

異なる角速度で回転している共軸二円筒間にある 二液体の境界面の形

大 亀 衛

(昭和53年9月16日受理)

円筒底面から生ずる二次流や流れの不安定性による二次流の影響を受けていない境界面の形を表わす式が種々の境界条件のもとで数値計算され、境界面の形が界面張力の作用の及ぶ平均の深さとともに求められた。境界条件によって、境界面の形はほとんどどのような形にでもなり得る。

一般に、実測して得られた形は二次流の影響を受けており、それはここで計算して得られた形と異なっている。しかし、液深を大きくして底面から生ずる二次流の影響を小さくしてゆくと、実測して得られた形がここで計算して得られた形とかなりよく一致してくる。流れの不安定性による二次流が境界面の形に及ぼしている影響は小さい。

§ 1 まえがき

内外二円筒の角速度が等しいときには、流れの不安定性による二次流^{1),2)}や二円筒の底面から生ずる二次流³⁾は現われない。従って、二次流を考えないで得られた境界面の形を表わす式から求められる形は実測して得られるものとよく一致している⁴⁾。

内外二円筒の角速度が異なるときには、一般に、流れの不安定性による二次流と底面からの二次流が現われていて、境界面の形はこれら二次流の影響を受けている。ここで、液深を大きくすると底面から生ずる二次流の影響が減少し、二円筒の角速度を調節すると流れの不安定性による二次流の影響が消滅する。そこで、先ず二次流の影響を受けていない境界面の形を表わす式が数値計算され、次に計算して得られた形が実測して得られた形と比較され、更に二次流の境界面の形に及ぼしている影響が調らべられる。

§ 2 計 算

a) 基礎式

内外二円筒の角速度が異なっても二次流が現われていないときには、内外二円筒の角速度が等しいときと同様の方法⁴⁾で境界面の形を表わす式が求められる。

鉛直に立てられた二円筒の軸上で上向きに z 軸をとり、円筒底面に原点を置いた円筒座標 (r, θ, z) が使用される。 z_B は境界面の z 座標、 ψ_B は境界面の接線が r 軸となす角度、 R_1 は内円筒の外半径、 R_2 は外円筒の内半径、 Ω_1 は内円筒の角速度の大きさ、 Ω_2 は外円筒

の角速度の大きさ, ρ_U は上位の液体の密度, ρ_L は下位の液体の密度, T_B は界面張力の大きさ, g は重力の加速度の大きさ, h_B は境界面の平均の高さ, h_F は自由表面の平均の高さ, $h_{B'}$ は下位の液体の圧力が自由表面上の気圧に等しい面の平均の高さ, $h_{F'}$ は上位の液体の圧力が自由表面上の気圧に等しい面の平均の高さである.

二液体の境界面の形を表わす r の関数 ψ_B と $(z_B - h_B)$ を求める式は

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_B}{dr} = \frac{1}{T_B \cos \psi_B} & \left[g(\rho_L - \rho_U)(z_B - h_B) + g(\rho_L - \rho_U)E_B - \frac{(\rho_L - \rho_U)A^2}{2} r^2 \right. \\ & - 2(\rho_L - \rho_U)AB \ln r + \frac{(\rho_L - \rho_U)B^2}{2} \frac{1}{r^2} \\ & - \frac{4(\rho_L - \rho_U)B^2(\ln R_2 - \ln R_1) - 4(\rho_L - \rho_U)AB\{R_2^2(2\ln R_2 - 1) - R_1^2(2\ln R_1 - 1)\}}{4(R_2^2 - R_1^2)} \\ & \left. - \frac{(\rho_L - \rho_U)A^2(R_2^4 - R_1^4)}{r} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d(z_B - h_B)}{dr} = \tan \psi_B.$$

但し

$$E_B = \frac{\rho_L(h_B - h_{B'}) - \rho_U(h_F - h_{F'}) + \rho_U(h_F - h_B)}{\rho_L - \rho_U},$$

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

定数 E_B を決める条件式は

$$\int_{R_1}^{R_2} (z_B - h_B) r dr = 0. \quad (2)$$

(内外の円筒壁における ψ_B の値 ψ_1 と ψ_2 が与えられているときには

$$E_B = \frac{2T_B(R_2 \sin \psi_2 - R_1 \sin \psi_1)}{g(\rho_L - \rho_U)(R_2^2 - R_1^2)}$$

から求められる.)

