d-分割分権システムの解析

成　久　洋　之

岡山理科大学教養部

（昭和55年9月29日受理）

1. まえがき

線形経済モデルとしての分権化の問題は，これまで多くの観点から論及[2),3)]されてきている。特に経済学の分野では自由競争市場における均衡価格[1)]との関連において諸種のアプローチを試みている。最近では経済モデルというよりはむしろ経営モデルとしてシステムで捉えた場合の分権化か集権化かの問題も研究対象とされているようである。システムとして見るとき，そのシステム全体の機能を十分に発揮して全体の目的を達成しようとするわけであるが，その際における意思決定のあり方を如何に規定するかが重要である。

システムにはその規模の大小を問わず必らず中枢機能をもち，システム全体が効率的に機能するように各種サブシステムと調整しこれらを統制しなければならない。したがって，システム全体を動かすための中央部とその中央部からの指示に従って実質的にシステムの目的を達成しようとする実動組織とでも云うべきサブシステムとの関連において分権システムを捉えようとするのが本論の狙いである。つまり全システムにおける中央部あるいは中央システム（これもある意味ではサブシステムである）とその統制下にある実施機関としてのサブシステムにおける業務実施上の意思決定を如何様に規定すべきであろうか，またのそのような意思決定の方法はどうか等につき取扱うものである。

システムがその目的逐行を第一義的に追求しようとするとき，システムは一個の有機体のように中央部の指令が末端の各サブシステムまできめ細かく侵透しており，しかも中央部は末端の各種細部にわたる事象についても完全に熟知していることが望ましい。この状態は小規模なシステムならば実現しうる理想的なものであろう。しかしながら，システムが大型化してくれば，このような理想的状態を維持できなくなる。この結果，ある種の管理上の意思決定権をサブシステムに委譲あることになる。つまり分権化の様相を有するシステムが形成されることになる。サブシステムとしてある種の意思決定権を与えられれば中央部からの統制が可能なかぎり少ない方が好ましい事は云うまでもない。しかし独立なシステムでないかぎり完全に中央部からの統制を受けないサブシステムというものは存在しないわけで，如何なる状態にしろサブシステムであれば何らかの統制は当然である。この中央部からの統制を出来るかぎり必要最小限に止めたサブシステムをより自律的（automy）なサブシステムと呼んでいる。全システムの目的を達成するためにはこのようなより自律的な分権システムの方が有利な場合も多い。

意思決定には各種多様なレベルの情報が必要である。したがって，中央集権的システムでは中央部に全ての意思決定をおこなうため末端のあらゆる情報を全て中央に集中させるような構造になっている。分権システムではサブシステムにある種の意思決定をさせるわけであるが少くともその意思決定による活動とその結果については十分な情報を侵取ることになる。すなわち，中央部とサブシステムの各種調整ならびに統制に必要な情報交換量とその情報のレベルをどの程度にするかが分権システムの特徴を大きく左右するものと考えられる。中央部がある種の活動に関するその立案・活動計画の決定・活動の実施を全てサブシステムに委せた場合，中央部としてはその細部の技術的に詳細な情報を個別に報告されても仕方のない事であるし，その場合の情報伝達のための通信量も尨大なものとなろう。したがって，中央部としてはそのサブシステムの活動により如何程の利益を計上しえたかあるいはそれがために必要な資材の供給を中央からどの程度見込んでいるのか等の情報のみが必要とされるであろう。

以上の観点から，分権システムにおける中央部とサブシステムとの間の調整ならびに統制のために必要な交換情報量をより少なくするシステムにつき考察しようとするものである。

分権システムの分析とそのアルゴリズムとして，線形経済モデルを取扱った Dantzig-wolfe の分解原理[4]は分権システムの分析というよりはむしろ大規模線形計画問題の小規模化あるいは効率化アルゴリズムの提案と云った方が妥当であろう。したがって，モデルの形式上は分権システムではあるがその内容は中央集権型のシステムを取扱っており，各サブシステムは単なる情報収集機関あるいは計算実施機関と看做したようなシステムの解法アルゴリズムと云えよう。しかしながら，この分解原理で使用している解析モデルは分権システムを考察する場合の数学モデルとして大いに役立つことは重要な意義をもつものと思われる。すなわち，分権システムモデルにより意思決定のプロセスおよびそれに必要な情報を明確化していることである。

一般に分権化モデルを考えるとき価格情報（中央部で各サブシステムに供給しうる資材の価値を与えるもの）のみでの分権化は不可能とされている。Dantzig-wolfe のモデルでは均衡価格と重み付情報とで分権化を取扱っている。そこで，分権化システムで必要とされる情報は価格情報と何があればよいのか等について論述しよう。

