

脇本らの面積比相関係数とスピアマンの 順位相関係数について

長 野 礼 二・山 本 英 二

岡山理科大学応用数学科
(昭和55年 9 月29日 受理)

1. 序

田栗, 平松, 橘高と脇本〔3〕は, 2 変量の関連性をランク・データに基き図示する 2 つの連結ベクトル図, P パターンと R パターンを提案し, その関連度を数量化する指標として面積比相関係数を導入した。

定義1. n 個のペア・サンプル (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) を x_i について大きさの順に並び換えたもののランク・データを

$$(1. 1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_i & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

とする。そして変数 (i, r_i) を

$$(1. 2) \quad \alpha_i = \frac{i}{n+1} \pi, \beta_i = \frac{r_i}{n+1} \pi \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

によって, ラディアン値 (α_i, β_i) に変換する。この (α_i, β_i) を

$$(1. 3) \quad \begin{aligned} |\vec{\eta}_i| &= 1, \arg(\vec{\eta}_i) = \alpha_i \\ |\vec{\xi}_i| &= 1, \arg(\vec{\xi}_i) = \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

によって, ベクトル $(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i)$ に関連づける。ここで, $\vec{\eta}_i$ を目的変量ベクトル, $\vec{\xi}_i$ を説明変量ベクトルという。そして $\{\vec{\eta}_i, i=1, 2, \dots, n\}$ の連結ベクトル・パターンを P パターン, $\{\vec{\xi}_i, i=1, 2, \dots, n\}$ の連結ベクトル・パターンを R パターンという。

例1. $\vec{r}=(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)=(4, 1, 3, 5, 2)$ を図示すれば, 図 1 になる。

田栗らは, この連結ベクトル図は 2 変量間の部分的な相関などが解り易い利点や, R パターンについては 1 変量に限ることなく, k 変量 (R_1 パターン, R_2 パターン, \dots , R_k パターン) が同時に図示でき, 1 つの目的変量と k 個の説明変量それぞれとの関連が同時に表現される利点を持つことを指摘している。

定義2. P パターン, R パターンの原点, 終点は同一点であるが, それを O, N で表わす。S_P を P パターンと ON 軸で囲まれる領域の面積, S_R を R パターンと ON 軸で囲まれる領域の面積とする。ただし, ON 軸の右側の領域では正の符号, 左側の領域では負の符号を持つとする。もし, R パターンが ON の両側に存在するときは S_R は, これらの和となる。このとき S_R/S_P を面積比相関係数と呼び ρ_u で表す。

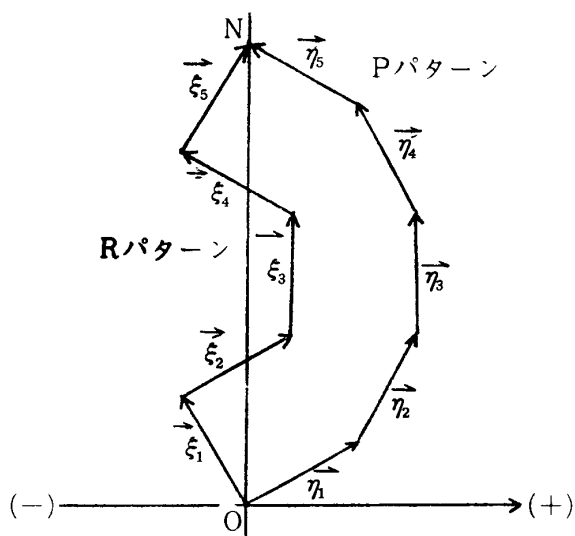


図 1

定義2.から $-S_P \leq S_R \leq S_P$ となるので, $-\leq \rho_a \leq 1$ である。2変量の間強い正の相関があれば S_R は S_P に近くなり ρ_a は 1 に近い値をとる。負の相関があれば, ρ_a は -1 に近い値をとることになる。

この定義2.は田栗らの定義

$$(1.4) \quad \alpha_i = \frac{i-1}{n-1} \pi, \quad \beta_i = \frac{r_i-1}{n-1} \pi \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

