

導電性運動媒質による反射と透過

中川紀美雄・富吉敏充・太田道秀
西山武則

Reflection and Transmission by Moving, Conductive Medium

Kimio NAKAGAWA, Toshimitsu TOMIYOSHI, Michihide OHTA
Takenori NISHIYAMA

昭和48年9月30日受稿

1. ま え が き

運動する導電性媒質中の電磁界を取り扱った論文はこれまでに数多く報告されているが^{1)~6)}、特に、導電性媒質の運動速度が電磁波の位相速度の運動方向成分より大きいような場合には、相対論的取り扱いが必要で、この種の問題の取り扱いは、はじめ著者らによって考察され、そのような場合には波動増幅の可能性があることが示されている³⁾。最近、これに関連する問題が活発に論議され、静止媒質中から運動している導電性媒質中に平面電磁波が入射する場合の反射と透過の問題が文献(1)および(2)によって取り扱われている。しかし、両者は同じ問題を取り扱っているにもかかわらず、導電性媒質の運動速度が入射波の位相速度の運動方向成分を越えた場合には、はなはだ異った結論に達している。両者の結論が異なってくる原因は、結局、導電性運動媒質中における透過波として可能な2つの解のうちどちらを選ぶかという立場の相異に起因している。両者が透過波を決定する際にとった立場の根拠は、それぞれつぎのとおりである。

文献(1)の場合：「透過波のエネルギー流は必ず境界面より遠ざかる方向に向うものとして透過波を決定すべきである。」

文献(2)の場合：「エネルギー流の方向は波源との関係を与えるのに決定的なものではなく、ローレンツ変換に対して符号の不変な減衰項のみが意味をもち、これにより透過波を決定すべきである。」

両者が上記のような理由にもとづいて選んだ透過波の波動はいずれも、理論的ないしは数学的には存在可能であるように思えるが物理的ないしは実際に、はたして、いずれの透過波が入射波によって励振されるかということについては、いまの段階では、明らかでなく、また手近に実験により検証する方法も見当らない。さらに、両者の導びいた結果からは運動媒質中の分散関係式より導びかれる光線速度(群速度)と位相速度との関係も十分に説明できない。

そこで本文では、両者とまったく異った観点にたつてこの問題を考察する。すなわち、まず、面波源によって導電性運動媒質中に励振される電磁波を因果律の点から正しく求め、特に媒質の運動する速度がある速度領域に達すると、これまでに報告されていない新しい現象として、

instability が生ずること等を明らかにする。つぎに静止媒質と運動している導電性媒質との境界面に入射平面波に等価な面波源を考えることにより、因果律の点から正しい反射係数および透過係数を求める。さらに、instability の存在する条件のもとでは、位相に関するローレンツ変換を用いる解析が有効でないこと等について、文献 (1), (2) の結果と比較しながら詳しく検討し、上記の両論文の理論の不十分な点や誤り等を明らかにする。

2. 1. 放射電磁界の積分表示式の導出

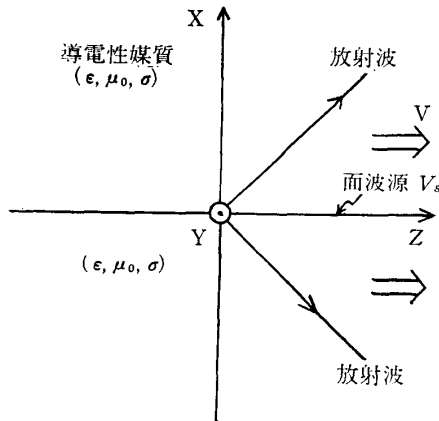


図1 運動導電性媒質中の面波源による放射波

Fig. 1 Radiation from the surface distribution of source in a moving, conductive medium.

性媒質が z の正の方向に一様な速度 v で運動しているものとする。

運動している導電性媒質中では、Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (2 \cdot a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_s \quad (2 \cdot b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2 \cdot c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_f + \rho_s \quad (2 \cdot d)$$

がなりたっている。ただし \mathbf{J}_f および \mathbf{J}_s はそれぞれ電流密度および自由電荷密度をあらわし、 ρ_f および ρ_s はそれぞれ波源電流密度および波源電荷密度をあらわす。

構成関係式はつぎのように与えられる。

$$\mathbf{B} = \mu \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \Omega \times \mathbf{E} \quad (3 \cdot a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \Omega \times \mathbf{H} \quad (3 \cdot b)$$

$$\mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} = \gamma \sigma \left\{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \right\} \quad (3 \cdot c)$$