2. 問題の記述

本論文において考察の対象とする線形経済モデルをつぎのように定式化する。

〔P〕
$$\max \sum_{k=1}^{n} C_k x_k$$
$$\text{s.t} \quad B_k x_k \leqq b_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} A_k x_k \leqq d$$

$$x_k \geqq 0, \quad k=1, 2, \cdots, n$$

ただし，C_k，x_k は n 次元ベクトル，b_k は m_k 次元ベクトル d は m 次元ベクトル，B_k および A_k はそれぞれ $m_k \times n_k$，$m \times n_k$ 行列とする。

このシステムでは全体で n 個のサブシステムをもち，各サブシステム（たとえば k）では活動 x_k に対し，制約条件（主として活動にともなう技術的制約）$B_k x_k \leqq b_k$ を満すようにすれば $C_k x_k$ の利益を見込めるものと考えている。さらに，システム全体としては各サブシステムの諸活動に必要な資材を供給するが供給可能資材の上限は d であり，この全体の使用可能資材量 d を適当に配分することにより，各サブシステムでの利益の合計を最大化しようとするものである。したがって，システム全体の立場からすれば，より効率的な資材配分を企図する線形計画問題を定式化したものといえる。

全システムの問題として表わされる〔P〕はいわば親問題とでも呼ばれるものであるが，便宜上これをつぎの２つに区分して考える。その一つは子問題とでも呼ばれるサブシステムの問題〔Q_k〕であり，他は中央部の問題〔T〕でサブシステムの調整および統制にあたる部分の問題である。

〔Q_k〕　$\max \; z_k = C_k x_k$

$$\text{s.t} \quad B_k x_k \leqq b_k, \quad x_k \geqq 0, \quad k=1, 2, \cdots, n$$

（T）　$\max \; z = \sum_{k=1}^{n} z_k$

$$\text{s.t} \quad \sum A_k x_k \leqq d, \quad x_k \geqq 0, \quad k=1, 2, \cdots, n$$

〔P〕の問題を部分問題〔Q_k〕と中央部の問題〔T〕とに区分した背景にはつぎの事情が考えられる。

（i）　全システムの問題〔P〕は大規模過ぎて，その最適解を直接求めることは不可能である。

（ii）　サブシステムが多過ぎて，各サブシステムの諸活動につきその技術的細部情報ならびにそれらの活動により見込まれる利益等を全て中央で把握する事は非常に困難である。

（iii）　サブシステムの活動に関する細部の決定権を分譲し，中央部としては全利益とそれに必要な資材のみを管理するだけで十分である。

（iv）　システムの分権化を計り，システム構成メンバーのモラルを向上させ，併せて全システムの利益をより増加させたい。

（v）　中央部には調整機能が多過ぎて細部調整に任ずる人的キャパンティが不足のため分権システムにする必要がある。

以上の諸理由により〔P〕を〔Q_k〕と〔T〕との問題に区分する方が分権システムを論述するには好都合である。

さて，問題〔P〕は線形経済モデルについて定式化したものであるが，官庁システムあるいは会社での生産工場システムを対応させても全く同様に考えられる。そこで，以下の

記述では会社組織につき論ずるものとし，サブシステムは会社の事業部と看做すことにしよう。

〔Q_k〕は k- 事業部のみに関連する問題でありやはり線形計画問題である。これを解いてその事業部内での最適解を求めることは可能である。各事業部は〔Q_k〕の問題を解き，その結果を中央部に知らせる。中央部は各事業部から送られた結果を集計し，〔T〕の問題として検討し，最適解が求められるまで各事業部と調整しながら解を求めようとするものである。

〔Q_k〕と〔T〕とで最終的には〔P〕の問題の最適解を求めるが，事業部と中央との調整過程につきもう少詳しくのべよう。

第1ステップ：k- 事業部は〔Q_k〕を解き，最適解 x_k^* を求める。($k=1, 2, \cdots, n$) 中央部へ送ろ情報としては z_k, C_k, x_k^*。

第2ステップ：中央部は $\{x_k^*\}$ をもとに〔T〕の問題につき検討する。まず，会社全体で使用可能な資材限度の範囲内か否かを調べる。

（i） $\sum A_k x_k^* > d$（会社全体では資材不足）

このときには各事業部と調整してつぎの (ii) の状況になるように新たな $\{x_k^*\}$ を提出させる。

（ii） $\sum A_k x_k^* \leqq d$（会社全体では資材不足なし）

〔T〕の条件式は成立している。このような場合 $\{x_k^*\}$ は〔T〕の実行可能解となっているという。(ある解がある問題（たとえば〔T〕）の実行可能解となっていることを〔T〕-fes と書くことにする)