を多少, 変更させている。(1.4) では面積比がきれいな形に求まらず, $n=2$ のとき ρ_a が定義されないためである。(1.4) の (1.2) への変更は, ρ_a の本質的な性質には影響しないと考える。

現在まで, 統計量 ρ_a の定式化は行なわれておらず, したがって ρ_a の分布論もなされていない。本論文で我々は, 第2節で S_P , S_R と ρ_a の定式化を行い, 第3節では2変量が独立であるとの仮説の下での ρ_a の平均, 分散そして漸近分布を求める。第4節では ρ_a の線形順位統計量の族への射影を考え, 第5節ではスピアマンの順位相関係数との比較を行う。

2. S_P , S_R と ρ_a の定式化

定義2.に従って, 三角級数の公式を利用すれば, S_P , S_R と ρ_a は次の様に定式化される。

命題 1.

$$(2.1) \quad S_P = \sum_{i=1}^n \left\{ \sin i \theta_0 \left(\sum_{k=1}^i \cos k \theta_0 \right) \right\} = \frac{n-1}{4} \cot \frac{\theta_0}{2}$$

$$(2.2) \quad S_R = \sum_{i=1}^n \left\{ \sin r_i \theta_0 \left(\sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0 \right) \right\}$$

$$(2.3) \quad \rho_a = \frac{\sum_{i=1}^n \sin r_i \theta_0 \left(\sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0 \right)}{\sum_{i=1}^n \left\{ \sin i \theta_0 \left(\sum_{k=1}^i \cos k \theta_0 \right) \right\}} \\ = \frac{4}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \sin r_i \theta_0 \left(\sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0 \right) \right\}$$

ここで, $\theta_0 = \frac{1}{n+1} \pi$ である。

証明. S_R を求めるために, 2つの面積を定義する。

(i) S_P を含む長方形 $NN'O'O'$ を考え, この長方形の面積を U とする (図2参照)。

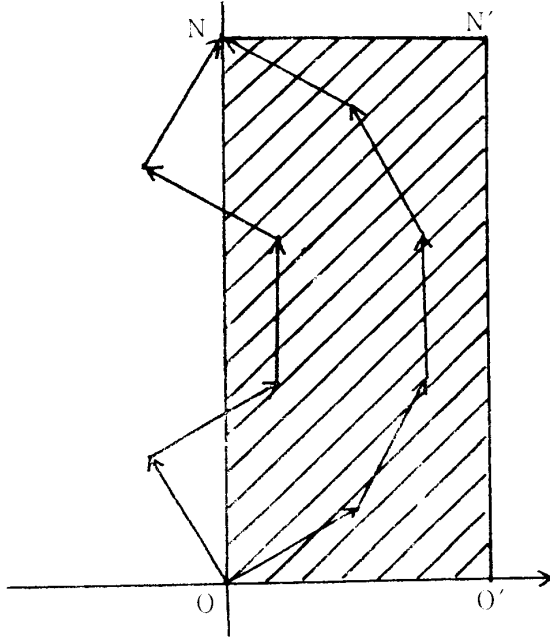


図2

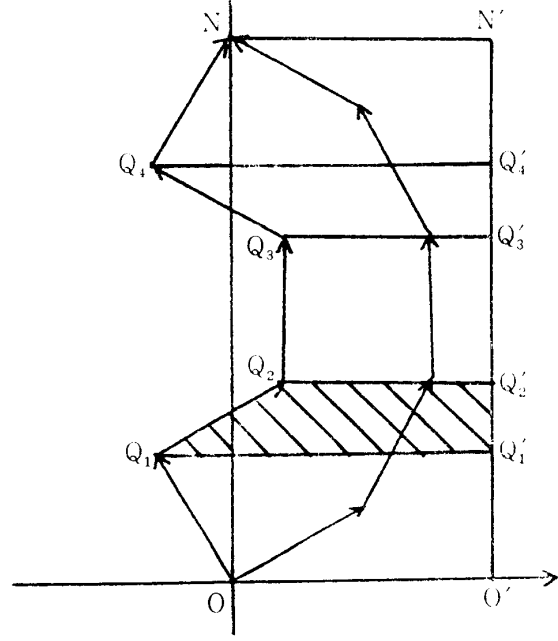


図3

$ON = \sum_{i=1}^n \sin i \theta_0 = \sin \frac{n\theta_0}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2}$ だから $OO' = h$ とおくと

$$(2.4) \quad U = h \cdot \frac{\sin \frac{n\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}$$