図1は面波源によって導電性媒質中に放射波が励振される場合の構成図である。

$x=0$ なる $y-z$ 面に波源電流密度 \mathbf{J}_s なる面波源が存在し、 \mathbf{J}_s はつぎのように与えられるものとする。

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{i}_y \mathbf{J}_s = \mathbf{i}_y \mathbf{J}_{s0} e^{i\omega_0 t - jk_{z0} z} \delta(x) \quad (1)$$

ただし \mathbf{i}_y は y 軸方向の単位ベクトルをあらわし、 ω_0 は波源の励振周波数をあらわす。また k_{z0} は実数で、波源が z 方向に伝搬ベクトル k_{z0} で空間的に変動していることをあらわす。このような面波源に平行に、誘電率を ϵ 、透磁率 μ_0 、導電率 σ なる導電

性媒質が z の正の方向に一様な速度 v で運動しているものとする。

ただし

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{(n^2-1)}{(1-n^2\beta^2)c^2} = \frac{(n^2-1)\beta}{(1-n^2\beta^2)c} \mathbf{i}_z, \\ \bar{\alpha} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}, \\ \beta &= \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式 (1)~(3) より, 電界は波源電流密度 \mathbf{J}_S に平行な成分のみをもち, この電界成分 E_y の満足すべき波動方程式は (1)~(3) よりつぎのように求められる.

$$\left[\frac{\partial^2}{2x^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \epsilon\mu_0 a \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \gamma \frac{\partial}{\partial t} - \mu_0 \sigma \gamma v \frac{\partial}{\partial z} \right] E_y = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_S \quad (5)$$

ここで電界 E_y と波源 J_S に対する Laplace-Fourier 変換換をつぎのように定義する.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y(k_x, k_z, \omega) \\ J_S(k_x, k_z, \omega) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ \begin{array}{l} E_y(x, z, t) \\ J_S(k_x, k_z, \omega) \end{array} \right\} \times e^{-j\omega t + jk_x x + jk_z z} \times dx dz dt \quad (6)$$

この逆変はつぎのように与えられる.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y(x, z, t) \\ J_S(x, z, t) \end{array} \right\} = \int_{-\infty-j\sigma_0}^{\infty-j\sigma_0} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ \begin{array}{l} E_y(k_x, k_z, \omega) \\ J_S(k_x, k_z, \omega) \end{array} \right\} \times e^{j\omega t - jk_x x - jk_z z} \times \frac{dk_x dk_z d\omega}{(2\pi)^3} \quad (7)$$

式 (6) は, 式 (1) を代入することにより, つぎのようにかきかえられる.

$$J_S(k_x, k_z, \omega) = \frac{2\pi J_{S0} \delta(k_z - k_{z0})}{j(\omega - \omega_0)} \quad (8)$$

波動方程式 (5) に式 (6)~(8) を用いることにより, 電界 E_y の積分表示式は, k_z に関する積分を実行した後, つぎのように求められる.

$$E_y(x, z, t) = \frac{\mu_0 J_{S0} e^{-jk_{z0}z}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-j\sigma_0}^{\infty-j\sigma_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega e^{j\omega t - jk_x x}}{\Delta(k_x, k_{z0}, \omega) (\omega - \omega_0)} \times dk_x d\omega \quad (9)$$

ただし,

$$\Delta(k_x, k_{z0}, \omega) = \omega^2 \epsilon \mu_0 a - \frac{1}{a} (k_{z0} + \omega \Omega)^2 - j\omega \mu_0 \sigma \gamma \left(1 - \frac{vk_{z0}}{\omega}\right) - k_x^2 \quad (10)$$

上式右辺を0とおくといわゆる分散関係式となる。

一方、磁界成分は式(9)の電界成分の積分が求められれば式(2)と(3)より容易に求められる。

2. 2. 積分の決定

式(9)の積分を「 $t < 0$ では波源は存在せず、 $t > 0$ において電磁界は波源により励振される。」という波源と放射電磁界との間の因果関係を満足するように解いてゆこう⁷⁾。本文では以下波源と放射電磁界とが上にのべたような関係を満たすとき因果律を満足するとよぶことにする。図2の積分路 C_1 は式(9)の Laplace 逆変換に対する積分路であり、 W 平面の虚軸の $-\sigma_0$ の上半面にのみ式(9)の被積分項の極があるように σ_0 を十分大きくとると、 $-\sigma_0$ の上半面が $t > 0$ に下半面が $t < 0$ にそれぞれ対応する、図3は式(9)の Fourier 逆変換に対する k_x の積

