単純多数決原理の非整合性について

塩　飽　直　紀

序

いわゆる“投票のパラドックス”[1) をより一般化して，K. J. アローはその著“Social Choice and Individual Value” 1955, 2nd, ed. 1963 において，「一般可能性定理」をうち立て，「合理的」かつ「民主的」な，(つまり，アローの５条件を満たすような) 社会的厚生関数 Social Welfare Function が存在しえないことを論証した。

アローのいう社会的厚生関数は，バーグソン＝サミュエルソン流の社会的厚生関数と同義ではないものの，後者は，前者の成立を前提してはじめて存在しうるものであるため，それまでの厚生経済学にとって，重大な理論的困難を提起した。[2)]

とうぜんアローの研究を受けて，その後多くの研究者が，「アロー定理」の吟味，一般化に携わり，さらに，それを超えるべき試み等が続出した。

以下の小論では，まず〔Ｉ〕でアロー定理を定式化し，〔Ⅱ〕でアローの社会的厚生関数の１パターンとしての単純多数決原理が，限定された意味においてアロー定理を超えうるための諸条件を列挙する。つづいて〔Ⅲ〕では，〔Ⅱ〕での可能性を保証する諸条件は，実は，選択対象が３次元以上の空間内の点で表わされ，また個人の選好がわずかでも異なる場合には，すべて成立しえなくなることを，G. H. クラマー（1）にしたがってみてゆく。

【Ｉ】“アローの一般可能性定理”の定式化

まず，とりあえず必要な記号を次のように定めて，アローの一般可能性定理を定式化してゆく。

x, y, z, ……；　選択対象（簡単に，対象）

S　；　選択対象の全体集合

i　；　社会構成員（簡単に，個人）

R_i　；　S 上での個人 i の選好関係

R　；　各 R_i に対応して得られる社会全体としての選好関係（簡単に，社会的選好）

ここで，対象の任意のペアー (x, y) について，“xR_iy”とは，“個人 i は x を y よりも選好するか，または両者について無差別である”ことを意味すると定義する。

この二項関係 R_i は，次の２つの公理を満足するものと仮定する。

（公理１：連結性）　$\forall\ (x, y)\ \ (xR_iy \text{ or } yR_ix)$

（公理２：推移性）　$\forall\ (x, y, z)\ [(xR_iy\ \&\ yR_iz) \Rightarrow xR_iz]$

この2公理を満たす R_i は,かくて,選好順序関係を構成する。S 上の全てのペアーについて，各個人 i がこの2つの公理を満たす R_i を持つとき，i のことを整合的 consistent な個人，あるいは，合理的 rational な個人という。

関係 R_i を，“x を y よりも選好する”（記号，xP_iy で表わす）と，“x と y は無差別である”（記号，xI_iy で表わす）の2つに分解して定義すると，

$$xP_iy \leftrightarrow \sim (yR_ix)$$

$$xI_iy \leftrightarrow xR_iy \,\&\, yR_ix \leftrightarrow \sim (yP_ix) \,\&\, \sim (xP_iy)$$

であり，P_i を強選好関係，I_i を無差別関係という。

さて，ここで，S の各要素についての各個人の選好順序づけによって，それらについての社会的選好が決定されると考える。つまり，社会的選好 R は各個人の選好順序 R_i ($i=1. 2. \cdots. n$) によって決定されるのであるから，R は R_i の関数となる。この関数 $R=F(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ を，アローに従って，社会的厚生関数 Social Welfare Function と名づける。アローが証明したのは，関数 $R=F(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ に，次に掲げる5つの条件（いわゆるアローの5条件）を課した場合には存在しえず，存在したとすれば，5条件のうちどれかが欠けたものにならざるを得ないということであって，以下，5条件と定理を掲げておく。

条件1：（社会的選好の整合性と個人的選好順序の広範性）

社会的選好は，個人的選好と同様，整合的（合理的）である。つまり，順序の性質を持つ。また個人的選好順序は，S の中の少くとも1つのトリプル（対象が3個の組）については，あらゆる可能な組合せをとる。

条件2：（正の相関関係）

任意の対象 x について，全ての個人の選好が，それまでよりも高く評価するか，又は変わらないように変化するとする。ただし，その他の対象については不変である。このとき，社会的選好において x よりも劣ると判断された対象は依然として x に劣るとされる。