となる。

(ii) R パターンと線分 NN' , $N'O'$, $O'O$ で囲まれた部分の面積を V とする。今, $\vec{\xi}_i$ の終点を Q_i とし, Q_i から $O'N'$ に下した垂線の足を Q'_i とする。ここで $Q_0 = O$, $Q'_0 = O'$, $Q_n = N$, $Q'_n = N'$ となる。 v_i を点 $Q_i, Q_{i-1}, Q'_i, Q'_{i-1}$ で囲まれる台形の面積とすると (図3参照),

$$(2.5) \quad v_i = (Q_i Q'_i + Q_{i-1} Q'_{i-1}) \cdot Q_i Q'_{i-1} \cdot \frac{1}{2} \\ = (2h - 2 \sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0 + \cos r_i \theta_0) \cdot \sin r_i \theta_0 \cdot \frac{1}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。ここで, $\sum_{i=1}^n \sin r_i \theta_0 = \sin \frac{n\theta_0}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2}$, $\sum_{i=1}^n \sin r_i \theta_0 \cos r_i \theta_0 = 0$ に注意すれば,

$$(2.6) \quad V = \sum_{i=1}^n v_i \\ = \sum_{i=1}^n \{ 2h - 2 \sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0 + \cos r_i \theta_0 \} \cdot \sin r_i \theta_0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= h \cdot \frac{\sin \frac{n\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} - \sum_{i=1}^n \{ \sin r_i \theta_0 (\sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0) \}$$

となる。よって

$$(2.7) \quad S_R = U - V \\ = \sum_{i=1}^n \{ \sin r_i \theta_0 (\sum_{k=1}^i \cos r_k \theta_0) \}$$

である。 S_P は (2.7) において, $\vec{r} = (1, 2, \dots, n)$ の場合である。 ρ_a は明らか。(証終)

3. 独立性の仮説の下での ρ_a の平均, 分散と漸近分布

命題1. で ρ_a の定式化が出来たので, この節で ρ_a の従う分布を調べる。

定理1. 2変量が独立であるという仮説 H の下で, 既ち n 個のペア・サンプル (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) が $p = \prod_{i=1}^n f(x_i)g(y_i)$ なる $2n$ 次元密度関数

$p = p(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ を持つとすれば,

$$(3.1) \quad E(\rho_a) = 0, \quad \text{Var}(\rho_a) = \frac{1}{3(n-2)} \{ 2 + (n+1) \tan^2 \frac{\theta_0}{2} \}$$

(3.2) ρ_a の密度関数は原点に関して対称である。

(3.3) ρ_a は漸近的に (3.1) の平均, 分散を持つ正規分布に従う。

が成立する。

証明。まず, $E(S_R)$, $\text{Var}(S_R)$ を求める。補足 (A.1)(A.2) を使って

$$(3.4) \quad E(S_R) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i E(\sin r_i \theta_0 \cos r_k \theta_0) \\ = \frac{n(n-1)}{2} E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) + n E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0) \\ = 0$$

となる。次に

$$(3.5) \quad \text{Var}(S_R) = E(S_R^2) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k E(\sin r_i \theta_0 \cos r_j \theta_0 \sin r_k \theta_0 \cos r_l \theta_0) \\ = n E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos^2 r_1 \theta_0) \\ + \frac{1}{2} n(n-1) E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos^2 r_2 \theta_0) \\ + n(n-1) E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\ + n(n-1) E(\sin r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos^2 r_2 \theta_0) \\ + n(n-1) E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\ + \frac{3}{4} n(n-1)(n-2) E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos r_3 \theta_0) \\ + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0 \cos r_3 \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)E(\sin r_1\theta_0 \cos^2 r_2\theta_0 \sin r_3\theta_0) \\
 & + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)E(\sin r_1\theta_0 \cos r_2\theta_0 \sin r_3\theta_0 \cos r_4\theta_0)
 \end{aligned}$$

