

# 等しい角速度で回転している共軸二円筒間にある 二液体の境界面の形

大 龜 衛

(昭和52年9月16日受理)

この二液体の境界面の形を表わす式がつくられ、種々の境界条件における数値解が求められている。また、実測して得られた二液体の境界面の一つの形が対応している数値計算によるものと比較されている。両者はよく一致している。

## §1 まえがき

界面張力を無視すると、この境界面は二次曲面（等圧力面）となる<sup>1)</sup>。ここでは、界面張力を無視できない場合のこの境界面の形が扱われる。等しい角速度で回転している共軸二円筒間にある液体の自由表面の形を表わす式で<sup>2)</sup>、単に表面張力のかわりに界面張力を用いても、この境界面の形は求められない。

内外二円筒の角速度が異なる場合には、流れの不安定性による二次的な流れの現われないときでも<sup>3), 4)</sup> 二円筒の底面からの二次的な流れが生じて<sup>5)</sup>、問題が複雑になっている。ここでは、これらの二次的な流れの影響を考えなくてよい。

## §2 二液体の境界面の形を表わす式と解法

垂直におかれた二円筒の軸上で上向きに  $z$  軸をとり、原点を円筒底面の中心に置いた円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。

上位にある液体の自由表面での気圧を  $p_{F,U}$ 、この自由表面での液圧を  $p_{F,L}$ 、二液体の境界面での上位の液体の圧力を  $p_{B,U}$ 、二液体の境界面での下位の液体の圧力を  $p_{B,L}$ 、自由表面の  $z$  座標を  $z_F$ 、二液体の境界面の  $z$  座標を  $z_B$ 、上位の液体の圧力が自由表面上の気圧に等しい面の  $z$  座標を  $z_{F'}$ 、下位の液体の圧力が自由表面での気圧に等しい面の  $z$  座標を  $z_{B'}$ 、上位の液体の密度を  $\rho_U$ 、下位の液体の密度を  $\rho_L$ 、重力の加速度の大きさを  $g$  とする。流速の  $r$  成分と  $z$  成分はないから

$$\left. \begin{aligned} -p_{F,L} + p_{F,U} &= \rho_U g(z_F - z_{F'}), \\ p_{B,U} - p_{F,L} &= \rho_U g(z_F - z_B), \\ -p_{B,L} + p_{F,U} &= \rho_L g(z_B - z_{B'}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

二液体の境界面の平均曲率を  $K_B$  とし界面張力を  $T_B$  とすると、よく知られた関係式

$$-p_{B,L} + p_{B,U} = T_B K_B \quad (2)$$

を得る。

二液体の境界面の接線のうち  $z$  軸と交わるもののが  $r$  軸となす角を  $\phi_B$  とすると、この境界面は回転曲面であるから

$$K_B = \frac{\sin \phi_B}{r} + \frac{d\phi_B}{dr} \cos \phi_B. \quad (3)$$

上位の液体の圧力が自由表面上の気圧に等しい面の平均の高さを  $h_F'$ 、下位の液体の圧力が自由表面上の気圧に等しい面の平均の高さを  $h_B'$ 、内円筒の外半径を  $R_1$ 、外円筒の内半径を  $R_2$ 、二円筒の角速度を  $\Omega$  とする。この液体の等圧力面の形は Navier-Stokes の方程式から求められて

$$\left. \begin{aligned} z_F' - h_F' &= z_B' - h_B' \\ &= \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4g}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

自由表面の平均の高さを  $h_F$  とし二液体の境界面の平均の高さを  $h_B$  とすると、式(1)―(4)から

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_B}{dr} &= \frac{g(\rho_L - \rho_U) \{(z_B - h_B) + E_B\} - \frac{\Omega^2 (\rho_L - \rho_U)}{2} \left(r^2 - \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}\right) - \frac{T_B \sin \phi_B}{r}}{T_B \cos \phi_B}, \\ \text{但し } E_B &= \frac{\rho_L (h_B - h_B') - \rho_U (h_F - h_F') + \rho_U (h_F - h_B)}{\rho_L - \rho_U} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を得る。