条件3：（無関係な対象からの独立性と選好の序数的性格）

対象の全体集合 S の任意の部分集合において，全ての個人的選好順序が一致するならば，社会的選択 Social Choice は，一致する。その部分集合以外の部分での個人の順序づけが違っていても，その部分集合の上での社会的選択には影響しない。仮に順序づけ以外の条件，たとえば基数的効用の大きさで個人の選好に差があったとしても，社会的選択には影響しない。このことを記号で表わせば $\{\forall i \forall (x, y) [xR_iy \leftrightarrow xR_i'y]\} \Rightarrow \{C(A) = C'(A)\}$。ただし，社会的選択 $C(A)$ とは，部分集合 $A \subset S$ につき，$\forall (y \in A)\ (xRy)$ のような対象 x をさす。

条件 4：(市民主権または非賦課性)

いかなる対象のペア (x, y) をとっても，それについての社会的選好が，R_i のいかんにかかわらず，つねに xRy であることはない。

条件 5：(非独裁性)

あらゆる対象のペア (x, y) について，無差別型の選好 (xI_iy) でない限り，その判断がつねに社会の判断として採用されるような個人は存在しない。

$\sim \exists i \forall (x, y) \{xP_iy \Rightarrow xPy\}$

ここで記号 P は，P_i に対応する社会的強選好関係を表わす。

<アローの一般可能性定理>

「少なくとも3つ以上の選択対象が存在するとき，条件1～5の全てを満足する社会的厚生関数は存在しない。」

なお，その後，条件1のうち，個人的選好順序の広範性の部分を，ブラウ (3) が次の条件 1′ に修正し，また稲田 (4) が条件2と4から次の条件 URP を導出して，こうした新しい条件のもとで，アロー定理の一般化を行なっている。

条件1′：(最大の広範性)

全ての選択対象について，個人的選好の組合せは，全ての可能な形をとる。

条件 URP：(全員一致のルール unanimity rule of preference)

次の条件を URP とよぶ

$\forall (x, y) \{\forall i (xP_iy) \Rightarrow xPy\}$

つまり，全員一致してより高く評価すれば，社会的選好もそれに従うということである。

<稲田の一般可能性定理>

「少なくとも3つの選択対象が存在するとき，条件 1′，条件3，URP，条件5を全て満たすような整合的な社会的厚生関係は存在しない。」

【II】 単純多数決原理と個人的選好の制限

序において触れておいたように，アローの一般可能性定理は，厚生経済学の理論的基礎に対する極めて深刻な疑問を投げかけたために，その後多くの研究者によってアローの諸条件を批判的に吟味し，なんらかの修正を施すことによって，何とかアロー定理を超えようとする努力がなされてきた。条件2(正の相関関係)，条件4(市民主権または非賦課性)あるいは両者より導出される URP や，条件5 (非独裁性) 等の諸条件は，民主々義社会を前提にする限り否定しがたく，したがって，条件1 (社会的選好の整合性と個人的選好順序の広範性) と条件3 (無関係な対象からの独立性と選好の序数的性格) を吟味，修正することによって，定理の成立しないケース，つまり社会的厚生関数が存在しうるケースを発見しようとする努力が主要な流れであった。本節では，その中でも，特に条件1のう

ちの個人的選好順序のあり方を適当に狭めれば，単純多数決原理とよばれる特殊な社会的厚生関数は，その他の条件は全て満足するという方向での主要な帰結を，クラマーに従って整理しておく。

まず，単純多数決原理の正確な定義を与えておくと，

定義：(単純多数決原理)

次のような社会的決定のルールを単純多数決原理とよぶ。

$$\{N(xP_iy) \geqq N(yP_ix)\} \leftrightarrow xRy$$

ただし，$N(xP_iy)$ とは，xP_iy であるような個人（投票者）の数をさす。

このように定義された単純多数決原理は，以下に列挙する個人的選好の型の諸限定のうち，定義6が成立するとき，または，その他のいずれかが成立すると同時に，S 内の全てのトリプルについて，トリプルの数と同じでない個人（投票者）の数が奇数であるときには，その他の必要な諸条件をも満たす社会的厚生関数たりうるのである。つまり，単純多数決原理で最も問題とされる整合性が保証され，整合的な社会的選好順序の決定が可能となる。(その詳細な議論については，セン＆パタネイク (5) セン (6) 稲田 (7) などを参照)。