ここで、補足 (A.5), …… , (A.13)を使い, (3.5)を整理すれば,

$$(3.6) \quad \text{Var}(S_R) = \frac{n-1}{24} \cot^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{n^2-1}{48}$$

が求まる。(2.3) より (3.1) は証明される。

仮説 H の下での ρ_a の密度関数の原点に関する対称性は, S_R の対称性を示せばよい。 S_R は順列 \vec{r} の関数 $h(\vec{r})$ である。今, \vec{r} の逆順列 $\vec{r}' = (n+1-r_1, n+1-r_2, \dots, n+1-r_n)$ を考えると,

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad h(\vec{r}') &= \sum_{i=1}^n \{ \sin(n+1-r_i)\theta_0 (\sum_{k=1}^i \cos(n+1-r_k)\theta_0) \} \\
 &= \sum_{i=1}^n \{ \sin(\pi-r_i\theta_0) (\sum_{k=1}^i \cos(\pi-r_k\theta_0)) \} \\
 &= -\sum_{i=1}^n \{ \sin r_i\theta_0 (\sum_{k=1}^i \cos r_k\theta_0) \} \\
 &= -h(\vec{r})
 \end{aligned}$$

よって, $h(\vec{r})$ の密度関数は, 仮説 H の下で原点に関して対称となる。

ρ_a が漸近正規性をもつことを証明するには, S_R が漸近正規性を持つことを示せば十分である。さて, r_i は

$$(3.8) \quad r_i = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_i - x_t)$$

ここで,

$$(3.9) \quad s(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

と表現できるが, これを用いると S_R は,

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad S_R &= \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \sin\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_i - x_t)\right)\theta_0 \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^i \cos\left(\frac{n+1}{2} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_k - x_t)\right)\theta_0 \right\} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_i - x_t)\theta_0\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_k - x_t)\theta_0\right)
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad \Phi_{ik}(x_1, \dots, x_n) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_i - x_t)\theta_0\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n s(x_k - x_t)\theta_0\right)
 \end{aligned}$$

と置くと,

$$(3.12) \quad \Phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \Phi_{ik}(x_1, \dots, x_n)$$

は対称性を持つ。故に S_R は U-統計量であるので、Hoeffding [2] の定理 7.1 から、仮説 H の下で S_R は、漸近的に (3.4) (3.6) の平均、分散を持つ正規分布に従うことが証明される。(証終)

4. ρ_a の線形順位統計量の族への射影

ここでは ρ_a の線形順位統計量の族への射影を求め、 ρ_a の性質を調べる。ここで統計量 T の射影 \hat{T} とは、線形順位統計量の族の中で $E(T - \hat{T})^2$ を最小とするものである。

Hajek & Sidak [1] の 2 章 3.1 節、定理 b に従い ρ_a の射影 $\hat{\rho}_a$ を求める。仮説 H の下で

$$(4.1) \quad E(\sin r_i \theta_0 \cos r_j \theta_0 | r_k = h) = \begin{cases} 0 & (k \neq i, k \neq j) \\ -\frac{1}{2(n-1)} \sin 2h\theta_0 & (k=i, i \neq j, 1 \leq h \leq n) \\ \frac{1}{n+1} (\cosh \theta_0 \cot \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2} \sin 2h\theta_0) & (k=j, j \neq i, 1 \leq h \leq n) \\ \sinh \theta_0 \cosh \theta_0 & (k=j=i, 1 \leq h \leq n) \end{cases}$$

なので、

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \hat{a}(k, h) &= E(\rho_a | r_k = h) \\ &= \frac{4}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i E(\sin r_i \theta_0 \cos r_j \theta_0 | r_k = h) \\ &= \frac{4}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{\sin 2h\theta_0}{2(n-1)} \right) + \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n-1} (\cosh \theta_0 \cot \frac{\theta_0}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2h\theta_0) + \sinh \theta_0 \cosh \theta_0 \right\} \\ &= \frac{4}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\frac{k-1}{2(n-1)} \sin 2h\theta_0 + \frac{n-k}{n-1} (\cosh \theta_0 \cot \frac{\theta_0}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2h\theta_0) + \sinh \theta_0 \cosh \theta_0 \right\} \end{aligned}$$