定義により

$$\frac{d(z_B - h_B)}{dr} = \tan \phi_B. \quad (6)$$

液体の体積は変化しないから

$$\int_{R_1}^{R_2} (z_B - h_B) r dr = 0. \quad (7)$$

式(5)と式(6)は二液体の境界面の形を表わす方程式であり、これらの式から  $r$  の未知函数  $z_B - h_B$  と  $\phi_B$  が求められ、条件式(7)によって未定常数  $E_B$  が定められる。ここでは、Runge-Kutta-Gill 法によって数値計算する。このとき計算の始めの値（境界条件）

$$\left. \begin{aligned} r = r_c \text{ で } z_B - h_B &= (z_B - h_B)_c, \\ r = r_c \text{ で } \phi_B &= \phi_{B,c} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が必要である。 $r_c$  の値として  $\sqrt{(R_1^2 + R_2^2)/2}$  を用いる。この部分の二液体の境界面の形に及ぼす界面張力の影響は小さいから、 $(z_B - h_B)_c$  と  $\phi_{B,c}$  の近似値 0 と  $\tan^{-1}(\Omega^2 \sqrt{(R_1^2 + R_2^2)/2}/g)$  が式(4)から求められる。

### §3 実験装置と測定方法

数値計算に先だって実験装置が作られた。内円筒は鋼をクロムメッキして作られ、外円筒はアクリルガラスで作られている。上部の液体にはオリーブ油 ( $h_F=22\text{cm}$ ) が使用され、下部の液体には蒸留水 ( $h_B=11\text{cm}$ ) が使用されている。床からの振動を防ぐために、この装置はゴム板の上に設置されている。二円筒を回転させているモーターと二円筒の角速度を測るストロボスコープに、定電圧が与えられている。

二液体の境界面の形は上下と左右へ移動することのできる望遠鏡で測面から外円筒壁を通して測られる。光の屈折によって変形しているこの形は復元することができる。液体(水またはオリーブ油)の屈折率を  $n$  とし空気の屈折率を  $n'$  とすると、二液体の境界面から  $r-z$  平面上へ出た光が再びこの境界面を通らないところでは、この形が半径方向へ  $n/n'$  倍一樣に拡大されている<sup>2)</sup>。

表1と表2はここで得られた値であり、これらの値は計算にも使用される。実測中の平均室温は  $24.5^\circ\text{C}$  である。

表1. 実験と計算で使用した値。

$R_1 = 2.010$	cm
$R_2 = 3.887$	cm
$Q = 15.71$	1/sec
$\rho_U = 0.9096$	g/cm <sup>3</sup>
$\rho_L = 0.9972$	g/cm <sup>3</sup>
$T_B = 18.01$	dyn/cm
$g = 979.7$	cm/sec <sup>2</sup>

表2. 光の屈折による変形の復元に使用された屈折率の値。

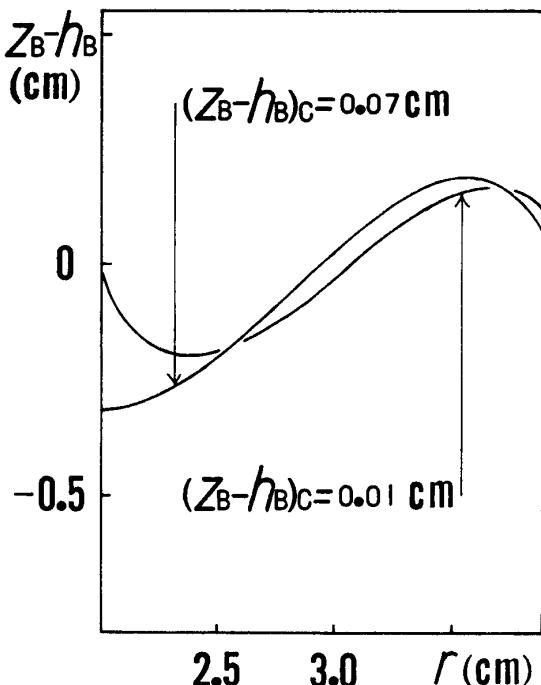
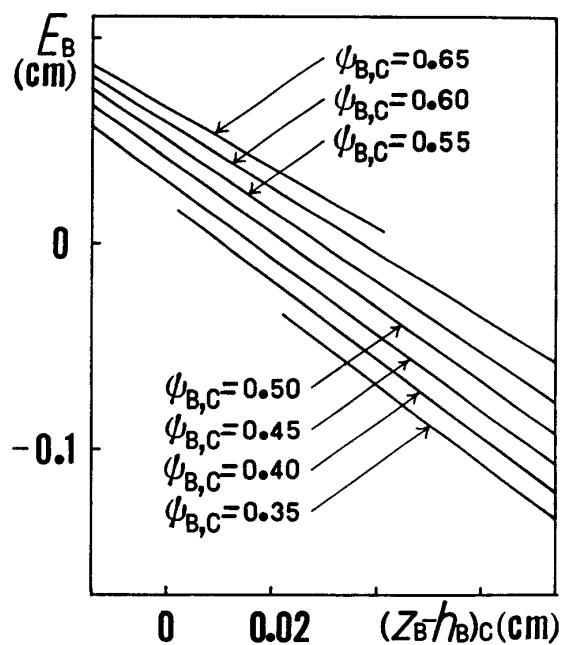
$$n = \begin{cases} 1.333 & (\text{水}) \\ 1.467 & (\text{オリーブ油}) \end{cases}$$

