

# 回転液体の自由表面 (V)

## 表面張力の作用を受けている部分

大 亀 衛

昭和50年9月16日受理

共軸回転二円筒間にある液体のこの部分の厚さは二円筒の角速度によって変化する。数値計算を用いて、この変化の様子が求められる。

### §1 まえがき

共軸二円筒間にある液体が静止している場合には、圧力が自由表面上の気圧に等しい液体の等圧力面は平面である<sup>1,2)</sup>。二円筒が回転していて液体が動いている場合には、この等圧力面は曲面となる<sup>3)</sup>。この等圧力面と自由表面との間の部分が表面張力の作用を受けている。次に、この部分の厚さが二円筒の角速度によってどのように変化するかを調べる。

### §2 計算の方法

円筒軸上垂直上向きに  $z$  軸をとり、円筒底面の中心に原点をもっている円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。自由表面上の  $z$  座標を  $z_f$ 、自由表面の平均の高さを  $h_f$ 、自由表面の接線のうち  $z$  軸と交わるものが  $r$  軸となす角を  $\zeta$ 、自由表面の平均曲率を  $K_m$ 、自由表面における液圧を  $p_f$ 、圧力が気圧に等しい液体の等圧力面の  $z$  座標を  $z_n$ 、圧力が気圧に等しい液体の等圧力面の平均の高さを  $h_n$ 、気圧を  $p_a$ 、二円筒の角速度を  $\Omega$ 、内円筒の外半径を  $R_1$ 、外円筒の内半径を  $R_2$ 、液体の密度を  $\rho$ 、表面張力を  $T$ 、重力の加速度を  $g$  とすると

$$-p_f + p_a = TK_m, \quad (1)$$

$$K_m = \frac{\sin \zeta'}{r} + \frac{d\zeta'}{dr} \cos \zeta', \quad (2)$$

$$-p_f + p_a = \rho g \{s_f - (z_n - h_n) + E\}, \quad (3)$$

$$z_n - h_n = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega^2(R_1^2 + R_2^2)}{4g}, \quad (4)$$

$$\frac{ds_f}{dr} = \tan \zeta', \quad (5)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} s_f r dr = 0, \quad (6)$$

$$E = h_f - h_n, \quad s_f = z_f - h_f \quad (7)$$

が成立する。

円筒壁における  $s_r$  と  $\psi$  は円筒の角速度によって変化するから<sup>4)</sup>、計算の始めの値には実測しやすい自由表面中央部分の値を用いる。計算の出発点を自由表面中央部分にとると、数値計算の誤差の集積は少なくなる。

式(1)、式(2)、式(3)、式(4)、式(5)、式(6)と計算の始めの値から、表面張力の作用している部分の平均の厚さを表わす  $E$  が自由表面の形 ( $r$  の函数  $s_r$  と  $r$  の函数  $\psi$ ) とともに得られる。従って、表面張力の作用している部分の厚さ  $z_1 - z_n = s_r - (z_n - h_n) + E$  が求められる。

### §3 表面張力の作用を受けている部分の厚さ

内円筒にはクロムメッキした鋼の円柱を使用し、外円筒にはアクリルガラスの円筒を使用し、液体には蒸留水を使用する。  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $g$  はそれぞれ 2.004 cm, 4.517 cm, 0.9969 g/cm<sup>3</sup>, 71.86 dyn/cm, 979.7 cm/sec<sup>2</sup> である。表はこの場合の計算の始めの値を示し、表中の  $\psi_c$  と  $S_c$  は  $r = \sqrt{(R_1^2 + R_2^2)}/2 = 3.494$  cm における  $\psi$  と  $s_r$  の値を表わす。