定義1．(単峰的 single-peaked : SP)

任意の $x, y, z \in S$ につき各個人に共通した強順序 P があって，$xPyPz$ か，または $zPyPx$ と順序づけられれば（y が x と z との間にあるという共通の認識があれば），全ての投票者 i について，xR_iz ならば yR_iz であり，また $zRix$ ならば，yR_ix となる。この時，各投票者の選好順序の集合は，S 上で単峰的であるといわれる。

定義2．(弱単峰的 weakly single-peaked : WSP)

任意のトリプルにおいて，全ての投票者が，そのうちのある対象を，他の１つ，あるいは２つの対象より強選好するか，または３つについて無差別であるとき，そのトリプルは弱単峰的といわれる。この場合，無差別ケースを別にすれば，任意のトリプルについて各投票者に worst でない共通の対象が存在する。

定義3．(単谷的 single-caved : SC)

任意のトリプルにおいて，全ての投票者が，そのうちのある対象よりも，残りの２つのうち，少くとも１つの対象を強選好するか，または，３つについて無差別であるとき，そのトリプルは単谷的といわれる。この場合，無差別ケースを除けば，任意のトリプルについて，各投票者に best でない共通の対象が存在する。

定義4．(分離可能 separable : Sep)

任意のトリプルにおいて，全ての投票者がある対象を他の２つよりも強選好するか，あるいは，他の２つをその対象より強選好するか，または，３つに対して無差別であるとき，そのトリプルは分離可能といわれる。この場合，無差別ケースを除けば，任意のトリプルについて，各投票者に medium でない共通の対象が存在することになる。

定義5.（価値制限的 value-restricted : VR）

任意のトリプルは，WSP かまたは SC かまたは Sep を満たすとき，価値制限的といわれる。

定義6．極論制限的 extremal restriction ; ER）

任意のトリプル x，y，z において，ある1人の投票者 i が xP_iyP_iz であれば，zP_jxR_jy や，yR_jzP_jx となるような他の投票者 j が1人もいないとき，そのトリプルは極論制限的といわれる。

定義7.（部分的合意 limited agreement : LA）

任意のトリプル x，y，z は，そのうちの例えば，x，y について，全ての投票者 i について，xR_iy であれば，そのトリプルは部分的合意を満すといわれる。

定義8.（一般的排除性 general exclusion : GE）

任意のトリプルは，VR かまたは，ER かまたは LA を満たすとき，一般的排除性を満たすといわれる。

なお，以上の諸定義で示される選好の制約は，それによって何らかの選好パターンが排除されるのであるから定義1～8をまとめて“排除条件”と名づけておく。

【III】 クラマーの定理

前節では，単純多数決原理が，アロー流の社会的厚生関数たりうるための諸条件を列挙しておいた。本節では選択対象の集合 S がアフィン部分空間 R^n の点の集合で示され，そのうち実行可能な対象の集合 $S'(\subset S)$ が，R^n 内の開集合とするとき，合理的な投票者（3人以上のグループを考える）の選好が，通常のミクロ理論で仮定される微分可能・擬凹の序数的効用関数で表わされるならば，前節で示した全ての条件が，個人の選好のわずかな違いとさえ両立し得ないと主張するクラマーの定理を証明してゆくことになる。なお，議論をフォローする上での図解は，便宜上2次元のものとする。（図1，Page 170参照）。

定理の証明に先立って，まず，各投票者の選好の定式化と，証明に必要な補助定理を2つあげておく。

<選好の定式化>

各投票者は，選択対象に関して，合理的で，次の(1)，(2)の意味において凸な選好順序 R_i を持つ。任意の x，$x' \in R^n$ かつ $0<\lambda<1$ について

(1)　$xP_ix' \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)x' \; P_i \; x'$

(2)　$xI_ix' \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)x' \; R_i \; x'$

こうしておけば，投票者の選好順序は，連続な擬凹の序数的効用関数 $u_i(x)$ で表わしうる[3]。また関数 $u_i(x)$ は微分可能と仮定すれば，全ての $x \in R^n$ において $u_i(x)$ の勾配ベクトル gradient vector

$$\nabla_i(x') = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x_1}\right|_{x=x'} \\ \left.\dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x_2}\right|_{x=x'} \\ \vdots \\ \left.\dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x_n}\right|_{x=x'} \end{pmatrix}$$