$$n' = 1.000 \quad (\text{空気})$$

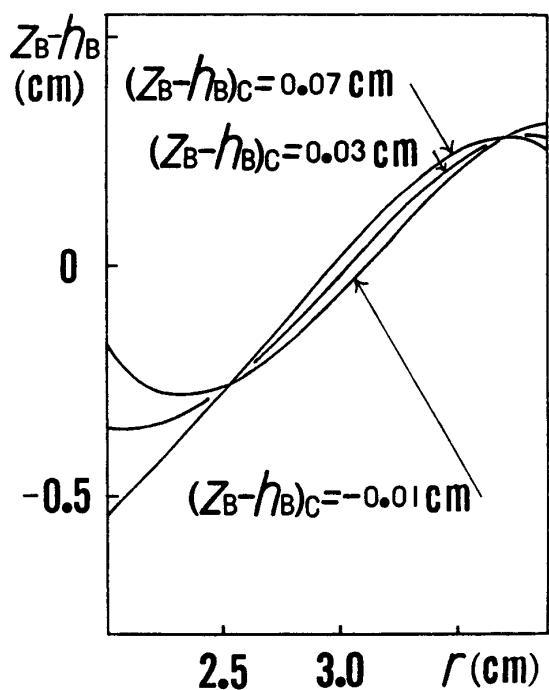
### §4 計算と実測の結果

表1のように値を定めても、なお、二液体の境界面の形を表わす式は  $(z_B - h_B)_C$  と  $\psi_{B,C}$  の値の種々の組合せに対応する多くの解をもっている。ここで  $(z_B - h_B)_C$  や  $\psi_{B,C}$  を変えることは二円筒壁の物理条件を変えることである。図1は解の存在している  $(z_B - h_B)_C$  と  $\psi_{B,C}$  と  $E_B$  との関係を示す。これらの値のごく限られた範囲に対してのみ、解が存在している。

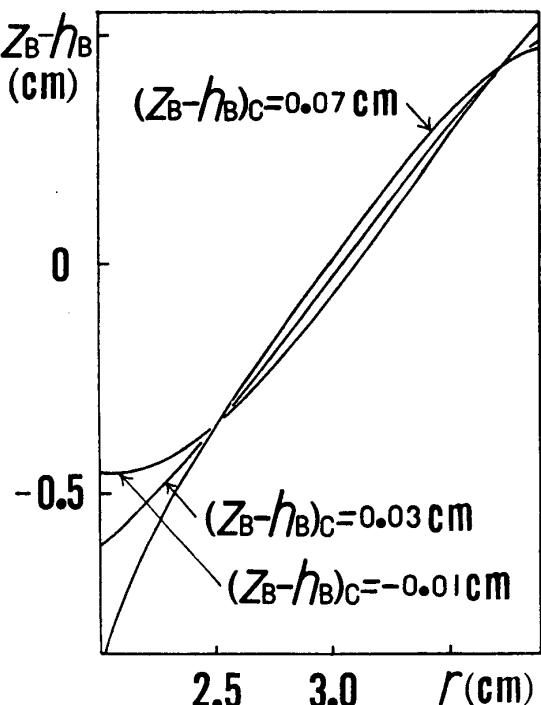
図2は  $\psi_{B,C}$  を一定にして  $(z_B - h_B)_C$  にいくつかの値を与えたときの二液体の境界面の形を示す。 $\psi_{B,C}$  が他の値のときにも、これと類似の結果が得られる。図3は  $(z_B - h_B)_C$  を一定にして  $\psi_{B,C}$  にいくつかの値を与えたときのものである。 $(z_B - h_B)_C$  が他の値のときにも、また、これと類似の結果が得られる。これらの図から、円筒壁の物理条件を変えると、二液体の境界面はさまざまな形をとり得ることがわかる。



(A)