積分定数を決める条件は

$$r = r_C \text{ で } \psi_B = \psi_{B,C}, \quad (z_B - h_B) = (z_B - h_B)_C. \quad (3)$$

b) 解法

数値計算の Runge-Kutta-Gill 法が使用される. E_B に任意の定数が用いられ, 計算の初期値(3)に対応する $z_B - h_B$ と ψ_B が式(1)から求められ, そして得られた $z_B - h_B$ が条件式(2)を満たしているかどうかについて調べられる.

c) 結果

この論文の中の図をつくる際に使用した値は表に示されている.

このように二円筒の半径と角速度の大きさ, 二液体の密度と界面張力の大きさ, そして重力の加速度の大きさが与えられても, 計算の初期値 $\psi_{B,C}$ と $(z_B - h_B)_C$ が変われば, それらに対応する二液体の境界面の形を表わす基礎式の解が存在している. $\psi_{B,C}$ を一定にし

$R_1 = 1.994$	cm
$R_2 = 4.070$	cm
$\Omega_1 = 10.47$	1/sec
$\Omega_2 = 15.71$	1/sec
$\rho_U = 0.9116$	g/cm ³
$\rho_L = 0.9979$	g/cm ³
$T_B = 20.75$	dyn/cm
$g = 979.7$	cm/sec ²

表. 使用した値.

て $(z_B - h_B)_C$ を変化させたときの境界面の形が図1に示され、 $(z_B - h_B)_C$ を一定にして $\psi_{B,C}$ を変化させたときのものが図2に示されている。この場合 $\psi_{B,C}$ と $(z_B - h_B)_C$ は円筒

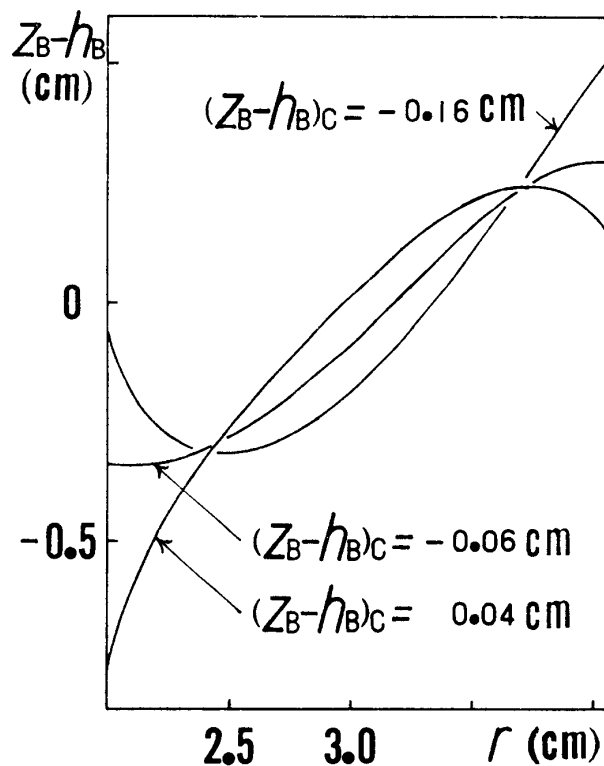


図1. $(z_B - h_B)_C$ の変化による二液体の境界面の変形。
 $r_C = 3.050$ cm, $\psi_{B,C} = 0.450$. (計算値)

壁の物質やそのよごれ等の物理条件を表わしているから、円筒壁の物理条件を変えれば境界面の形は多様になり得ることがわかる。

ここでは $r_C = 3.050$ cm としているが、このときの $\psi_{B,C}$ と $(z_B - h_B)_C$ は二円筒壁における境界面の傾き（一般には両円筒壁における $z_B - h_B$ と ψ_B の計四個の中のいずれか二個）で決まる。従って、界面張力の作用が及んでいる部分の平均の厚さ $(h_B - h_{B'}) - \rho_U(h_{F'} -$