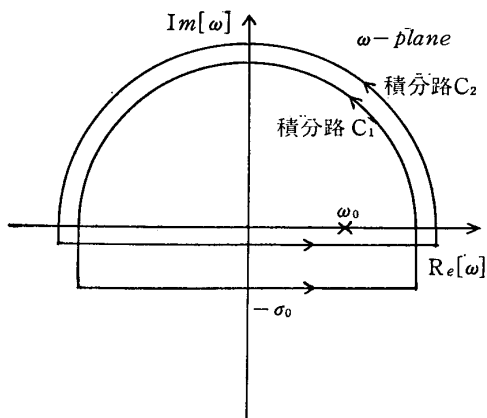


図2 Laplace 変換に対する積分路
Fig. 2 Laplace contour.

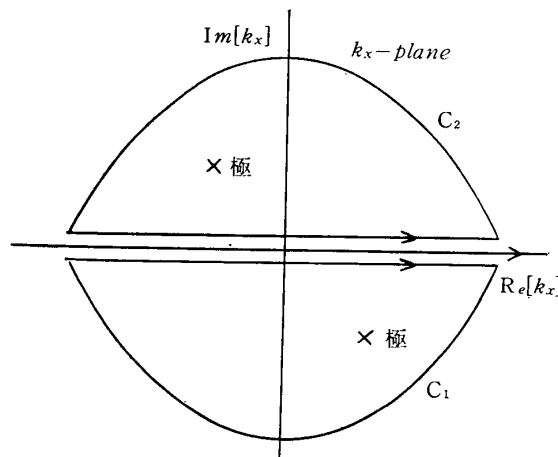


図3 Fourier 変換に対する積分路
Fig. 3 Fourier contour.

分路である。積分路 C_1 および C_2 はそれぞれ $x > 0$ の場合、および $x < 0$ の場合の積分路である。

いま図2において積分路 C_1 を ω_0 を囲んで ω 平面の実軸上に沿った積分路 C_2 にとると、Laplace 逆変換に対する極の効果は時間 t が十分経過した後は ω_0 による極の効果のみとなってくる。一方 Fourier 逆変換に対する極は、固定された ω の値に対して

$$\Delta(k_x, k_{z0}, \omega) = 0 \quad (11)$$

を満足する k_x の値で与えられる。しかし図2の積分路 C_1 を C_2 に変えた場合、式(11)に与えられる極は k_x 平面上を移動するため、式(9)において最初に定義したように物理的に意味ある解をもつようにするためには図3の k_x 平面上の積分路は媒質の速度 v と波源の Z 方向の位相速度の v_{pz} 大小関係によって決まる3つの領域に応じて図4~6のように解析接続されねばな

らない。(付録A参照) ただし波源の Z 方向の位相速度 v_{pz} は

$$v_{pz} = \omega_0 / k_{z0} \tag{12}$$

で与えられる。

つぎに図4～6に対応する式(9)の積分はつぎのように決定される。なお、図4～6中の記号×は極となる k_x の値のある象限を示す。

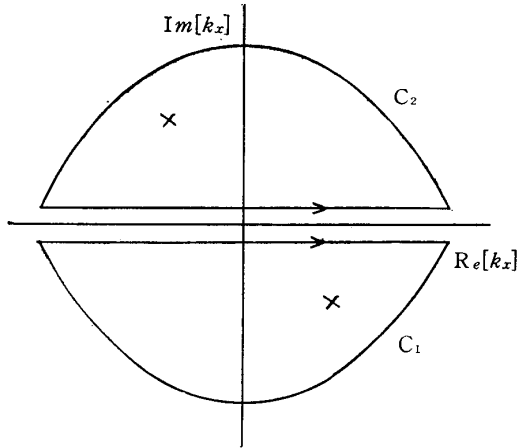


図4 i) の場合の Fourier 逆変換に対する積分路

Fig. 4 Definition of Fourier contour for case i).

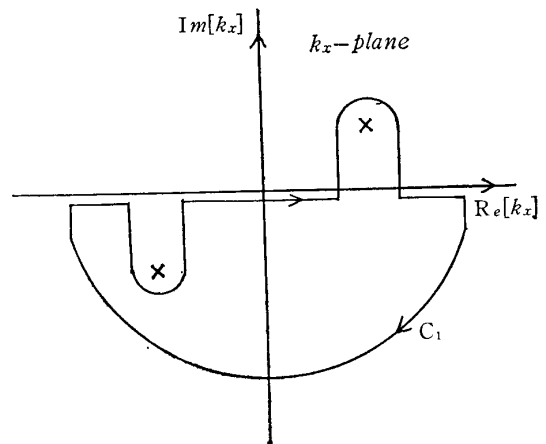


図5. a ii) の場合の Fourier 逆変換に対する積分路 ($x < 0$).

