

回転液体の自由表面 (VI)

高さの変わらない点

大 亀 衛

昭和51年 9月16日受理

共軸二円筒間にある液体の自由表面の形は二円筒の角速度によって変形する。二円筒の角速度の変化の仕方によっては、自由表面の高さの変わらない点のあることが計算して求められる。

§ 1 まえがき

角速度の等しい二円筒間の流れは円筒壁によって生じた基礎流であり、軸方向や半径方向の速度成分をもたない。二円筒の角速度の比が流れの不安定性によって生ずる二次的な流れの現われないところで¹⁾、しかも、液深が十分大きく底面から生ずる二次的な流れ²⁾が自由表面に達しないときの自由表面近くの流れはこの円筒壁によって生じた基礎流である。次に、二次的な流れを無視し基礎流のみを考慮してつくられた自由表面を表わす方程式³⁾と液体の等圧方面を表わす式⁴⁾を用いて、二円筒の角速度が変化しても高さの変わらない点のある場合を調らべる。

§ 2 基礎式

円筒軸上垂直上向きに z 軸をとり、円筒底面の中心に原点をもっている円筒座標 (r, θ, z) を用いる。内円筒の外半径を R_1 、外円筒の内半径を R_2 、内円筒の角速度を Ω_1 、外円筒の角速度を Ω_2 、重力の加速度を g とする。

(a) 液体の等圧方面の形を表わす式

この式は Navier—Stokes の方程式から求められる。圧力が大気圧に等しい面の z 座標を z_a 、この面の平均の高さを h_a とすると

$$\left. \begin{aligned} z_a - h_a &= \frac{A^2}{2g} r^2 + \frac{2AB}{g} \ln r - \frac{B^2}{2g} \frac{1}{r^2} \\ &+ \frac{4B^2(\ln R_2 - \ln R_1) - 4AB\{R_2^2(2\ln R_2 - 1) - R_1^2(2\ln R_1 - 1)\} - A^2(R_2^4 - R_1^4)}{4g(R_2^2 - R_1^2)}, \end{aligned} \right\} (1)$$
$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

この式(1)は表面張力を無視してもよい場合の自由表面の形を表わしている。二円筒の間隔

が十分大きいときや表面張力が十分小さいときにはこの式(1)が使用できる。式(1)を変形すると

$$\left. \begin{aligned} (CR_1^4 - DR_1^2 - E)\Omega_1^2 - \{2CR_1^2R_2^2 - D(R_2^2 + R_1^2) - 2E\}\Omega_1\Omega_2 \\ + (CR_2^4 - DR_2^2 - E)\Omega_2^2 = 4g(R_2^2 - R_1^2)^3(z_a - h_a), \\ C = (R_2^2 - R_1^2)\{2r^2 - (R_2^2 + R_1^2)\}, \\ D = 4R_1^2R_2^2\{2(R_2^2 - R_1^2)\ln r - R_2^2(2\ln R_2 - 1) + R_1^2(2\ln R_1 - 1)\}, \\ E = 2R_1^4R_2^4\{(R_2^2 - R_1^2)\frac{1}{r^2} - 2(\ln R_2 - \ln R_1)\} \end{aligned} \right\} (2)$$

となる。

(b) 自由表面の形を表わす方程式

この方程式は一つの面が自由表面である微小六面体の運動方程式から求められる。自由表面の接線が r 軸となす角を φ 、自由表面の z 座標を z_f 、自由表面の平均の高さを h_f 、液体の密度を ρ 、表面張力を T とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{T\cos\varphi} \left[\rho g(z_f - h_f) - \frac{\rho A^2}{2}r^2 - 2\rho AB\ln r + \frac{\rho B^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{T\sin\varphi}{r} \right. \\ \left. - \frac{4\rho B^2(\ln R_2 - \ln R_1) - 4\rho AB\{R_2^2(2\ln R_2 - 1) - R_1^2(2\ln R_1 - 1)\} - \rho A^2(R_2^4 - R_1^4)}{4(R_2^2 - R_1^2)} \right. \\ \left. + \rho g(h_f - h_a) \right], \\ \frac{d(z_f - h_f)}{dr} = \tan\varphi \end{aligned} \right\} (3)$$