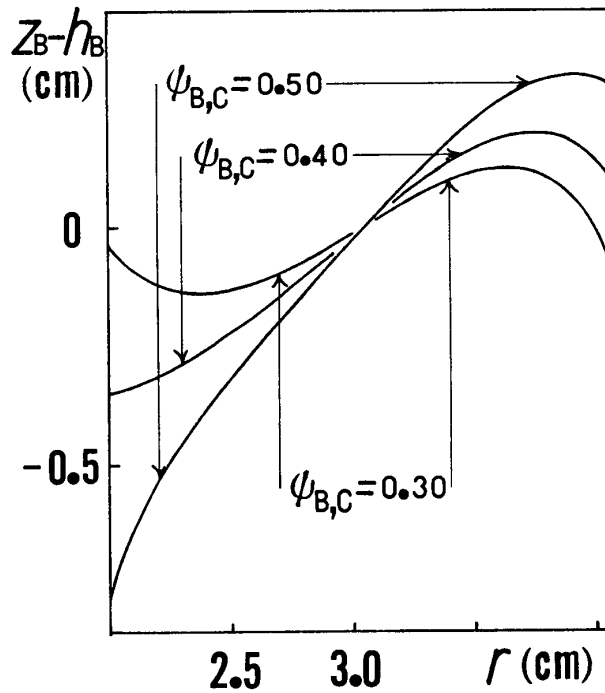


図2. $\psi_{B,C}$ の変化による二液体の境界面の変形。
 $r_C = 3.050\text{cm}$, $(z_B - h_B)_C = 0$. (計算値)

$h_B)/\rho_L = (h_B - h_{B'}) - \rho_U \{ (h_F - h_{F'}) - (h_F - h_B) \} / \rho_L = (\rho_L - \rho_U) E_B / \rho_L$ (従って E_B) は $\psi_{B,C}$ と $(z_B - h_B)_C$ で定まる. この関係は図3で示されている. 解は狭い範囲にのみ存在しており, $\psi_{B,C}$ と $(z_B - h_B)_C$ の値は限定されている.

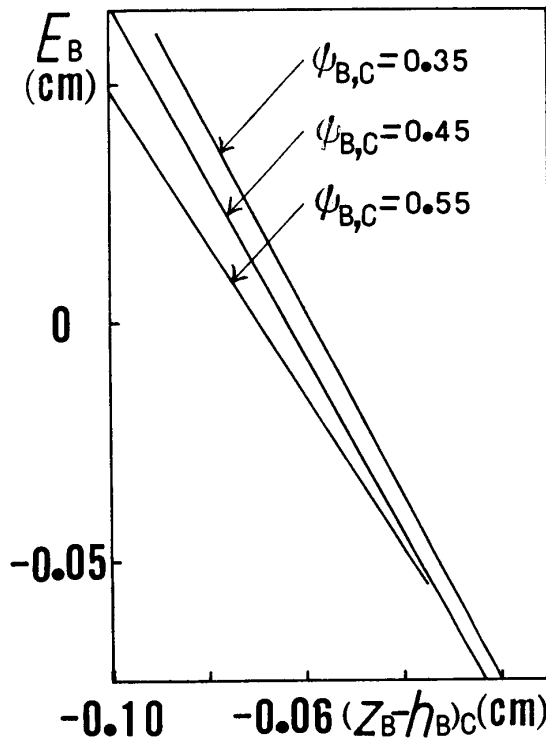


図3. $\psi_{B,C}$, $(z_B - h_B)_C$ と E_B の関係. (計算値)

§ 3 実 験

計算して得られた結果のうちで、境界面の形は容易に実験することができる。二液体にオリーブ油と水が使用され、境界面の形が実測される⁴⁾。

二次流の全く現われていないときに実測して得られた形がこの方法で計算して得られた形とよく一致することは内外二円筒の角速度が等しいときの調査⁴⁾で実証されている。

液深を大きくして底面から生ずる二次流の影響のみを小さくしたときに実測して得られた形は、十分とはいえないけれども、この方法で計算して得られた形とかなりよく一致している。従って、流れの不安定性による二次流が境界面の形に及ぼしている影響は小さい。