が存在し，対象 x' に対する各投票者の選好の違いは，$\nabla_i(x')$ の各要素の違いとして表わしうる。

<補助定理１>[4)]

任意の x，$y \in R^n$ について

（i） $[y, \nabla_i(x)] < [x, \nabla_i(x)] \Rightarrow xP_iy$

（ii） $[y, \nabla_i(x)] > [x, \nabla_i(x)] \Rightarrow 0<\lambda<\lambda^*$ かつ $\lambda y+(1-\lambda)x\, P_i x$ なる λ^* が存在する。

<補助定理２>[5)]

C を R^n 内の閉，尖凸錐[6)] とするならば，全ての $x \in C$ に対して，$[p, x]>0$ なるある $p \in R^n$ が存在する。

ただし，２つの定理の中に出てくる記法 $[a, b]$ は，ベクトル a，b の内積を表わす。

以上の準備のもとで，クラマーの定理を彼に従って証明してゆく。

<クラマーの定理>

もし，任意の３人の投票者 i，j，k の勾配ベクトル $\nabla_i(x)$，$\nabla_j(x)$，$\nabla_k(x)$ が１次独立であるような点 $x \in S'$ が存在するならば，選好順序の集合 $P=\{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$ は S' 上でいかなる排除条件をも満足しない。

証　明

１，２，３を３人の投票者とし，C_{-123} でもって，勾配ベクトル $-\nabla_1(x), \nabla_2(x), \nabla_3(x)$ の張る凸多面錐[7)] とする（C_{-12-3} などについても同様）。そうすると，C_{-123} は尖った凸多面錐となる。なぜなら，もしそうでないとするなら 注6）の凸錐，尖の定義より，ある非ゼロの $y=-\alpha_1\nabla_1(x)+\alpha_2\nabla_2(x)+\alpha_3\nabla_3(x)$，$\alpha_i \geq 0$ と $-y=-\beta_1\nabla_1(x)+\beta_2\nabla_2(x)+\beta_3\nabla_3(x)$，$\beta_i \geq 0$ を含むことになり，また従って，$y+(-y)=-(\alpha_1+\beta_1)\nabla_1(x)+(\alpha_2+\beta_2)\nabla_2(x)+(\alpha_3+\beta_3)\nabla_3(x)=0 \in C_{-123}$ となるが，α_i，β_i の各々少くとも１つは正であるので，これは，仮定 $\nabla_i(x)$ の１次独立性に反する。よって，C_{-123} は尖である。

かくて，補助定理２が適用されて，全ての $z \in C_{-123}$ について，$[p, z]>0$ なる p が存在し，$[p, \nabla_1(x)]<0$，$[p, \nabla_2(x)]>0$，$[p, \nabla_3(x)]>0$ を得る。

つぎに，$y(\lambda)=x+\lambda p$，$0<\lambda<1$ とすれば，

$[y(\lambda), \nabla_1(x)]=[x, \nabla_1(x)]+\lambda[p, \nabla_1(x)]<[x, \nabla_1(x)]$

また S' は開集合であり，$x \in S'$ ととれば，ある $\varepsilon>0$ が存在して $\|z-x\|<\varepsilon$ ならば

$z \in S'$ であり，$\lambda < \varepsilon / \| p \|$ ととれば，$\| y(\lambda) - x \| = \lambda \| p \| < \varepsilon$ だから，$y(\lambda) \in S'$ がいえる。但し，記法 $\| p \|$ は，ベクトル p のノルムを示す。

さらに，$[y(\lambda),\ \nabla_2(x)] = [x,\ \nabla_2(x)] + \lambda[p,\ \nabla_2(x)] > [x,\ \nabla_2(x)]$

$[y(\lambda),\ \nabla_3(x)] = [x,\ \nabla_3(x)] + \lambda[p,\ \nabla_3(x)] > [x,\ \nabla_3(x)]$ だから，補助定理 1 の (ii) より，$0 < \lambda < \lambda^*$ に対して，$y(\lambda) P_2 x$ なる λ^* が，また，$0 < \lambda < \lambda^{**}$ に対して，$y(\lambda) P_3 x$ なる λ^{**} が存在する。