となる。式(3)より r の関数 φ と r の関数 $z_f - h_f$ が求められる。定数 $h_f - h_a$ は質量一定の条件

$$\int_{R_1}^{R_2} (z_f - h_f) r dr = 0 \quad (4)$$

から定まり、積分定数は

$$r = R_c \text{ で } \varphi = \varphi_c, \quad z_f - h_f = (z_f - h_f)_c \quad (5)$$

を与えることによって決まる。

§ 3 高さの変わらない点

(a) $\Omega_1 = \Omega_2$ の場合

図1-1と図1-2は表1の値を用いて式(1)から求めたものである。式(2)で $\Omega_2 = \Omega_1 = \Omega$ とおくと

$$C\Omega^2 = 4g(R_2^2 - R_1^2)(z_a - h_a).$$

従って、 $r = \sqrt{(R_2^2 + R_1^2)/2} = 3.494 \text{ cm}$ のところでは Ω が変化しても常に $z_a - h_a = 0$ と

なっている。

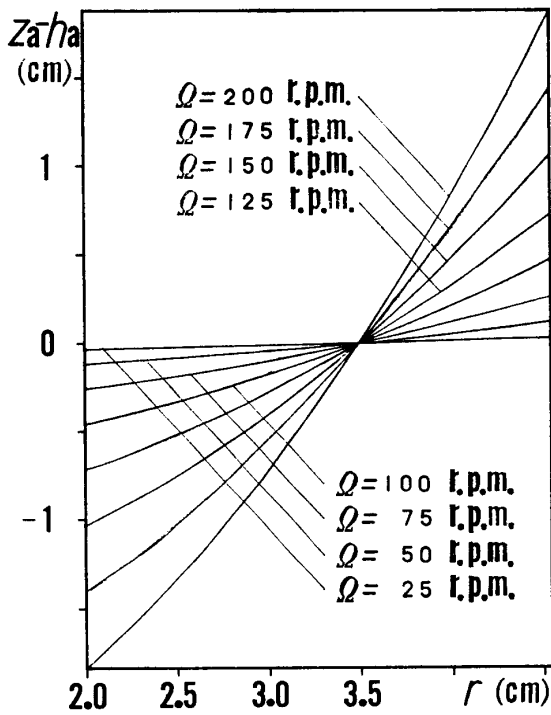


図1-1. 円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_1 = \Omega_2, T = 0$).

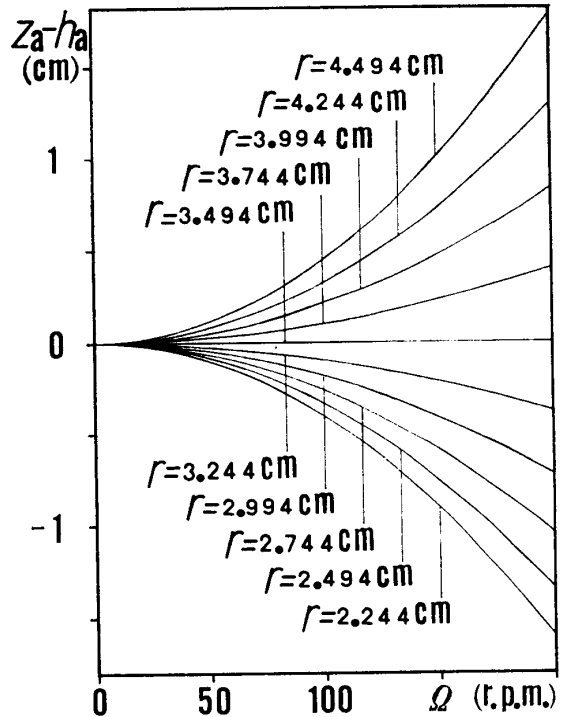


図1-2. 円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_1 = \Omega_2, T = 0$).

