_1,\ \phi_2\in C^2).$$

参 考 文 献

〔1〕 T. Fényes–P. Kosik, The algebraic derivative and integral in the discrete operational calculus, Studia Sci. Math. Hangarica, 7. (1972) 117–130.

〔2〕 S. Hayabara, z-Transformation by the New Operator Methods, Proc. Japan Acad. 58A (1982) 182–185.

〔3〕 W. Jentsch, Operatorenrechnung für Funktionen zweier diskreter Variabler, Wiss. Z. Univ. Halle-Witt., 14 (1965) 311–318.

〔4〕 早原四朗—春木茂，新しい演算子法と離散解析関数論，槇書店（1981）

〔5〕 小島紀男—篠崎寿夫，Z変換入門，東海大出版（1981）．

Algebraic Derivative, Integral and Difference Equations

Sirō HAYABARA

Department of Mechanical Science, Faculty of Science,
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, JAPAN

(Received September 24, 1982)

S. Hayabara and S. Haruki published a book [4] "The new operator methods and the theory of discrete analytic functions (in Japanese)". Concerning to the solution of linear sequence equations or difference equations with constant coefficients, the new operator methods are explained in this book. However for sequence equations or difference equations with variable coefficients, it is necessary to express these equations in the opertional space.

T. Fényes and P. Kosik [1] introduced an "Algebraic derivative" such as $\mathrm{D}\{x_n\}=\{-nx_n\}$ and transformed equations of sequences in E-space into algebraic differential equations in Q-space by using operation D. The solutions of algebraic differential equations of the first order was shown in [1] and [4]. In this note we will introduce a new algebraic logarithmic function and obtain several formulae of algebraic integrals. And we will express solutions for ordinary algebraic dfferential equations of the second order and for algebraic partial differential equations.