Fig. 5 a-Definition of Fourier contour for case ii).

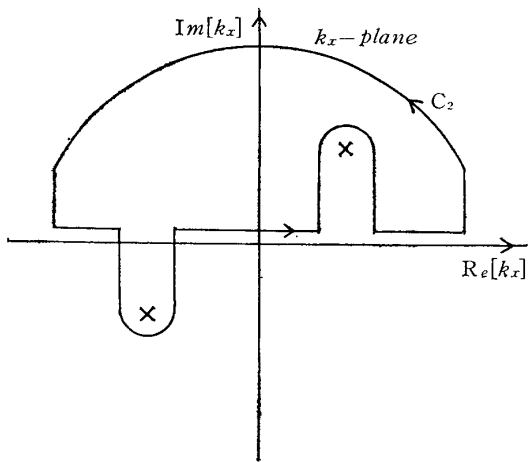


図5. b ii) の場合の Fourier 逆変換に対する積分路 ($x < 0$).

Fig. 5 b-Definition of Fourier contour for case iii).

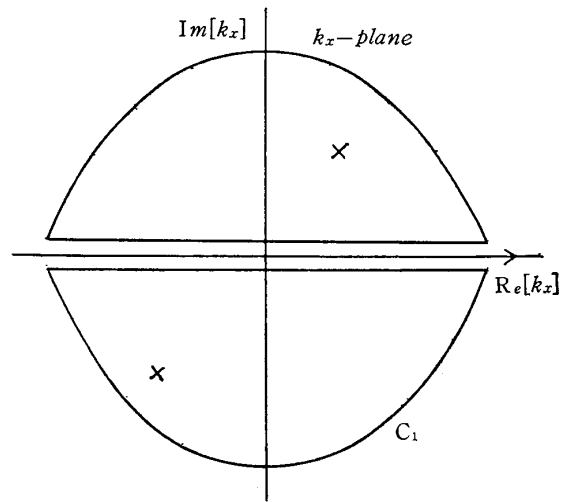


図6 iii) の場合の Fourier 逆変換に対する積分路

Fig. 6 Definition of Fourier contour for case iii).

i) $v < v_{pz}$, $v_{pz} < 0$ のとき

$$E_y(x, z, t) = - \frac{\omega_0 \mu_0 J_{S0}}{k_x^- - k_x^+} e^{j\omega_0 t - jk_x^- x - jk_{z0} z} \quad (x > 0) \tag{13}$$

ただし

$$k_x^+ = -k_x^- = -p + jq \quad (14)$$

$$p = \left(\frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right)^{1/2} \quad (15 \cdot a)$$

$$q = \left(\frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right)^{1/2} \quad (15 \cdot b)$$

$$P = \omega_0^2 \varepsilon \mu_0 a - \frac{1}{a} (k_{z0} + \omega_0 \Omega)^2 \quad (16 \cdot a)$$

$$Q = \omega_0 \mu_0 \sigma \gamma \left(1 - \frac{v k_{z0}}{\omega_0} \right) \quad (16 \cdot b)$$

ii) $\frac{n^2 - 1}{n^2 - \beta^2} v < v_{pz} < v$ のとき

$$E_z(x, z, t) = - \frac{\omega_0 \mu_0 J_{S0}}{k_x^+ - k_x^-} e^{j\omega_0 t - jk_x^+ x - jk_z z} \quad (x > 0) \quad (17 \cdot a)$$

ただし

$$k_x^+ = -k_x^- = p + jq \quad (18)$$

iii) $0 < v_{pz} < \frac{n^2 - 1}{n^2 - \beta^2} v$ のとき

$$E_y(x, z, t) = - \frac{\omega_0 \mu_0 J_{S0}}{k_x^- - k_x^+} e^{j\omega_0 t - jk_x^- x - jk_z z} \quad (x > 0) \quad (19)$$