第3ステップ：〔T〕の実行可能解 $\{x_k^*\}$ とそれに対応する $\{C_k\}$ とでつぎの方程式の w^* を決定する。

$$w^{*t}\underline{A}_k=\underline{C}_k$$

ただし w^* は m 次元ベクトルとする。

この w^* を決定するために，中央部は $\{x_k^*\}$ の中から m 個の $\{\underline{x}_k^*\}$ を選ぶ。この $\{\underline{x}_k^*\}$ に対応したものか $\underline{A}_k$ および $\underline{C}_k$ である。すなわち，$\underline{A}_k$ は $m\times m$ 行列で $\underline{C}_k$ は m 次元ベクトルである。したがって，

$$w^{*t}=\underline{C}_k A_k^{-1} \quad [|A_k|\neq 0]$$

となって〔T〕の実行可能解が与えられれば，それにより w^{*t} を決定できる。

さらに，中央部はこの w^* を使って

$$H_k=C_k-w^{*t}A_k,\ k=1, 2, \cdots, n$$

を計算する。この結果

（i） $H_k\leqq 0$ ならば $\{x^*_k\}$ は〔T〕の最適解

（ii） $H_k\geqq 0$ ならば $\{H_k\}$ を事業部に送る。

第4ステップ：k- 事業部は H_k を使って，つぎの〔P_k〕問題を解く。

〔P_k〕 $\max\ (C_k - w^{*t}A_k)x_k$

s.t $B_k x_k \leqq b_k$

$x_k \geqq 0$

ただし，$C_k - w^{*t}A_k = H_k$

この結果を中央部に送り，第２ステップへ。

以上の事から分権システムの問題〔P〕を解く場合，中央部の〔T〕と各事業部の〔Q_k〕あるいは〔P_k〕の間で，多数回の情報交換を必要とし，中央部が事業部を調整および統制する過程がかなり浮掘りされたことになり，分権システムの問題が何を問題としているかが概観できたものと思われる。

3. 分解問題に関する理論展開

分解可能な線形モデルとして分権システムモデル〔P〕を考えるとき，その双対問題〔D〕はつぎのように与えられる。

〔D〕 $\min \sum_{k=1}^{n} v_k{}^t b_k + w^t d$

s.t $v_k{}^t B_k + w^t A_k \geqq C_k$

$v_k \geqq 0,\ w \geqq 0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

ただし，v_k，w はそれぞれ m_k 次，m 次ベクトルであり，問題〔P〕における第１および第２条件式に対応する双対変数とする。

いま〔P〕および〔D〕で与えられる全体問題の最適解がそれぞれ $\bar{x}_k$，$(\bar{v}_k,\ \bar{w})$ と求められたものと仮定する。すると，線形計画法における理論より w は会社全体の資材に対応する価格とみることができる。すなわち，$\bar{w}^t A_k x_k$ は k- 事業部の活動 x_k に必要な経費を表わしている。したがって，事業部の問題としてはつぎのような双対系〔P_k〕と〔D_k〕とを規定できる。

〔P_k〕 $\max\ (C_k - \bar{w}^t A_k)x_k$

s.t $B_k x_k \leqq b_k,\ x_k \geqq 0$

〔D_k〕 $\min\ v_k{}^t b_k$

s.t $v_k{}^t B_k \geqq C_k - \bar{w}^t A_k,\ v_k \geqq 0$

定理１：$\bar{x}_k$，$\bar{v}_k$ を〔P〕および〔D〕の最適解における第 k 部分を表わすものとするとき，それらは同時に〔P_k〕および〔D_k〕の最適解となる。

（証明） $\{(\bar{x}_k,\ v_k)\}$ が〔P〕および〔D〕の最適解であるから，つぎの関係が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k{}^t b_k + \bar{w}^t d \tag{1}$$

$$\bar{w}^t\left(d - \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{x}_k\right) = 0 \tag{2}$$

(2)式は最適解におけるスラック変数の相補性を表わすもので，これを変形して(3)式をうる。

$$\bar{w}^t d = \sum^{n} \bar{w}^t A_k \bar{x}_k \tag{3}$$

(1)と(3)式より

$$\sum_{k=1}^{n} C_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k{}' b_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{w}^t A_k \bar{x}_k$$

となり(4)式が求められる。

$$(C_k - \bar{w}^t A_k)\bar{x}_k = \bar{v}_k{}^t b_k \tag{4}$$

一方，$\bar{x}_k$ は〔P〕-fes であるので

$$B_k \bar{x}_k \leqq b_k \tag{5}$$

が成立する。さらに，v_k は〔D〕-fes であることから

$$\bar{v}_k{}^t B_k + \bar{w}^t A_k \geqq C_k \tag{6}$$

となり，(4)，(5)，(6)式が成立することは $\bar{x}_k$，$\bar{v}_k$ が〔P_k〕および〔D_k〕の最適解となっていることを示す。 Q. E. D.