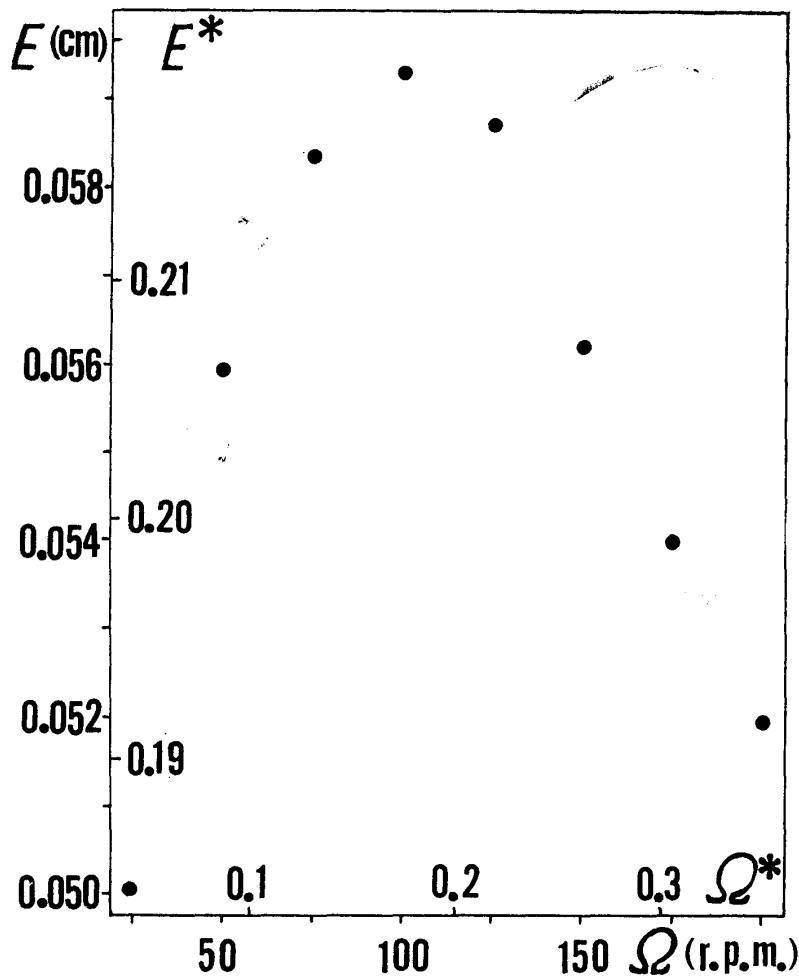


図1. 表面張力の作用を受けている部分の平均の厚さと円筒の角速度との関係。

図1は $E$ と $\Omega$ の関係を示す。 $\Omega$ が増して行くと、 $E$ は初め増大するがのち減少する。このことは円筒壁における接触角が円筒の角速度によって変化する様子<sup>4)</sup>からも推論される。図2は $z_f - z_a$ と $r$ の関係を示し、図3は $z_f - z_a$ と $\Omega$ の関係を示す。これらの図の中で\*のついている量は長さの元をもっている $L (= \sqrt{T/\rho g})$ と時間の元をもっている $\sqrt{L/g}$ を用いて無次元化したものである。

表. 計算の始めの値.

$\Omega$ (r. p. m.)	$\psi_c$	$S_c$ (cm)
25	0.041	-0.043
50	0.113	-0.046
75	0.227	-0.045
100	0.376	-0.043
125	0.547	-0.039
150	0.719	-0.034
175	0.872	-0.031
200	1.000	-0.029

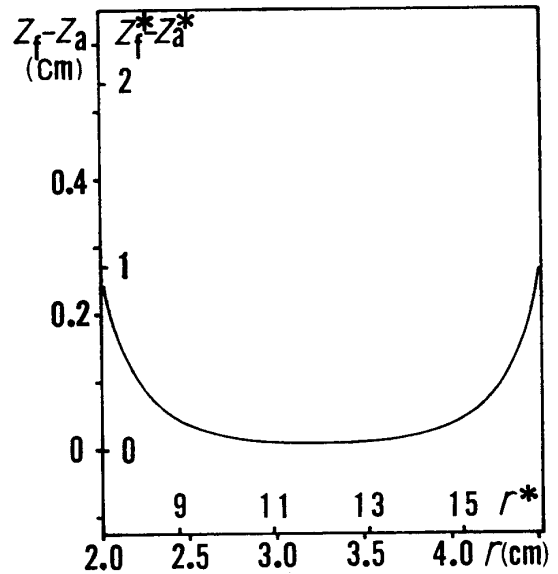


図2-1. 表面張力の作用を受けている部分の厚さ (50 r. p. m.).

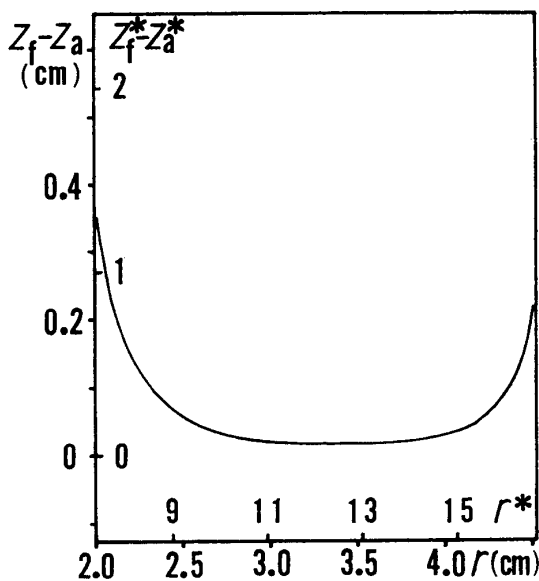


図2-2. 表面張力の作用を受けている部分の厚さ (100 r. p. m.).