R_1	= 2.004	cm
R_2	= 4.517	cm
g	= 979.7	cm/sec ²

表1. 図1-1と図1-2で使用した値。

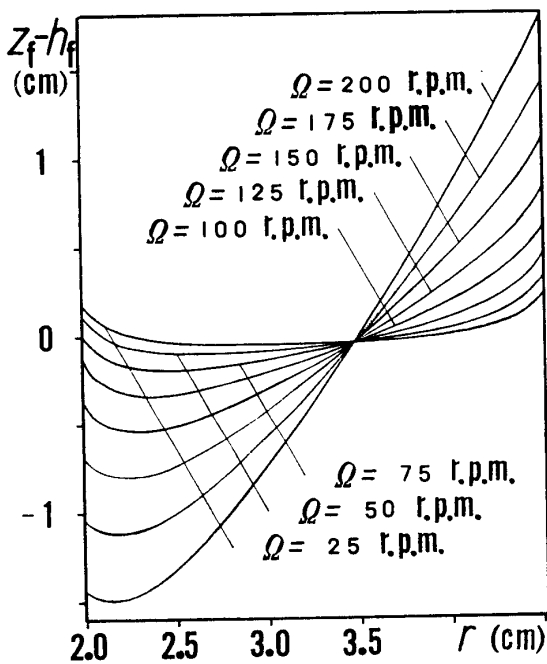


図2-1. 円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_1 = \Omega_2, T \neq 0$).

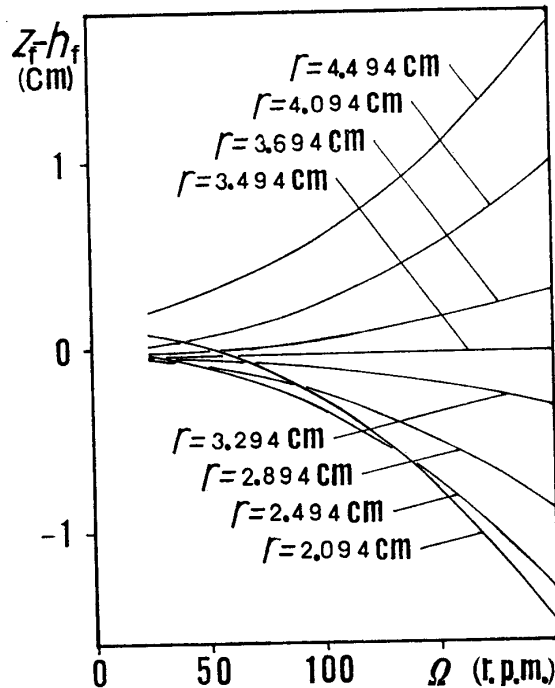


図2-2. 円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_1 = \Omega_2, T \neq 0$).

$R_1 = 2.004$	cm
$R_2 = 4.517$	cm
$g = 979.7$	cm/sec ²
$T = 71.86$	dyn/cm
$\rho = 0.9969$	g/cm ³

表2-1. 図2-1と図2-2で使用した値.

Ω (r.p.m.)	ψ_c	$(z_f - h_f)_c$ (cm)
25	0.041	-0.043
50	0.113	-0.046
75	0.227	-0.045
100	0.376	-0.043
125	0.547	-0.039
150	0.719	-0.034
175	0.872	-0.031
200	1.000	-0.029

表2-2. 図2-1と図2-2で使用した計算の始めの値 ($R_c = 3.494$ cm).