定理 2：($\bar{y}_k$，$\bar{v}_k$) が〔P_k〕および〔D_k〕の最適解であるとき，{$\bar{v}_k$，$\bar{w}$} は〔D〕の最適解である。

(証明) 〔P_k〕および〔D_k〕の最適性より

$$(C_k - \bar{w}^t A_k)\bar{y}_k = \bar{v}_k{}^t b_k$$

ところが定理 1 より

$$(C_k - \bar{w}^t A_k)\bar{x}_k = \bar{v}_k{}^t b_k$$

となっていることから

$$\sum C_k \bar{x}_k = \sum \bar{v}_k{}' b_k + \bar{w}^t d$$

として与えられる。これは〔P〕および〔D〕に対する最適解となっていることを示し，($\bar{v}_k$，$\bar{w}$) は〔D_k〕-fes であることから {$\bar{v}_k$，$\bar{w}$} は〔D〕の最適解となっている。 Q. E. D

分権システムが〔P〕および〔D〕で与えられる会社全体の問題と各事業部の問題〔P_k〕および〔D_k〕との間には定理 1 および定理 2 で記述した性質がある。すなわち，中央部より最適価格 $\bar{w}$ が与えられた場合の全体問題と部分問題との間に成立する関連性を明らかにしたものである。

中央部の問題での最適解を {$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_k$，…，$\bar{x}_n$} としその双対解を {$\bar{v}_1$，$\bar{v}_2$，…，$\bar{v}_k$，…，$\bar{v}_n$，$\bar{w}$} であるとする。双対定理 (dual theoum for linear programming) より，

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k{}^t b_k + \bar{w}^t d$$

$$\bar{v}_k{}^t (b_k - B_k \bar{x}_k) = 0$$

$$\bar{w}^t (d - \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{x}_k) = 0$$

$$(\bar{v}_k{}^t B_k + \bar{w}^t A_k - C_k)\bar{x}_k = 0$$

となっている。したがって，

$$\bar{w}^t d = \sum \bar{w}^t A_k \bar{x}_k \tag{7}$$

において

$$d_k = A_k x_k,\quad \overline{d}_k = A_k \bar{x}_k \tag{8}$$

と定義すれば(7)式は

$$\bar{w}^t\bar{d} = \sum \bar{w}^t\bar{d}_k \tag{9}$$

として表示される。(9)式の左辺は会社全体の全資材費用を意味していることから，$\{\bar{w}^t\bar{d}_k\}$ は $\bar{w}^t d$ のある種の分割を意味する。この分割は価格 $\bar{w}$ に関する費用分割とみることができよう。(8)式は会社全体のもつ資材ベクトル d の分割ベクトルとして d_k を考えているを意味し

$$\sum d_k \leqq d \tag{10}$$

となっていなければならない。この分割のことを d- 分割と呼ぶことにする。

4. d- 分割による分権システム

中央部より価格と資材分割に関する情報が各事業に通報された場合の問題について考察しよう。

〔P_{k-1}〕　max $(C_k-\bar{w}'A_k)x_k - M||A_kx_k-\bar{d}_k||$

　　　　s.t　$B_kx_k \leqq b_k$，$x_k \geqq 0$

ただし，$||\cdots\cdots||$ はベクトルの要素の絶対値和を表わし M は罰金を表わすもので，任意の大きな実数とする。

定理 3：もし $\{\bar{y}_k\}$ が〔P_{k-1}〕に対する任意の最適解集合であるならば，$\bar{y}_k$（$k=1, 2, \cdots, n$）は〔P〕の最適解となる。

（証明）$\{\bar{y}_k\}$ が〔P_{k-1}〕の最適解集合であり，$\bar{x}_k$ は〔P〕の最適解における第 k 部分の解を表わしていることから，つぎの関係が成立する。

$$(C_k-\bar{w}'A_k)\bar{y}_k - M||A_k\bar{y}_k-\bar{d}_k|| \geqq (C_k-\bar{w}'A_k)\bar{x}_k - M||A_k\bar{x}_k-\bar{d}_k||$$

すなわち，$\bar{x}_k$ は〔P_{k-1}〕に対し実行可能解でもある。

ところが(8)式より，(11)式をうる。

$$(C_k-\bar{w}'A_k)\bar{y}_k - M||A_k\bar{y}_k-\bar{d}_k|| \geqq (C_k-\bar{w}_kA_k)\bar{x}_k \tag{11}$$

一方，定理 1 より $\bar{x}_k$ は〔P_k〕の最適解であり，$\bar{y}_k$ は〔P_k〕に対し実行可能解となっていることから，

$$(C_k-\bar{w}'A_k)\bar{x}_k \geqq (C_k-\bar{w}^tA_k)\bar{y}_k \tag{12}$$

となる。したがって，(11)式および(12)式より

$$(C_k-\bar{w}'A_k)\bar{x}_k = (C_k-\bar{w}'A_k)\bar{y}_k \tag{13}$$

$$||A_k\bar{y}_k-\bar{d}_k|| = 0 \tag{14}$$

とならなければならない。(14)式と(10)式より

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\bar{y}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{d}_k \leqq d \tag{15}$$

となり，また(13)式より

$$\sum_{k=1}^{n} (C_k-\bar{w}^tA_k)\bar{y}_k = \sum_{k=1}^{n} C_k\bar{x}_k - \bar{w}^td = \sum \bar{v}_k{}^tb_k \tag{16}$$