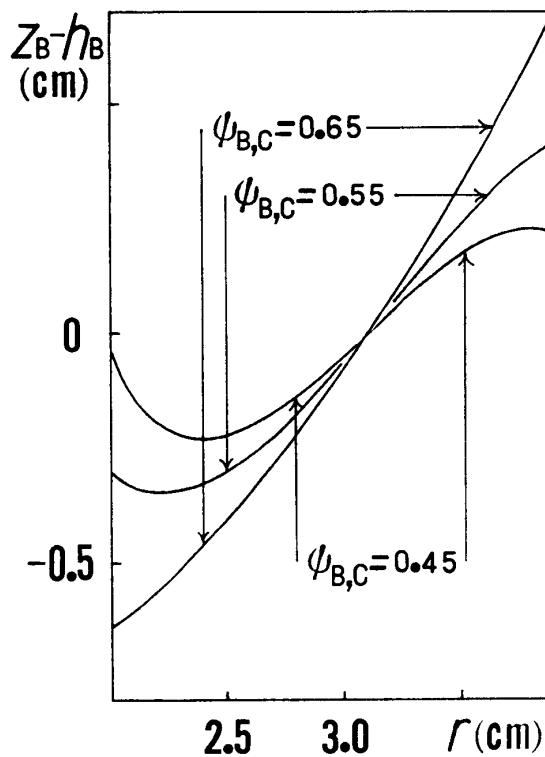


(B)

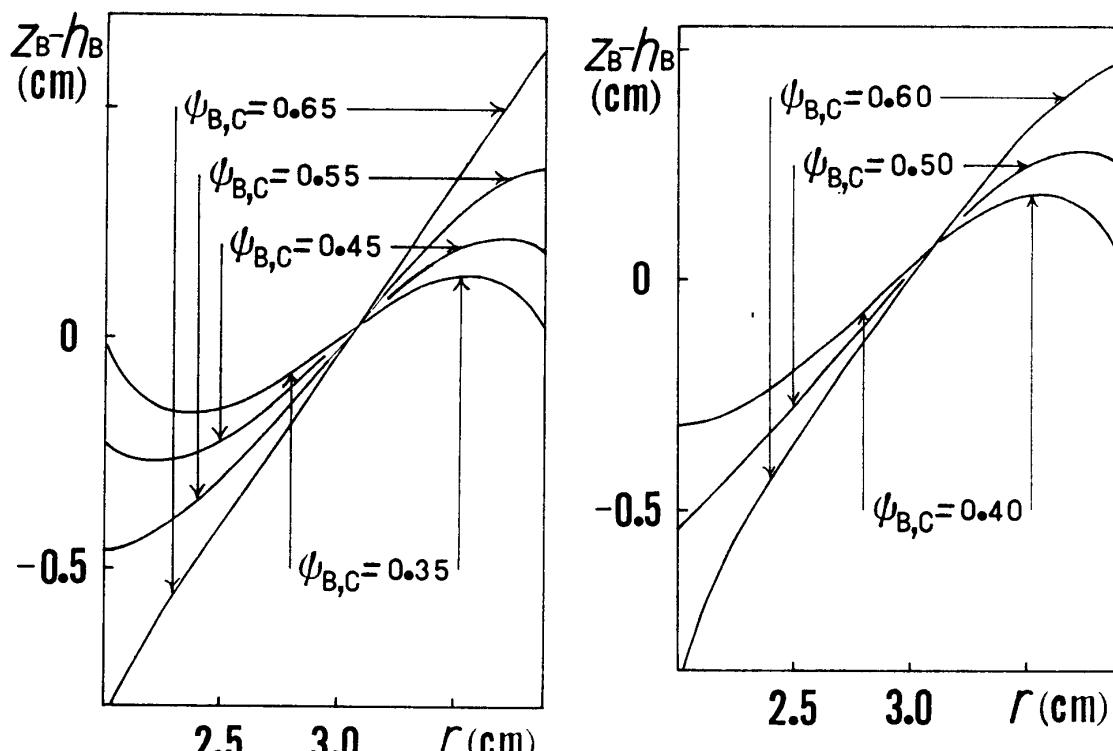


(C)

図2.  $(z_B - h_B)_C$  の変化による二液体の界面の変形. (A), (B), (C) は  $\psi_{B,C}$  の値がそれぞれ 0.40, 0.50, 0.60 の場合である. (計算値)



(A)



(B)

(C)

図3.  $\phi_{B,C}$  の変化による二液体の界面の変形. (A), (B), (C) は  $(z_B - h_B)_C$  の値がそれぞれ  $-0.01\text{ cm}$ ,  $0.03\text{ cm}$ ,  $0.07\text{ cm}$  の場合である. (計算値)