故に、

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \hat{\rho}_a &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{a}(i, r_i) - (n-2) E(\rho_a) \\ &= \frac{1}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i-1) \sin 2r_i \theta_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \cos r_i \theta_0 \cot \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2} \sin 2r_i \theta_0 \right\} + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \sin r_i \theta_0 \cos r_i \theta_0 \right\} \\ &= \frac{4}{n-1} \tan \frac{\theta_0}{2} \left\{ -\frac{1}{n} \cot \frac{\theta_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^n i \cos r_i \theta_0 \right\} \\ &= -\frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n i \cos r_i \theta_0 \end{aligned}$$

となる。従って、次の命題が成立する。

命題2. 仮説 H の下で ρ_a の線形順位統計量の族への射影は、

$$(4.4) \quad \hat{\rho}_a = -\frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n i \cos r_i \theta_0$$

である。

定理2. 仮説 H の下で

$$(4.5) \quad E(\hat{\rho}_a) = 0, \quad \text{Var}(\hat{\rho}_a) = \frac{2}{3} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$(4.6) \quad \hat{\rho}_a \text{ の密度関数は原点に関して対称である。}$$

$$(4.7) \quad \hat{\rho}_a \text{ は漸近的に (4.5) の平均, 分散をもつ正規分布に従う。}$$

$$(4.8) \quad \hat{\rho}_a \text{ と } \rho_a \text{ は漸近同致である。}$$

証明。

$$(4.9) \quad \begin{aligned} E(\hat{\rho}_a) &= -\frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n i E(\cos r_i \theta_0) \\ &= -\frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cos l \theta_0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \text{Var}(\hat{\rho}_a) &= E(\hat{\rho}_a^2) \\ &= \frac{16}{n^2(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij E(\cos r_i \theta_0 \cos r_j \theta_0) \\ &= \frac{16}{n^2(n-1)^2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 E(\cos^2 r_i \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^n ij E(\cos r_i \theta_0 \cos r_j \theta_0) \right) \end{aligned}$$

ここで補足 (A.3) (A.4) を使えば (4.5) が求まる。 $\hat{\rho}_a$ の対称性は定理1. (3.2) の証明と同様の議論を行えばよい。漸近正規性は Hajek & Sidak [1] 5章1.5節定理 a を使って証明される。また、 $\text{Var}(\rho_a) / \text{Var}(\hat{\rho}_a) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) であるので、(3.3) (4.7) より ρ_a と $\hat{\rho}_a$ は漸近同致となる。

(証終)

上の定理は、 ρ_a が線形順位統計量に近く、 n が大きければ $\hat{\rho}_a$ で代用できることを示している。

5. 議論

スピアマンの順位相関係数

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \rho_s &= \frac{\sum_{i=1}^n (i - \frac{n+1}{2}) (r_i - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (i - \frac{n+1}{2})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - \frac{n+1}{2})^2}} \\ &= \frac{12}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n i r_i - \frac{3(n+1)}{n-1} \end{aligned}$$

は仮説 H の下で平均 0, 分散 $\frac{1}{n-1}$ の原点に関し対称な密度関数を持つ分布に従い, 漸近正規性を持つことは, よく知られている (例えば Hajek & Sidak [1] 参照)。 n が十分大きいとき ρ_a と ρ_s の分散比は $\frac{2}{3}$ となり, ρ_s に比べ ρ_a の分散が小さいのは興味深い。2 変量の間に相関が存在するときも, 上記の事実が示されれば, 相関係数の推定量としては, ρ_a の方が ρ_s に比べ小分散を持つことになる。

ただ ρ_a は ρ_s と違い, 目的変量 x に対する説明変量 y の相関とでも呼ぶべき方向性を持っていることは注意しなければならない。例えば $n=5$ のペア・サンプル

$$(5.1) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 58 & 40 & 55 & 95 \\ 43 & 90 & 78 & 64 & 50 \end{pmatrix}$$

を考える。このデータを x_i について大きさの順に並び換えれば, ランク・データは $\vec{r}=(4, 3, 1, 5, 2)$ となる。このデータによる ρ_a は -0.27 である。逆に y_i について同様の計算を行うと $\vec{r}=(3, 5, 2, 1, 4)$ となり ρ_a は -0.135 である。このことは, ρ_a は方向性をもった相関係数とでもいうべき, 2 変量の間の関連性を指標化していると考えられる。