図2-1と図2-2は表2-1と表2-2の値を用いて式(3)と条件(4)と(5)から数値計算して求めたものである。図1-1, 図1-2の場合とほとんど同じところに高さの変わらない点がある。則ち, $r = 3.481$ cm のところでは Ω が変化しても常に $z_f - h_f = -0.047$ cm となっている。表2-1と表2-2は内円筒にクロムメッキした鋼棒, 外円筒にアクリルガラス円筒, 液体に蒸留水を用いた装置から得られた値である。実測中の平均室温は 25.6°C であった。式(3)と条件(4)と(5)から高さの変化しない点を解析的に求めることは困難である。

(b) $\Omega_1 \neq \Omega_2$ の場合

図3-1と図3-2は表3の値を用いて式(1)から求めたものである。式(2)で $\Omega_1 = 0$ とすると

$$(CR_2^4 - DR_2^2 - E)\Omega_2^2 = 4g(R_2^2 - R_1^2)^3(z_a - h_a).$$

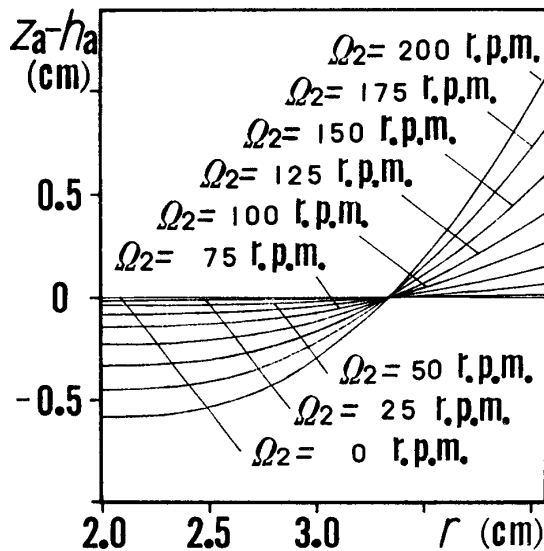


図3-1. 外円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_1 = 0, T = 0$).

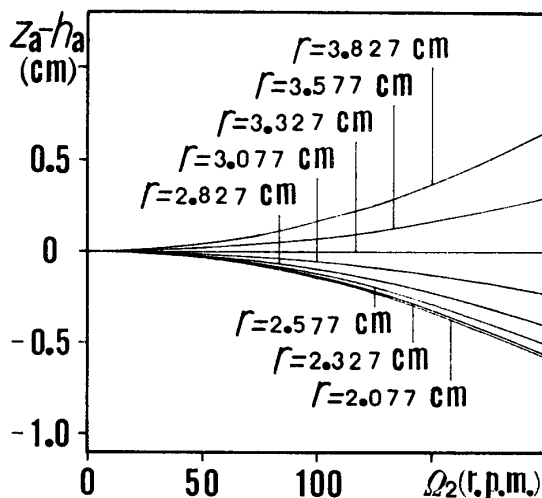


図3-2. 外円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_1 = 0, T = 0$).

$R_1 = 1.994$	cm
$R_2 = 4.070$	cm
$g = 979.7$	cm/sec ²

表3. 図3-1~図3-8で使用した値.

従って,

$$r^2 - 4R_1^2 \ln r - R_1^4 \frac{1}{r^2} = \frac{(R_2^4 - R_1^4) - 4R_1^2 \{ (2R_2^2 + R_1^2) \ln R_2 - 3R_1^2 \ln R_1 - (R_2^2 - R_1^2) \}}{2(R_2^2 - R_1^2)}$$

を満たす $r = 3.327$ cm のところでは Ω_2 が変化しても常に $z_a - h_a = 0$ となっている.

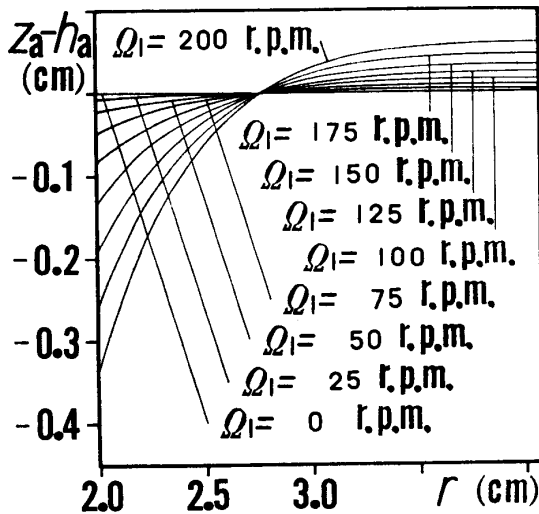


図3-3. 内円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_2 = 0, T = 0$).