ただし

$$k_x^+ = -k_x^- = p + jq \quad (20)$$

さて、i) は媒質の速度 v が吸源の Z 方向の位相速度 v_{pz} より小さいか、あるいは v_{pz} と v の方向が逆の場合で、式 (13) に示されるような減衰波が励振される。ii) と iii) は共に媒質の速度 v が波源の位相速度 v_{pz} を越える場合で、特に ii) の場合には instability が存在し、式 (17) に示されるように x 軸方向に波源より遠ざかるにしたがって電磁界の振幅は増大し波動増幅が生じ得ることが結論される。iii) の場合は i) のときと同じように励振波は波源から遠ざかるにしたがって空間的に減衰する。ただし、i) の場合と異なるのは位相面が i) の場合とは逆に、波源に向かって進むことである。これについての物理的解釈は次節で波動増幅の現象とあわせて詳しく検討する。

3. エネルギー関係式

導電性運動媒質中の波源による放射波のエネルギー関係式はつぎのように与えられる⁴⁾。

$$\langle P_R \rangle = \langle P_s \rangle - \langle P_f \rangle \quad (21)$$

$$\langle P_R \rangle = \iint_A \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle dA \quad (22 \cdot a)$$

$$\langle P_s \rangle = -\frac{1}{2} R_e \iiint_V \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{E} dV \quad (22 \cdot b)$$

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{2} R_e \iiint_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV \quad (22 \cdot c)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} R_e [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \quad (2 \cdot 2d)$$

上式において R_e は実数部をとる操作をあらわし、記号 * は複素共役数を表わす。面 A は体積 V を囲む面で、 \mathbf{n} は面 A の外向きの単位法線ベクトルをあらわす。式 (22・a) の $\langle P_R \rangle$ は面 A を横切って外方向に放射されるエネルギーの時間平均値をあらわし、 $\langle P_s \rangle$ は A によってかこまれる体積 V 内に存在する波源によって供給されるエネルギーの時間平均値をあらわす。 $\langle P_f \rangle$ はその符号が正の場合には体積 V の媒質内で消費されるエネルギーの時間平均値を表わし、負の場合には媒質から供給されるエネルギーの時間平均値を表わす。 $\langle \mathbf{S} \rangle$ はもちろんポインティング・ベクトルの時間平均値である。

式 (22・a) の積分を求めるかわりに、単位面積を横切って流れるエネルギー密度 $\langle S \rangle$ の時間平均値の x 方向成分 $\langle S_x \rangle$ と z 方向成分 $\langle S_z \rangle$ を求めよう。図 1 からわかるように、電磁界は $x=0$ の面上における面波源 \mathbf{J}_s をはさんで $x>0$ の領域とで対称であることから、簡単のためあらためて $\langle S_x \rangle$ は波源より遠ざかる方向に流れるエネルギー流を表わすとき正にとるものとする。前節で分類した 3 つの速度領域に対してつぎのように $\langle S_x \rangle$ および $\langle S_z \rangle$ が求まる。

i) $v < v_{pz}$, $v_{pz} < 0$ のとき

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{8} \frac{p\omega_0 \mu_0 J_{s0}}{p^2 + q^2} e^{-2q|x|} \quad (23 \cdot a)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{8} \frac{\omega_0 \mu_0 (k_{z0} + \omega_0 \Omega) J_{s0}^2}{a(p^2 + q^2)} e^{q2|x|} \quad (23 \cdot b)$$

ii) $\frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} v < v_{pz} < v$ のとき

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{8} \frac{p\omega_0 \mu_0 J_{s0}^2}{p^2 + q^2} e^{2q|x|} \quad (24 \cdot a)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{8} \frac{\omega_0 \mu_0 (k_{z0} + \omega_0 \Omega) J_{s0}^2}{a(p^2 + q^2)} e^{2q|x|} \quad (24 \cdot b)$$

iii) $0 < v_{pz} < \frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} v$ のとき

$$\langle S_x \rangle = -\frac{1}{8} \frac{p\omega_0 \mu_0 J_{s0}^2}{p^2 + q^2} e^{-2q|x|} \quad (25 \cdot a)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{8} \frac{\omega_0 \mu_0 (k_{z0} + \omega_0 \Omega) J_{s0}^2}{a(p^2 + q^2)} e^{-2q|x|} \quad (25 \cdot b)$$

波源より単位面積を通して媒質に供給されるエネルギーは i) および ii) の場合についてはつぎのように与えられる.