最後に仮説 H の下での $n=8$ までのパーセント点を, 表 1 に示す。

補 足

$$\begin{aligned} (A.1) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A.2) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \cos m \theta_0 \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_l \sum_m \sin l \theta_0 \cos m \theta_0 - \sum_l \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A.3) \quad & E(\cos^2 r_1 \theta_0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_l \cos^2 l \theta_0 \\ &= \frac{1}{n} \sum_l \frac{1 + \cos 2l \theta_0}{2} \\ &= \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A.4) \quad & E(\cos r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 \end{aligned}$$

表 1 統計量 ρ_n の上側パーセント点

$$Pr\{\rho_n \leq x_0\} \geq \alpha$$

| $\alpha \backslash n$ | 片側 (両側) | 0.1 (0.2) | 0.05 (0.10) | 0.025 (0.050) | 0.01 (0.02) | 0.005 (0.010) |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 3 | — | — | — | — | — | — |
| 4 | 1.0000 (0.0417) | 1.0000 (0.0417) | — | — | — | — |
| 5 | 0.7321 (0.0667) | 0.8660 (0.0417) | 1.0000 (0.0083) | 1.0000 (0.0083) | 1.0000 (0.0083) | — |
| 6 | 0.5560 (0.0875) | 0.7623 (0.0292) | 0.8416 (0.0097) | 0.8416 (0.0097) | 0.9208 (0.0083) | 1.0000 (0.0014) |
| 7 | 0.4778 (0.0980) | 0.6004 (0.0476) | 0.7032 (0.0240) | 0.7032 (0.0240) | 0.8478 (0.0062) | 0.8985 (0.0034) |
| 8 | 0.4349 (0.0959) | 0.5503 (0.0483) | 0.6495 (0.0222) | 0.6495 (0.0222) | 0.7487 (0.0082) | 0.8094 (0.0042) |