ある $0 < \lambda' < \min\{\varepsilon / \| p \|,\ \lambda^*,\ \lambda^{**}\}$ に対して，$y_1 = y(\lambda')$ とすれば，明らかに次式 (A) が成立つ。

$$\left(\begin{array}{l} y_1 \in S',\ [y_1,\ \nabla_1(x)] < [x,\ \nabla_1(x)], \\ [y_1,\ \nabla_2(x)] > [x,\ \nabla_2(x)],\ [y_1,\ \nabla_3(x)] > [x,\ \nabla_3(x)] \end{array}\right) \qquad \text{(A)}$$

尖凸錐 C_{-12-3} から今までと同様に考えて，C_{-12-3} 内に，$[p,\ \nabla_1(x)] < 0$，$[p,\ \nabla_2(x)] > 0$，$[p,\ \nabla_3(x)] < 0$ なる p が存在する。また，$y(\lambda) = x + \lambda p$，$0 < \lambda < 1$ に関して

$[y(\lambda),\ \nabla_1(x)] = [x,\ \nabla_1(x)] + \lambda[p,\ \nabla_1(x)] < [x,\ \nabla_1(x)]$

$[y(\lambda),\ \nabla_3(x)] = [x,\ \nabla_3(x)] + \lambda[p,\ \nabla_3(x)] < [x,\ \nabla_3(x)]$

であり，$\lambda < \varepsilon / \| p \|$ にとって，$y(\lambda) \in S'$ も同様である。$[y(\lambda),\ \nabla_2(x)] = [x,\ \nabla_2(x)] + \lambda[p,\ \nabla_2(x)] > [x,\ \nabla_2(x)]$ だから補助定理 1 の (ii) より，$0 < \lambda < \lambda^*$ につき，$y(\lambda) P_2 x$ なる λ^* が存在し，ある $0 < \lambda'' < \min\{\varepsilon / \| p \|,\ \lambda^*\}$ に対して，$y_2 = y(\lambda'')$ とすれば，次式が成立つ。

$$\left(\begin{array}{l} y_2 \in S',\ [y_2,\ \nabla_1(x)] < [x,\ \nabla_1(x)], \\ [y_2,\ \nabla_2(x)] > [x,\ \nabla_2(x)],\ [y_2,\ \nabla_3(x)] < [x,\ \nabla_3(x)] \end{array}\right) \qquad \text{(B)}$$

つぎに，(A)，(B) で規定される点 y_1 と y_2 の凸結合 $y(\alpha) = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$，$0 \leq \alpha \leq 1$ を考えれば，R_1 の推移性と凸性によって，$y_1 R_1 y_2$ ならば，$x P_1 y(\alpha) R_1 y_2$，また $y_2 R_1 y_1$ ならば $x P_1 y(\alpha) R_1 y_1$ であり，よって，

全ての $0 \leq \alpha \leq 1$ に関して，$x P_1 y(\alpha)$ ——(1)

また，(A)，(B)の各々第 3 ステートメントより

$[y(\alpha),\ \nabla_2(x)] = \alpha[y_1,\ \nabla_2(x)] + (1-\alpha)[y_2,\ \nabla_2(x)] > [x,\ \nabla_2(x)]$ であるので，補助定理 1 の(i)より

全ての $0 \leq \alpha \leq 1$ に関して，$y(\alpha) P_2 x$ ——(2)

次に，投票者 3 の適当な実数値効用関数を $g(\alpha) = u_3(y(\alpha))$ ととれば，この関数は，閉区間 $\alpha \in [0,1]$ の上で連続であり，しかも，$g(0) = u_3(y_2) < u_3(x) < u_3(y_1) = g(1)$ が成立するから

ある $0 < \alpha^* < 1$ に関して，$g(\alpha^*) = u_3(x)$ ——(3)

がいえるはずである。

この α^* が定める点 $y(\alpha^*)$ を点 c とするならば，

(1)，(2)，(3)式より

$x P_1 c$，$c P_2 x$，$c I_3 x$ ——(4)

を満たす点 $c \in S'$ が存在することになる（図１の点 c を参照。なお，図の横軸，縦軸はそれぞれ，選択対象ベクトルの要素を示し，曲線 I_1，I_2，I_3 はそれぞれ，x 点で交わる三投票者の無差別曲線を示す)。