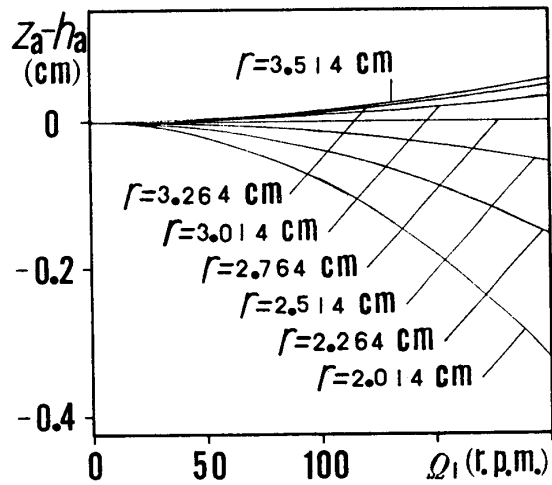


図3-4. 内円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_2 = 0, T = 0$).

図3-3と図3-4は表3の値を用いて式(1)から求めたものである. 式(2)で $\Omega_2 = 0$ とすると

$$(CR_1^4 - DR_1^2 - E)\Omega_1^2 = 4g(R_2^2 - R_1^2)^3(z_a - h_a).$$

従って,

$$r^2 - 4R_2^2 \ln r - R_2^4 \frac{1}{r^2} = \frac{(R_2^4 - R_1^4) - 4R_2^2 \{ 3R_2^2 \ln R_2 - (R_2^2 + 2R_1^2) \ln R_1 - (R_2^2 - R_1^2) \}}{2(R_2^2 - R_1^2)}$$

を満たす $r = 2.764$ cm のところでは Ω_1 が変化しても常に $z_a - h_a = 0$ となっている.

図3-5-A, 図3-5-B, 図3-6, 図3-7-A, 図3-7-B, 図3-8は表(3)の値を用いて式(1)から求めたものである. 一般に, 二円筒の角速度のうちいずれか一方が零でない定数で他方が変化する場合には高さの変化しない点のないことが式(2)から証明される.

式(3)と条件(4)と(5)を用いて数値計算するときには, 現在のところ計算の始めの値である条件(5)を実測して求めなければならない. 内外円筒の角速度が異ると, 流れの不安定性による乱れや Taylor 渦の生じないときでも, 底面から生ずる二次的な流れが測定される計算の始めの値に影響を及ぼす. 液深を大きくするとこの影響は減少するが, 計算の始めの値のわずかな変化に対しても自由表面はかなり大きく変形する⁵⁾. 従って, 式(3)と条件(4)

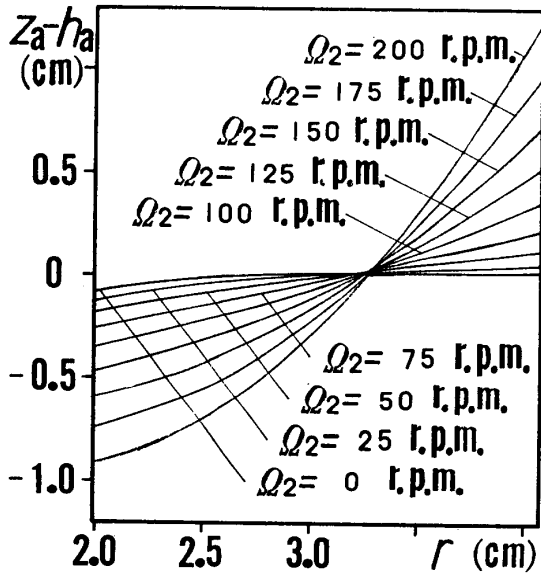


図3-5-A. 外円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_1=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