となって $\{\bar{y}_k\}$ は〔P〕の最適解となりうる。　Q. E. D

定理 3 は価格 $\bar{w}$ の他に資材分割ベクトル $\bar{d}$ を用いることにより，事業部は会社全体の

企図（〔P〕の最適解を求める）に合致した独自の活動を実施しうることを述べている。すなわち，事業部独自の意思決定に対し中央部から何ら修正されたり調整されたりすることはあり得えない。何故なら当初から中央部の意図に沿った計画を立案し，その計画に基いて活動を実行しこいるからである。

さて定理3での分割ベクトル $\bar{d}_k$ が〔P〕の最適解 $\{\bar{x}_k\}$ に依存して決定されていることを考えると，一般に d の分割を如何にすれば〔P〕の最適解に近ずきうるであろうか。いま何らかの方法で中央部からwが事業部に通報されたものとしよう。さらに，

$$F_k=\{x_k \mid B_k x_k \leqq b_k,\ \ x_k \geqq 0\}$$

$$G_k=\{x_k^* \mid (C_k-\bar{w}^t A_k)x_k^* \geqq (C_k-\bar{w}^t A_k)x_k,\ \ x_k \in F_k\}$$

として集合 F_k，G_k が与えられるものとする。

定義：価格 $\bar{w}$ に関するベクトル d の分割とは $\{d_k\}$ がつぎの3条件を満たすものをいう。

〔PC 1〕　すべての k に対し，$d_k=A_k x_k$ となるような $x_k \in F_k$ が存在する。

〔PC 2〕　$\sum_{k=1}^{n} d_k \leqq d$

〔PC 3〕　$\sum_{k=1}^{n} \bar{w}^t d_k=\bar{w}^t d$

この分割の定義によれば，定理3で用いた $\bar{d}_k$ は明らか〔PC 1〕～〔PC 3〕をすべて満足するので分割となっていることがわかる。

〔P_{k-2}〕　max　$(C_k-\bar{w}^t A_k)x_k$

s.t　$B_k x_k \leqq b_k$

$A_k x_k=d_k,\ \ x_k \geqq 0$

〔D_{k-2}〕　min　$(v_k{}^t b_k+\eta_k{}^t d_k)$

s.t　$v_k{}^t B_k+\eta_k{}^t A_k \geqq C_k-\bar{w}^t A_k,\ \ v_k \geqq 0$

ただし，η_k は資材制約式に対応する双対変数で m 次元ベクトルとする。

定理4：$\bar{y}_k$，$(\bar{v}_k,\ \bar{\eta}_k)$ がそれぞれ〔P_{k-2}〕および〔D_{k-2}〕の最適解であるとき，$\{\bar{y}_k,\ (\bar{v}_k,\ \bar{\eta}_k)\}$ が〔P〕および〔D〕の最適解であるための必要十分条件はつぎのとおり。

（i）すべての $\bar{v}_k$ が〔D_k〕に対し実行可能解となっていること。

（ii）$\sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k d_k=0$

（証明）$\bar{y}_k$，$(\bar{v}_k,\ \bar{\eta}_k)$ が〔P_{k-2}〕，〔D_{k-2}〕の最適解であることから，

$$(C_k-\bar{w}^t A_k)\bar{y}_k=\bar{v}_k{}^t b_k+\bar{\eta}_k{}^t d_k$$

となる。これを辺々加え合せることにより

$$\sum_{k=1}^{n}(C_k-\bar{w}^t A_k)\bar{y}_k=\sum_{k=1}^{n}\bar{v}_k{}^t b_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{\eta}_k{}^t d_k$$

として与えられる。ところが，この問題は分割に関する定義も適用できるので，〔PC 3〕より

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\bar{y}_k-\bar{w}^t d=\sum_{k=1}^{n} v_k{}^t b_k+\sum_{k=1}^{n}\bar{\eta}_k{}^t d_k,$$

さらに〔PC 2〕より $\{\bar{y}_k\}$ は〔P〕-fes である。

したがって，〔P〕，〔D〕に対し，最適解となるためには

$$\sum_{k=1}^{n} C_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k{}^t b_k + \bar{w}^t d$$

でなければならないので

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k{}^t d_k = 0$$

でなければならない。また，$\{\bar{v}_k, \bar{w}\}$ は〔D〕に対し，〔D〕-fes であり〔D_k〕と同値である。 Q.E.D

この定理4は分割が成立する場合の分権問題についてのべたものであるが，特に定理4の(ii) が成分するような分割を C- 分割と云う。つぎに。C- 分割の求め方についてのべる。

定理5：もし $\{d_k\}$ が1つの分割を与え，各 k に対し，$A_k x_k = d_k$ となるような $x_k \in G_k$ が存在するならば，$\{d_k\}$ は $\bar{\eta}_k = 0$ となるような C- 分割である。