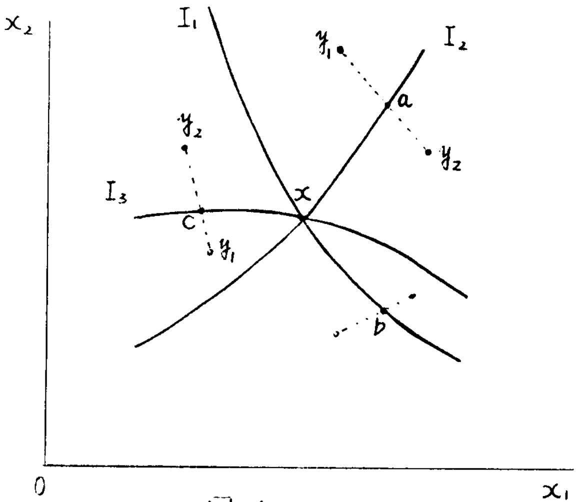

図 1

今までの議論を凸多面錐 C_{12-3} と C_{1-2-3} について行なえば（クラマー自身は，このケースで議論を展開している)，

aP_1x，aI_2x，xP_3a ——(5)

を満たす点 $a \in S'$ が，

また，C_{1-23} と C_{-1-23} については

bI_1x，xP_2b，bP_3x ——(6)

を満たす点 $b \in S'$ が存在する。

かくて，$R_i(i=1,\ 2,\ 3)$ の推移性と，(4)，(5)，(6)式より投票者1，2，3について

aP_1bP_1c，cP_2aP_2b，bP_3cP_3a ——(7)

が成立する。

さて，(7)式で示されるような選択対象のトリプル a，b，c と選好関係 P_i のもとでは，前節で列挙した排除条件の全てが成立しないことを確かめよう。

SP：　対象が何らかの強順序で，$aPbPc$ または $cPbPa$ であれば，b がトリプルの中間に位置しうるのだが，これは投票者２によって破られている。(SP の定義より，投票者１と３については，SP を満す)。同様に，a，c をそれぞれ中間にもってくる順序づけも，投票者３，１によって破られるから，単峰性は成立しない。

WSP：　bP_3a かつ cP_3a だから，a は投票者３にとって worst になってしまう。同様に，b，c はそれぞれ投票者２と１にとって worst になり，トリプル中に３者に共通の worst でなり対象は存在しなく，WSP は成立しない。

SC：　aP_1b かつ aP_1c だから a は投票者１にとって best，同様に b と c は，それぞれ投票者３と２にとって best となり，３者に共通の best でない対象は存在しなく，SC は

成立しない。

Sep： cP_2aP_2b だから，a は投票者2にとって，medium となり，同様に，b と c はそれぞれ，投票者1と3にとって medium となり，3者に共通の medium でない対象は存在しなく，Sep は成立しない。

VR： トリプルが，WSP，SP または Sep を満たさない以上，VR たりえない。

ER： aP_1bP_1c かつ cP_2aP_2b だから，ER は満たされない。

LA： aP_1b かつ bP_3a だから，a と b は LA に必要なペアたりえず，同様に bP_1c かつ cP_2b より，b と c，aP_1c かつ cP_3a より a と c もそれぞれ LA に必要なペアたりえず，LA 条件も成立しえない。

GE： VR，ER かつ LA 条件を満さない以上，当然 GE 条件は満たされない。

Q. E. D.

【IV】要　約

前節のクラマーの定理を中心とする小論の基本的主張は，次のようにまとめることができよう。

たしかに，VR（価値制限性）はじめ，クラマーのいう排除条件，いいかえれば，個々人の選好のある程度の類似性を規定する条件は，1次元かつ有限個の離散的な変数が選択対象である場合には，その有効性を発揮して，単純多数決原理によって整合的な社会的選好順序を決定しえようが，ひとたび，連続的に分割可能な多次元空間上での選択対象を考えるならば，わずかな個人的選好の違い（定理では，勾配ベクトルの1次独立性によって表現されている）も，先の状況における選好の類似性（排除条件）と矛盾して，排除条件の全てが成立しえないということである。たとえば，公共財ベクトル（個々の公共財は，連続的に分割可能とみなせる）のいろんな可能な水準のなかから，単純多数決原理によって，整合的な社会的選好順序を決定しようとしても，それは一般的には不可能であると結論できる。