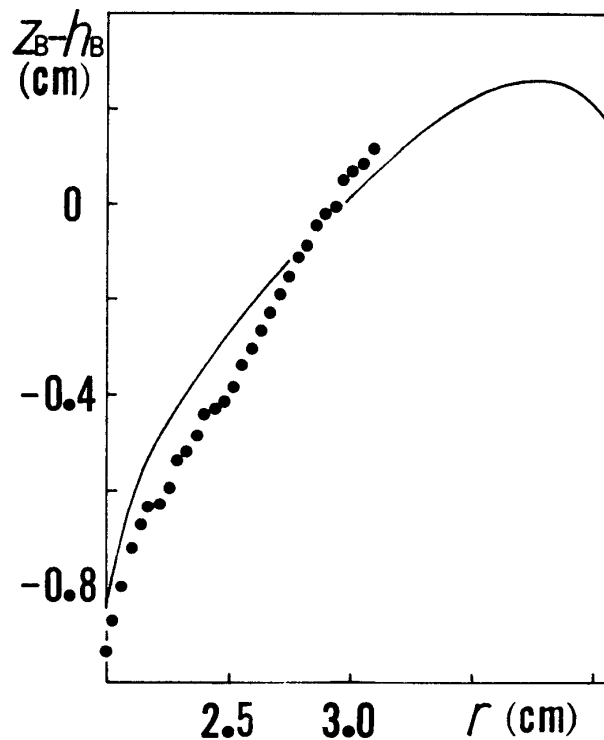


図4. 実測して得られた境界面の形と計算して得られた形 { $r_c=3.050\text{cm}$, $\psi_{B,c}=0.460$, $(z_B-h_B)_c=0.039\text{cm}$ } の比較。(●は実測値, —は計算値)

図4の中の実測して得られた形は、かなり大きな液深（水深は約42cm、オリーブ油の深さは約10cm）でしかも流れの不安定性による二次流の現われていないときのものであるから、計算して得られた形とほぼ一致している。

底面から生ずる二次流と流れの不安定性による二次流がともに境界面の形に影響しているときに実測して得られた形は、一般に、この方法で計算して得られた形と異なっている。

§ 4 むすび

内外二円筒の角速度が等しいときには、実測して得られた境界面の形とよく一致する数値解が得られる⁴⁾。内外二円筒の角速度が異なるときでも二次流の現われない（または影

響の小さい) ときには, 境界面の形が数値計算して求められる. 将来の問題として, 二次流の影響を受けている境界面の形を計算して求めることが残されている.

参 考 文 献

- 1) G. I. Taylor: Phil. Trans **A223** (1923) 289.
- 2) D. Coles: J. Fluid Mech. **21** (1965) 385.
- 3) 大亀 衛: 岡山理科大学紀要 第**8**号 (1972) 117.
- 4) 大亀 衛: 岡山理科大学紀要 第**13**号 (1977) 67.

The Shape of the Interface Formed by Two Liquids between Two Concentric Cylinders Rotating with the Different Angular Velocities

Mamoru OHKAME

(Department of Applied Physics, Okayama University of Science, Okayama, Japan)

The equations representing the shape of the interface, which are not affected by the secondary flows caused by the bottom surface and by the instability of flow, were calculated numerically at various values of boundary conditions, and the shapes of the interface have been obtained together with the mean thickness of the section under the action of the interfacial tension. The interface can take any shapes, depending upon the boundary conditions.

In general, the shape obtained by the measurement, which is affected by the secondary flows, is different from this calculated one. But, if the depth of liquid is made larger so that the effect of the secondary flow caused by the bottom surface becomes smaller, the shape obtained by measurement comes to coincide better with the shape obtained by this calculation. Therefore, the secondary flow, which is due to the instability of flow, has small influence upon the shape of the interface.