(証明) 各 k に対し，$d_k = A_k \bar{y}_k$ となるような $\bar{y}_k \in G_k$ が存在するものとしよう。$\bar{y}_k$ は〔P_k〕に対し最適解であるから

$$C_k y_k = \sum v_k{}^t b_k + w^t d$$

でしかも〔D_k〕-fes となるような v_k が存在する。

したがって，すべての k に対し $\bar{\eta}_k = 0$ であれば定理4より $\{d_k\}$ は C- 分割となる。Q.E.D

定理6：任意の C- 分割が与えられれば，すべての k に対し $\bar{\eta}_k = 0$ となるような〔P_{k-2}〕および〔D_{k-2}〕に対しては，つねにそれらの最適解を求めうる。

(証明) $\bar{y}_k$ を C- 分割により決定したものとすれば $\{\bar{y}_k\}$ は〔P〕の最適解となることは明らかである。したがって，すべての k にに対し $\bar{\eta}_k = 0$ であれば定理1より $\bar{y}_k \in G_k$ となる。定理5より〔P〕の最適解が求まればそれはつねに〔P_{k-2}〕および〔D_{k-2}〕の最適解となる。 Q.E.D

資材の配分は中央部が事業部を統制できる重要な情報であるが，資材の分割ベクトル d_k の代りに資材費用の分割を考えた分権システムはどうなるであろうか。(9)式で与えた関係より，$\{\bar{w}^t d_k\}$ は会社全体の資材費用のある種の分割を与える。中央部が事業部に対し費用を分割して配分することは単一の概念だけにより直接的なしかも現実的な分権システムを構成しうるものと思われる。

会社の中央部が事業部に対し，価格情報 $\bar{w}$ と配分資材費用 $\bar{w}^t d_k$ を通報しているものとすると〔P_{k-2}〕の代りにつぎのような k- 事業部の問題を定式化できる。

〔P_{k-3}〕 $\max\ (C_k - \bar{w}^t A_k) x_k - M |\bar{\xi}_k - \bar{w}^t A_k x_k|$

s.t $B_k x_k \leqq b_k,\ x_k \geqq 0$

ただし，$\bar{\xi}_k$ はつのとおり。

$$\bar{\xi}_k = \bar{w}^t A_k \bar{x}_k = \bar{w}^t d_k \tag{16}$$

補題：〔P_{k-3}〕はつぎの〔P_{k-4}〕と同値である。

〔P_{k-4}〕 $\max\ (C_k - \bar{w}^t A_k) x_k$

s.t $B_k x_k \leqq b_k$

$$\bar{w}^t A_k x_k = \bar{\xi}_k, \quad x_k \geqq 0$$

(証明) 〔P_{k-3}〕および〔P_{k-4}〕に対する最適解をそれぞれ $\bar{y}_{k3}$, $\bar{y}_{k4}$ とする。$\bar{y}_{k4}$ は〔P_{k-3}〕-fes であるから

$$(C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k3} - M|\bar{\xi}_k - \bar{w}' A_k \bar{y}_{k3}| \geqq (C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k4} - M|\bar{\xi}_k - \bar{w}' A_k \bar{y}_{k4}|$$

となる。しかるに,

$$\bar{\xi}_k = \bar{w}' A_k \bar{y}_{k4}$$

であることから

$$(C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k3} - M|\bar{\xi}_k - \bar{w}^t A_k \bar{y}_{k3}| \geqq (C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k4} \tag{17}$$

となる。

$$\bar{w}' A_k \bar{y}_{k3} \neq \bar{\xi}_k \tag{18}$$

となるような $\bar{y}_{k3}$ が存在したと仮定してみると

$$|\bar{w}^t A_k \bar{y}_{k3} - \bar{\xi}_k| > 0$$

である。M を十分大きくすると(17)式の左辺は負の値をいくらでも小さくとりうるし〔P_{k4}〕は実行可能領域で有界な解を持たないことにある。これは〔P_{k4}〕が最適解 $\bar{y}_{k4}$ をもたないことを意味し仮定に反する。すなわち,(18)式での仮定がおかしいということで $\bar{y}_{k3}$ は〔D_{k4}〕-fes である。$\bar{y}_{k3}$ が〔P_{k4}〕の実行可能解となっておれば

$$(C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k4} \geqq (C_k - \bar{w}^t A_k)\bar{y}_{k3} \tag{19}$$

でなければならず,(17),(19)式よりつぎの関係が成立するはずである。

$$(C_k - \bar{w}^t A_k)\bar{y}_{k3} = (C_k - \bar{w}' A_k)\bar{y}_{k3}$$

$$\bar{w}^t A_k \bar{y}_{k3} = \bar{\xi}_k$$

すなわち,$\bar{y}_{k3} = \bar{y}_{k4}$ となる。 Q. E. D

定理 7:〔P〕が最適解をもち,その k 番目の解は F_k の端点となっているものとすると,k- 事業部は中央部から $\bar{w}$ と $\bar{\xi}_k$ のみを受取ることにより〔P〕の最適解の第 k 部分の解 $\bar{x}_k$ を求めうる。