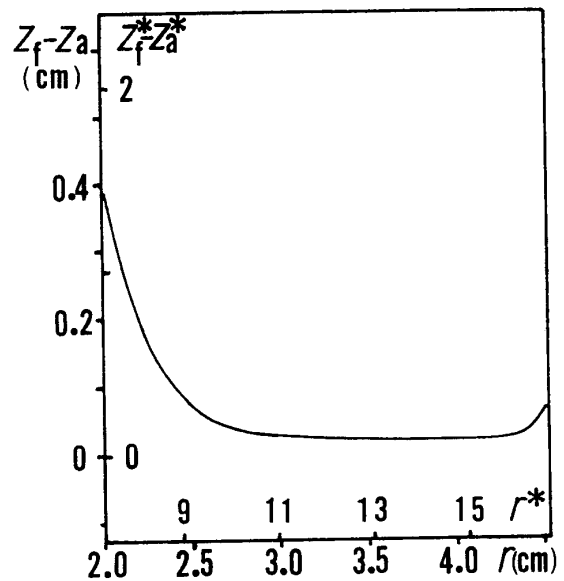


図2-3. 表面張力の作用を受けている部分の厚さ (175 r. p. m.).

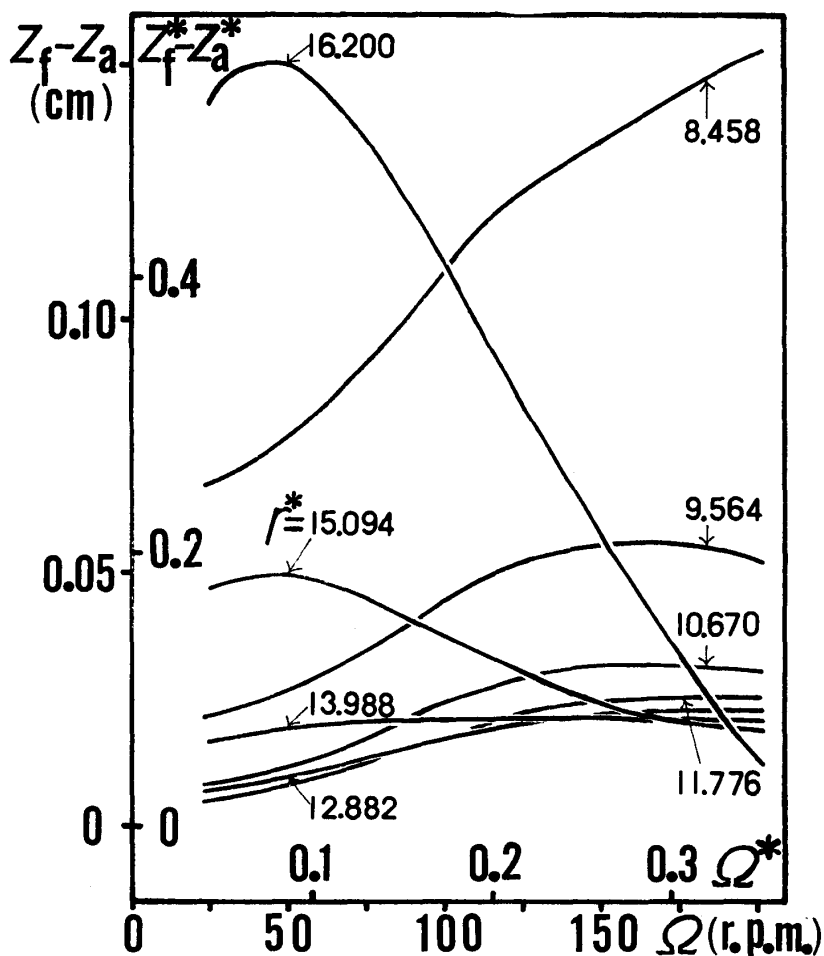


図 3. 表面張力の作用を受けている部分の厚さと円筒の角速度との関係.

#### § 4 むすび

同一の式から求められた  $s_r$  の値が測定針で実測した値とよく一致しているから、間接的ではあるが、ここで得られた結果は精度の高いものと思われる。

#### 参 考 文 献

- 1) H. Lamb : *Statics* (Cambridge Univ., 1949).
- 2) M. Harada : *J. Sci. Hiroshima Univ. A-II* 32 (1968) 211.
- 3) M. Ohkame : *J. Sci. Hiroshima Univ. A37* (1973) 1.
- 4) 大亀 衛 : 岡山理科大学紀要第10号 (1974) 101.

The Free Surface of Rotating Viscous Liquid.

V. The Section under the Action of the Surface Tension

M. OHKAME

*(Department of Applied Physics, Okayama College of Science, Okayama, Japan)*

The thickness of this section of the liquid placed between two concentric cylinders changes with the angular velocity of the cylinders. A idea of how this change takes place is obtained by numerical calculation.