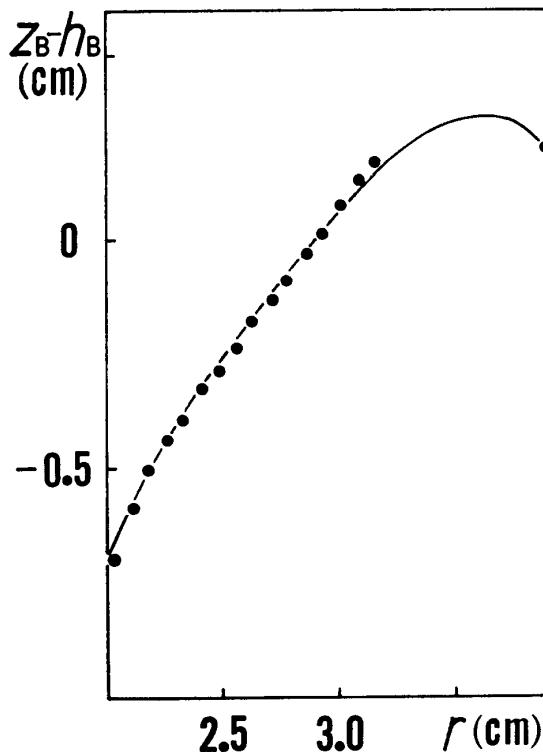


図4. 実測して得た境界面の形とこの場合の計算の始めの値  $\{r_c=3.094 \text{ cm}$ ,  $\psi_{B,C}=0.475$ ,  $(z_B-h_B)_c=0.105 \text{ cm}\}$  を用いて計算して得た形との比較。  
(●は実測値, ——は計算値)

図4は実測して得られた二液体の境界面の形を表2の値で補正したものとこのときの計算の始めの値を用いて計算して得られた形とを比較したものである。計算された形が実測されたものとよく一致している。図中の実測値の欠けた部分は、光の屈折による変形が複雑で、形の復元が困難なところである。

二液体の境界面の形とともに  $E_B = -0.149 \text{ cm}$  が得られるから、界面張力の作用が及んでいる部分の平均の厚さ  $(h_B - h_{B'}) - \frac{\rho_U}{\rho_L} (h_F' - h_B) = (h_B - h_{B'}) + \frac{\rho_U}{\rho_L} \left\{ (h_F - h_B) - (h_F - h_F') \right\} = \frac{\rho_L - \rho_U}{\rho_L} E_B = -0.013 \text{ cm}$  が求められる。ここで、負の符号は二液体の境界面が平均として上に凸であることを示している。

## §5 むすび

二液体の境界面の形を表わす式は長さの元をもっている  $L \equiv \sqrt{T_B / (\rho_L - \rho_U)} g$  と時間の元をもっている  $\sqrt{L/g}$  によって無次元化することができる。この無次元化された式は2個の未知函数  $\{(z_B - h_B)^* \equiv (z_B - h_B)/L, \psi_{B,C}^* \equiv \psi_{B,C}\}$  と1個の未知常数 ( $E_B^* \equiv E_B/L$ ) と1個の変数 ( $r^* \equiv r/L$ ) に加えて2個の半径 ( $R_1^* \equiv R_1/L$ ,  $R_2^* \equiv R_2/L$ ) と1個の角速度 ( $\Omega^* \equiv \Omega \sqrt{L/g}$ ) で形づくられていて、 $L$ ,  $T_B$ ,  $\rho_L$ ,  $\rho_U$ ,  $g$  は現われていない。そこで、角速度  $\Omega^*$  や半径  $R_1^*$  と  $R_2^*$  の変化による二液体の境界面の形の変化を調査することが

円筒壁を通して見える二液体の界面の形を全領域にわたって復元することとともに将来の問題として残されている。

#### 参考文献

- 1) 大亀 衛: 岡山理科大学紀要 第3号 (1967) 15.
- 2) M. Ohkame: J. Sci. Hiroshima Univ. A 37 (1973) 1.
- 3) G. I. Taylor: Phil. Trans. A 223 (1923) 289.
- 4) D. Coles: J. Fluid Mech. 21 (1965) 385.
- 5) 大亀 衛: 岡山理科大学紀要 第8号 (1972) 117.

### The Shape of the Interface Formed by Two Liquids between Two Concentric Cylinders Rotating with the Same Angular Velocity

M. OHKAME

(Department of Applied Physics, Okayama College of Science, Okayama, Japan)

The equations representing the shape of the interface formed by two liquids are introduced, and the solutions at various values of boundary conditions are obtained by numerical calculation. Moreover, the shape of the interface formed by two liquids is obtained by experiment, and it is compared with its numerical one. Both results coincide well each other.