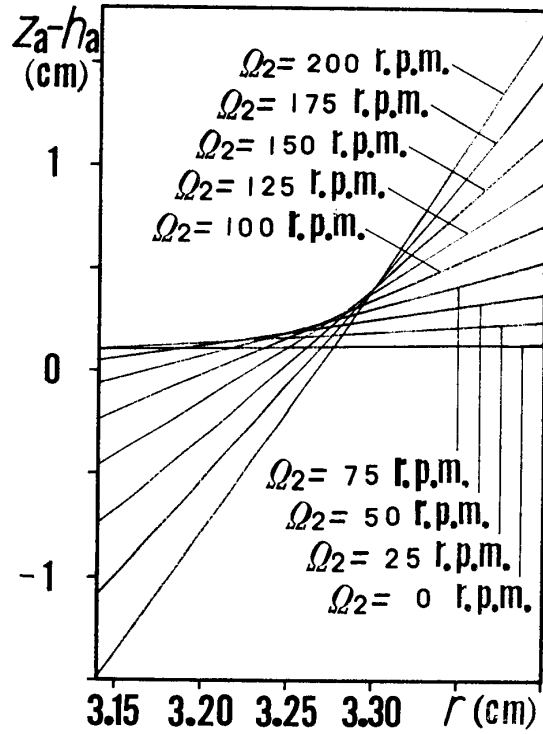


図3-5-B. 外円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_1=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

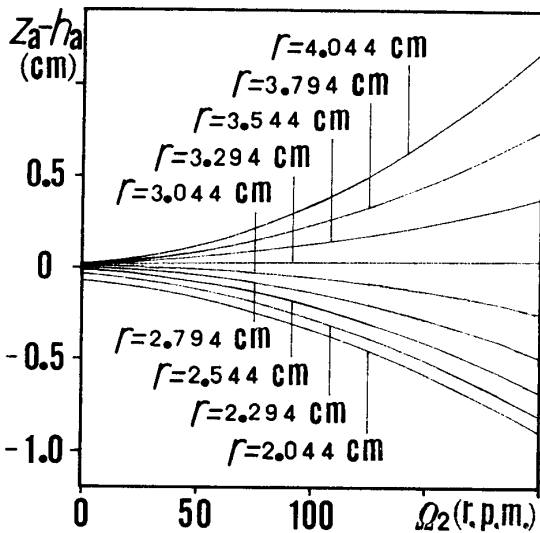


図3-6. 外円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_1=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

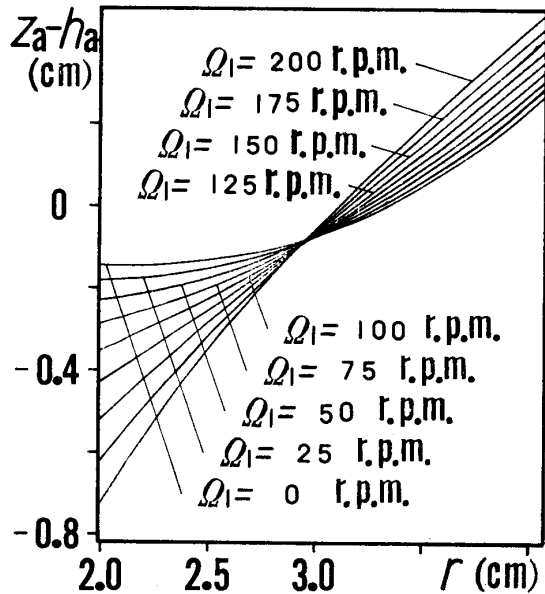


図3-7-A. 内円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_2=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