x_0 は上側確率が α 以下となる最小点である。カッコ内は x_0 に対応する正確な確率である。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_l \sum_m \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 - \sum_l \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
&= -\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{A. 5}) \quad & E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos^2 r_1 \theta_0) \\
&= \frac{1}{n} \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \\
&= \frac{1}{8n} \left\{ n - \frac{\cos(n+1)\theta_0 \sin 2n\theta_0}{\sin 2\theta_0} \right\} \\
&= \frac{1}{8n} \left\{ n - \sin \frac{2n}{n+1} \pi / \sin \frac{2}{n+1} \pi \right\} \\
&= \frac{n+1}{8n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{A. 6}) \quad & E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos^2 r_2 \theta_0) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_l \sum_m \sin^2 l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\sum_l \sin^2 l \theta_0 \right) \left(\sum_m \cos^2 m \theta_0 \right) - \frac{n+1}{8} \right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{n+1}{8n(n-1)} \\
&= \frac{n+1}{4n} - \frac{n+1}{8n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{A. 7}) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos m \theta_0 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\sum_l \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \right) \left(\sum_m \sin m \theta_0 \cos m \theta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
&= -\frac{n+1}{8n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{A. 8}) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos^2 r_2 \theta_0) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\sum_l \sin l \theta_0 \right) \left(\sum_m \sin m \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ A - \frac{n+1}{8} \right\} \\
&\quad \left(\text{ただし } A = \sum_l \sum_m \sin l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A.9) \quad & E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \right) \left(\sum_m \cos m \theta_0 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_l \sin^2 \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
 &= -\frac{n+1}{8n(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A.10) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_1 \theta_0 \sin r_2 \theta_0 \cos r_3 \theta_0) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{l \neq m \neq t} \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos t \theta_0 \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \left(\sum_l \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \right) \left(\sum_m \sin m \theta_0 \right) \left(\sum_t \cos t \theta_0 \right) \right. \\
 &\quad - \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 \\
 &\quad - \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \sin m \theta_0 \\
 &\quad - \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos m \theta_0 \\
 &\quad \left. - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n+1}{4} - A \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A.11) \quad & E(\sin^2 r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0 \cos r_3 \theta_0) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{l \neq m \neq t} \sin^2 l \theta_0 \cos m \theta_0 \cos t \theta_0 \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \left(\sum_l \sin^2 l \theta_0 \right) \left(\sum_m \cos m \theta_0 \right) \left(\sum_t \cos t \theta_0 \right) \right. \\
 &\quad - 2 \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 \\
 &\quad - \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \\
 &\quad \left. - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n+1}{4} - \frac{n^2-1}{4} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A.12) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos^2 r_2 \theta_0 \sin r_3 \theta_0) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{l \neq m \neq t} \sin l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \sin t \theta_0 \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \left(\sum_l \sin l \theta_0 \right) \left(\sum_m \cos^2 m \theta_0 \right) \left(\sum_t \sin t \theta_0 \right) \right. \\
 &\quad - 2 \sum_{l \neq m} \sin l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \sin m \theta_0 \\
 &\quad \left. - \sum_{l \neq m} \sin^2 l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \} \\
& = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n-1}{2} \cot^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{n+1}{4} - \frac{n^2-1}{4} - 2A \right\} \\
(A.13) \quad & E(\sin r_1 \theta_0 \cos r_2 \theta_0 \sin r_3 \theta_0 \cos r_4 \theta_0) \\
& = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \left\{ \left(\sum_l \sin l \theta_0 \right) \left(\sum_m \cos m \theta_0 \right) \left(\sum_t \sin t \theta_0 \right) \left(\sum_u \cos u \theta_0 \right) \right. \\
& \quad - \sum_{\substack{l \neq m \neq t \\ l \neq t}} \sum \sin l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos^2 t \theta_0 \\
& \quad - \sum_{\substack{l \neq m \neq t \\ l \neq t}} \sum \sin^2 l \theta_0 \cos m \theta_0 \cos t \theta_0 \\
& \quad - 4 \sum_{\substack{l \neq m \neq t \\ l \neq t}} \sum \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos t \theta_0 \\
& \quad - 2 \sum_{\substack{l \neq m}} \sum \sin^2 l \theta_0 \cos l \theta_0 \cos m \theta_0 \\
& \quad - 2 \sum_{\substack{l \neq m}} \sum \sin l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \\
& \quad - 2 \sum_{\substack{l \neq m}} \sum \sin l \theta_0 \cos l \theta_0 \sin m \theta_0 \cos m \theta_0 \\
& \quad - \sum_{\substack{l \neq m}} \sum \sin^2 l \theta_0 \cos^2 m \theta_0 \\
& \quad \left. - \sum_l \sin^2 l \theta_0 \cos^2 l \theta_0 \right\} \\
& = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \left\{ -\frac{n-1}{2} \cot^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{n^2-1}{4} - \frac{3(n+1)}{4} + 4A \right\}
\end{aligned}$$

謝 辞

岡山大学協本和昌教授，鳥城高校菅野長武教諭，両氏から有益な助言や，証明のチェックをしていただきました。ここに深く感謝致します。

参考文献

- 1) Hajek, J. and Sidak, Z., "THEORY OF RANK TEST", Academia, Prague. (1967).
- 2) Hoeffdiog, W. "A class of statistic with asymptotically normal distribution", A.M.S., **19**, 293-325. (1948a).
- 3) Taguri, M., Hiramatsu, M., Kittaka, T. and Wakimoto, K., "Graphical representation of correlation analysis of ordered data by rinked vector pattern", J.J.S.S., Vol. 6, No. 2, 17-25. (1976).

On Wakimoto and others' Area Ratio Correlation Coefficient and Spearman's Rank Correlation coefficient

Reiji NAGANO and Eiji YAMAMOTO

*Department of Applied Mathematics,
Okayama University of Science,
Ridai-cho, Okayama 700, Japan*

(Received September 29., 1980)

The area ratio correlation coefficient between two variables was proposed by Taguri, Hiramatsu, Kittaka and Wakimoto [3] at 1976. In this paper, we give the expression of this statistic and calculate its mean and variance, and prove its asymptotic normality. We consider its projection into the family of linear statistics and compare it with Spearman's rank correlation coefficient.