もっとも，小論での議論は，あくまで個々の選択問題における整合的な順序づけの問題であって，順序はともかく，そのときどきの問題について，最善のものが見つかりさえすれば，つまり社会的選択が可能でさえあれば，より下位の対象との順序は不問にする議論，たとえばセン (5) の社会的決定関数 Social Decision Function の議論とはやや異なるものであって，両者の統合，整理は今後の研究課題としたい。

注

1) いま，3人の投票者1，2，3が選択対象 x，y，z について，単純多数決原理に基づいて社会的選好を決定するとする。各投票者の選好が，zP_1yP_1x，xP_2zP_2y，yP_3xP_3z であったとすると，$N(xP_iy):N(yP_ix)=1:2$，$N(yP_iz):N(zP_iy)=1:2$ だから，社会的選好は $zRyRx$ となりそうだが，$N(zP_ix):N(xP_iz)=1:2$ となって，x は z より選好されねばならず，かくて循環的順序に陥ってしまい，整合的な社会的選好を決定しえない。このことを「投票のパラドックス」という。なお，記号

P_i, R, 単純多数決原理などについては，本文を参照。

2) $R_i(i=1,\cdots n)$ を個人の選好順序，R をそれに対応する社会的選好順序とすれば，アローの社会的厚生関数は，$R=F(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ と表わされ，バーグソン＝サミュエルソン流の社会的厚生関数は，R を表現する実数値効用関数である。(鈴村(2))

3) 関数 $u_i(x)$ の存在性についてはデブリュー(8)の pp. 55〜59 に厳密な証明が展開されている。

4) 定理の証明は，クラマー(1)，p. 292. (i)，(ii) とも方向微分 directive derivative を用いた証明がなされている。

5) 定理の証明は，二階堂(9)，pp. 43〜44.

6) R^n 内の部分集合 C が

(a) $x, y\in C \Rightarrow x+y\in C$

(b) $\alpha\geqq 0, x\in C \Rightarrow \alpha x\in C$

を満たすとき，C を凸錐 corvex cone といい，C が尖 pointed であるための必要十分条件は，$x\in C$ かつ $x\neq 0$ ならば，$-x\notin C$ であることである。(二階堂(10)，p. 191，同(11)p. 182)。

7) R^n 内の部分集合 $X\neq\emptyset$ を含む最小の凸錐 $C(X)$ を X の張る凸錐というが，とくに，X が有限集合 $X=\{x^1, x^2\cdots, x^s\}$ のとき $C(X)$ を凸多面錐という。(二階堂(10)p. 192参照)。

参考文献

(1) Kramer, G. H. "On a Class of Equilibrium Conditions for Majority Rule" Econometrica, Vol. 41. 1973.

(2) 鈴村興太郎 "社会的選択の理論" 「経済の数理」(筑摩書房 1977) 第5章

(3) Blau, J. H. "The Existence of a Social Welfare Function" Econometrica, Vol. 25. 1957.

(4) Inada, K. "Alternative Incompatible Conditions for a Social Welfare Function" Econometrica, Vol 23, 1955.

(5) Sen, A. K., and P. K. Pattanaik. "Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice Under Majority Decision." Journal of Economic Theory, 1, 1969.

(6) Sen, A. K. Collective Choice and Social Welfare. Holden-Day, San Francisco, 1970.

(7) Inada, K. "The Simple Majority Decision Rule" Econometrica, Vol. 37. 1969.

(8) Debreu, G. Theory of Value. Wiley, New York. 1959.

(9) Nikaido, H. Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, New York, 1968.

(10) 二階堂副包「現代経済学の数学的方法」岩波書店，1960

(11) 二階堂副包「経済のための線型数学」培風館，1961

(12) Arrow, K. J. Social Choice and Individual Value. Wiley, New York. 1951. 2nd. ed. 1963. 邦訳書「社会的選択と個人的評価」長名寛明訳日本経済新聞社，1977。

(13) 村上泰亮 "社会的選択の理論"「現代経済学の展開」勁草書房 1971，第5章。

On the Irrationality of Simple Majority Decision Rule

Naoki SHIWAKU

Summary

So far as we concern with choices over finite sets of discrete alternatives, it is true that the exclusion conditions ensure the rationality of simple majority decision rule. But when alternatives are in some appropriately defined multidimensional commodity space or policy space and voter preferences are represented by quasi-concave, differentiable utility functions, the exclusion conditions are incompatible with even a very modest degree of heterogeneity of tastes.