(証明) 補題より〔P_{k-4}〕の問題として考える。仮定より $\bar{x}_k$ は F_k の端点となっている。ここで,$\bar{x}^k$ を

$$\bar{x}_k = (\bar{x}_{k1}, \ \bar{x}_{k2}, \ \cdots, \ \bar{x}_{km})$$

となっているものとする。この $\bar{x}_k$ を通る超平面をつぎのように表わす。ただし,$\varepsilon > 0$ とする。

$$(\bar{w}^t A_k + (\varepsilon, \ \varepsilon^2, \ \cdots, \ \varepsilon^m))x_k = \bar{\xi}_k + \sum \bar{x}_{kj}\varepsilon^j \tag{20}$$

ε を十分小さくとれば F_k の唯一の端点となっている。記号簡単化のため,(20)式をさらに(21)式で表示する。

$$\overline{Q}_k(\varepsilon) x_k = \bar{\xi}_k(\varepsilon) \tag{21}$$

これはつまり(16)式での $\bar{\xi}_k$ の摂動を意味する。中央部では資材配分の過程でこのことを実施しているわけである。したがって,$\bar{\xi}_k$ を用いて〔P〕に対する $\bar{x}_k$ を求めることはつぎ

の〔P_{k-5}〕を k- 事業部の問題として解くことと全く同じことである。

〔P_{k-5}〕 $\max\ (C_k-\bar{w}'A_k)x_k-M|\xi_k(\varepsilon)-\overline{Q}_k(\varepsilon)x_k|$

$\text{s.t}\quad B_kx_k\leqq b_k,\ \ x_k\geqq 0$

補題と(20)式とより，F_k の端点になるような最適解 $\bar{x}_k$ を〔P_{k-5}〕より求めうる。 Q. E. D

これまでの記述においては，各事業部での問題に対する最適解集合 G_k の中から会社全体の最適解となり解を求めるためには如何なる方法をとればよいかということを主として取扱った。しかしながら，中央部から各事業部に割当てられる d 分割がすべて C 分割となるようにうまく分割できないこともある。

いま n 事業部のうちの最初の r 個の事業部は分割ベクトル d_k が必要でありつぎのように近似されているものと仮定する。

$$d_k=A_k\bar{y}_k+\beta_k \tag{22}$$

ただし，$||\beta||<\delta$，$\bar{y}_k\in G_k$，$d_k=\overline{d}_k=A_k\bar{x}_k$ とする。また，残りの $(n-r)$ 個の事業部には資材費用 $\bar{\xi}_k$ が通報されて次式で近似されているものとする。

$$\bar{\xi}_k(\varepsilon)=\overline{Q}_k(\varepsilon)\bar{y}_k+\delta_k \tag{23}$$

ただし，δ_k は小さな実数とする。

ここで，$E_\varepsilon=(\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \cdots,\ \varepsilon^m)$ とすると(23)式は

$$\bar{\xi}_k+\bar{x}_k{}'E_\varepsilon=w'A_k\bar{y}_k+\bar{y}_k{}'F_\varepsilon+\delta_k \tag{24}$$

となる。$\bar{y}_k$ が〔P_k〕の最適解となっていることから

$$(C_k-\bar{w}'A_k)\bar{y}_k=\bar{v}_k{}'b_k \tag{25}$$

が成立し，この $\{\bar{v}_k\}$ は〔D〕-opt となる。したがって，〔D〕の目的関数値は $\sum_{k=1}^{n}\bar{v}_k{}'b_k+\bar{w}'d$ となる。(25)式より

$$\sum_{k=1}^{n}C_k\bar{y}_k-\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{y}_k=\sum_{k=1}^{n}\bar{v}_k{}'b_k$$

となる。そこで，$\bar{x}_k$ の代りに $\bar{y}_k$ を用いた場合の目的関数値の差は，いわゆる近似誤差と考えられる。

$$\sum_{k=1}^{n}C_k\bar{x}_k-\sum_{k=1}^{n}C_k\bar{y}_k=\sum_{k=1}^{n}w'A_k\bar{y}_k-\bar{w}'d \tag{26}$$

そこで，$\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{y}_k$ について計算してみよう。

$$\sum_{k=1}^{r}\bar{w}'A_k\bar{y}_k=\sum_{k=1}^{r}(\bar{w}'d_k-\bar{w}'\beta_k)=\sum_{k=1}^{r}\bar{w}'A_k\bar{x}_k-\sum_{k=1}^{r}\bar{w}'\beta_k$$

$$\sum_{k=r+1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{y}_k=\sum_{k=r+1}^{n}(\bar{x}_k-\bar{y}_k)'E_\varepsilon+\sum_{k=r+1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{x}_k-\sum_{k=r+1}^{n}\delta_k$$

この両式を辺々加え合せることにより

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{y}_k=\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{x}_k-\sum_{k=1}^{r}\bar{w}'\beta_k+\sum_{k=r+1}^{n}(\bar{x}_k-\bar{y}_k)'E_\varepsilon-\sum_{k=r+1}^{n}\delta_k$$