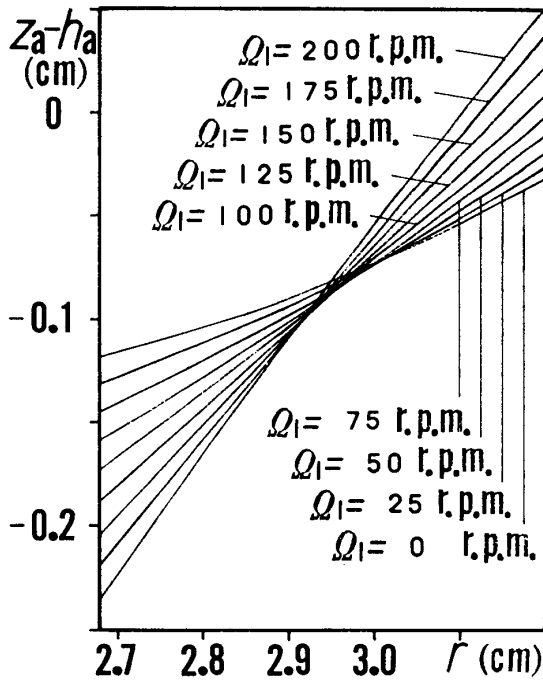


図3-7-B. 内円筒の角速度の変化による自由表面の変形 ($\Omega_2=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

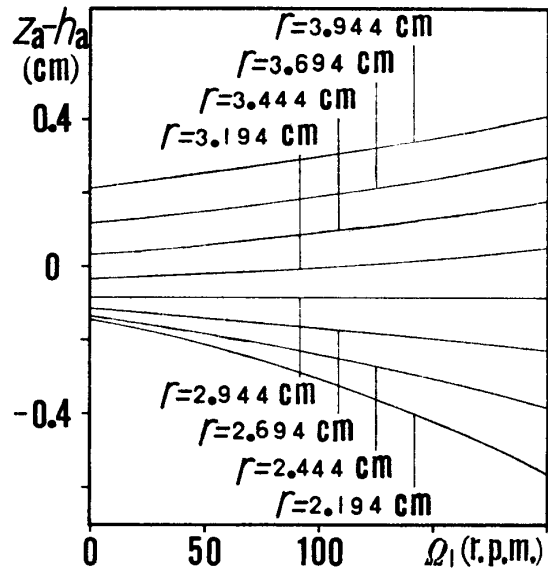


図3-8. 内円筒の角速度の変化による自由表面の高さの変動 ($\Omega_2=100\text{r.p.m.}$, $T=0$).

と(5)を用いて高さの変わらない点の有無を厳正に判断することは困難である。

§ 4 むすび

内外円筒の角速度が等しいときには、表面張力に関係なく、円筒の角速度が変化しても高さの変わらない点がある。

内外円筒の角速度が異なる場合で表面張力が無視できるときには、いずれか一方の円筒が静止し他方の円筒の角速度が変化するときのみ、このような点がある。

内外円筒の角速度が異なる場合で表面張力が無視できないときには、十分大きな液深をもっている自由表面のできる装置をつくり、底面から生ずる二次流の影響を受けていない計算の始めの値が実測されなければならない。このような装置ができて、流れの不安定性による二次流が現われて、計算のできる範囲は限定される。

最終的には、これら二次流をも考慮した自由表面を表わす方程式や等圧力面を表わす方程式による論議に進まなければならないけれども、これによって高さの変化しない新たな場合が存在するとは思われない。

参 考 文 献

- 1) G.I. Taylor : Phil. Trans **A223** (1923) 289.
- 2) 大亀 衛 : 岡山理科大学紀要第8号 (1972) 117.
- 3) M. Ohkame : J. Sci. Hiroshima Univ. **A37** (1973) 1.

- 4) 大亀 衛：岡山理科大学紀要第3号（1967）15.
- 5) 大亀 衛：岡山理科大学紀要第9号（1973）115.

The Free Surface of Rotating Viscous Liquid.

VI. The Invariable Point in Height

M. OHKAME

(Department of Applied Physics, Okayama College of Science, Okayama, Japan)

The shape of the free surface of fluid between two concentric cylinders is affected by the angular velocities of the two cylinders. In the cases when the variation of the angular velocities is specific, the existence of a point where the height of the free surface is invariable is known by calculation.