となる。$\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{x}_k=\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'d_k=\bar{w}'d$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{w}'A_k\bar{y}_k=\bar{w}'d-\left[\sum_{k=1}^{r}\bar{w}'\beta_k-\sum_{k=r+1}^{n}(\bar{x}_k-\bar{y}_k)'E_\varepsilon+\sum_{k=r+1}^{n}\delta_k\right]$$

となり，近似誤差は

$$\sum_{k=r+1}^{r} \bar{w}^t \beta_k - \sum_{k=r+1}^{n} (\bar{x}_k - \bar{y}_k)^t E_\varepsilon + \sum_{k=r+1}^{n} \delta_k \tag{27}$$

として与えられる。

(27)式より β_k および δ_k を十分に小さくとれば会社全体の最適値誤差を小さくできることを示している。また，各事業部での最適解選択の誤差も $\varepsilon>0$ を十分小さくすることによりかなり削減しうることもわかる。

5. まとめ

分権システムについての特性を論述したものであるが中央部と事業部とで全体のシステム目的追求の段階でかなり情報交換ならびに調整を必要とすることがいえる。中央部としては可能なかぎり事業部に最小限の情報を送るだけで事業部独自の意思決定により諸活動を実施させしかもその結果が全く会社全体の意図するものと合致すればそれに越した事はない。

本論文で展開した d- 分割の理論は交換情報あるいは中央部と事業部の情報交換の回数をより少なくし，より現実的な分権システム解法のアルゴリズムを確立せんがためのものである。分権システムである以上，何らかの情報交換は統制あるいは管理する側とされる側とで絶対に必要である。具体的には中央部は事業部に対し資材に関する価格情報を伝達することは如何なる分権システムといえども不可欠の要件である。しかし，この価格情報のみでは事業部の意思決定は不可能であるとされている。したがって，ある分権システムでは価格優先度に基づく階層順位に関する情報などによる意思決定を定義づけている。価格と d- 分割による割当資材の情報による分権システムは集約情報を伝達するための中央部と事業部との間の情報交換回数は重み情報を伝達する場合に比較し大巾に減少しうることは云うまでもない。この代償として中央部での業務の一部を各事業部が実施することにもなるが，各事業部は自己の特殊事情を十分に反映した意思決定をおこなうことができ，その結果は殆んど中央部でのそれと同程度の効果を期待できるものとすることが可能でより自律的な分権システムを実現できることになる。

分権システムでの各事業部で部分問題の最適解を求める場合，全システムの正確な部分最適解とするのは大変困難な問題といえよう。このことは事業部の数が増大してくればなお更のことである。そこで現実的なしかも利用に供しうる解法アルゴリズムとしては近似解でもよいから早く簡単に求めうるものがあればその方が望ましい場合が多い。その意味からは本論文での分権システムの考え方はかなり強力な解法理論ともなりえよう。

文 献

1) Arrow, K. J. and Hurwicz, L., "Decentration and Computation in Resource Allocation," Essays in Economics and Econometrics, University of North Carolina (1960).

2) Balas, E., "An Infeasibility-Pricing Deconnposition Method for Linear Programs," *Operations Research*, **14** PP 847∼873 (1966).

3) Baumol, W. J, and Fabian, T., "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economics," *Management Science*, **11**, pp 1～32 (1964).

4) Dantzig, G. B. and Wolfe, P., "Decomposition Principle for Linear Programs, "*Operation Research*, **8**, PP 101～111 (1960).

5) Kornai, J. and Liptatak, T., "Two-Level Planning," *Econometrica*, **33**, pp 141～169, (1965).

6) Kydland, F., "Hierachical Decomposition in Linear Economic Models," *Management Science*, **21**, pp 1029～1039, (1975).

7) 成久洋之 "分権システムについての一考察", 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 (1-B-4), pp. 33～34, (1978).

Analysis for Decentralization Systems by Direct Decomposition

Hiroyuki NARIHISA

Department of General Education,
Okayama University of Science,
Ridai-cho, Okayama 700, Japan

(Received September 29, 1980)

For large scale systems management, the delegation of the parts of the decision making from the central unit to their sub-systems' units is innevitable phenomena. Consequently, it is natural to decompose the large scale systems into the appropriate scale sub-systems according to their characteristics. In these points of view, the analysis and the theorem concerning to the decentralization systems have been regarded as the important investigation for the management systems as well as the economic systems for these years.

In decomposable linear economic models it is generally not possible to decentralize by price alone. The Dantzig-Wolfe procedure delegates weights on basic solutions in addition to the equilibrium prices. In this paper, we present a direct decomposition procedure for decentralization systems where we in addition to prices delegate the allocated resources information. This delegation of the allocated resources in addition to equilibrium prices gives the sub-systems more automy in their decision making. Therefore, we can establish the decentralization systems which have a few adjustment between the central unit and their sub-systems' units in order to reach the global optimum as well as sub-systems' one.