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{4} \frac{p\omega_0 \mu_0 J_{s0}^2}{p^2 + q^2} \quad (26)$$

また iii) の場合に対しては

$$\langle P_s \rangle = -\frac{1}{4} \frac{p\omega_0 \mu_0 J_{s0}^2}{p^2 + q^2} \quad (27)$$

のように与えられる. つぎに自由電荷密度 J_f は式 (3・c) を用いて求められるので式 (22・c) に示した媒質の単位体積あたりに供給されるエネルギー密度 $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ はつぎのように与えられる.

$$\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}] = \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_{pz}}\right) \left| E_y(x, z, t) \right|^2 \quad (28)$$

ただし電界 $E_y(x, z, t)$ は i) ~ iii) の場合に応じてそれぞれ式 (13), (17) および (19) で与えられる.

表1 $\langle S_x \rangle$, $\langle P_s \rangle$ および $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ の符号

	i) $v < v_{pz}$, $v_{pz} < 0$	ii) $\frac{n^2 - 1}{u^2 - \beta^2} v < v_{pz} < v$	iii) $v_{pz} < \frac{n^2 - 1}{n^2 - \beta^2} v$
$\langle S_x \rangle$	正	正	負
$\langle P_s \rangle$	正	正	負
$\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$	正	負	負
	減衰波	増大波	ac-generator

表1は $\langle S_x \rangle$, $\langle P_s \rangle$ および $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ の符号についてまとめたものである. i) の場合は instability がなく $\langle S_x \rangle$, $\langle P_s \rangle$ および $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ は共に正で, 波源は媒質にエネルギーを供給し, 放射エネルギーは波源より外に向い, 媒質は電磁波からエネルギーを吸収している. ところが ii) の場合, すなわち媒質の速度 v が波源の位相速度 v_{pz} を越え, かつ $\frac{n^2 - 1}{n^2 - \beta^2} v < v_{pz}$ を満足するところでは instability が存在し, 式 (17) および (24) よりわかるように, 電磁界および放射エネルギーは波源から垂直の方向に遠ざかるにしたがって増大する. すなわち, この速度領域では $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ が負となり, 媒質は逆に電磁波に対して仕事を. 別

の表現をすれば、電磁波は媒質からエネルギーを吸収し空間的に増大すると説明される。また式 (24) と (26) よりわかるとおり、波源が供給するエネルギー密度 $\langle P_s \rangle$ は波源の両面上での $\langle S_x \rangle$ の値の和になっており、波源と電磁界との間でエネルギーの授受が行なわれている模様がわかる。つぎに iii) の場合は、i) の場合と同じく instability は存在しないが、 $\langle S_x \rangle$ 、 $\langle P_s \rangle$ および $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ はすべて負となる。これに対して ii) の場合には、波源の供給するエネルギー密度の時間平均値 $\langle P_s \rangle$ は正であって、常に波源は媒質に対してエネルギーを供給するという関係にあった。したがって、 $\langle P_s \rangle$ が負となることは、波源が媒質から電磁界を通してエネルギーを吸収するものと解釈される。すなわち、 $\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ が負で媒質がエネルギーを発生し、このエネルギーが電磁界に供給され、そのエネルギー流の密度の成分である $\langle S_x \rangle$ が負となって波源の方向に流れるという妥当なエネルギー流動の解釈がなりたつ。このように、iii) の速度領域では、ひとたび波源が媒質を励振すると媒質はエネルギーを発生しはじめ、そのエネルギーが波源に流れこむことになる。したがって、波源の位置において電力をとりだし得ることが期待される。

4. 等価波源、反射係数および透過係数

つぎに、以上に得られた結果を導電性運動媒質による入射面波の反射と透過の問題に適用するために、入射平面波に対する等価波源を導きよう。

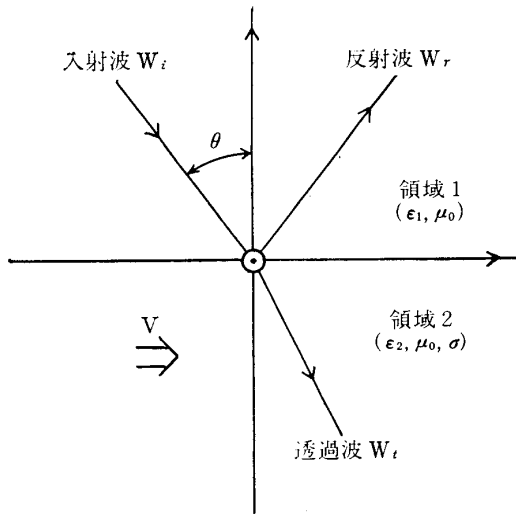


図 7. a 運動導電性媒質による反射と透過

Fig. 7. a Reflection and Transmission by a moving, conductive medium.

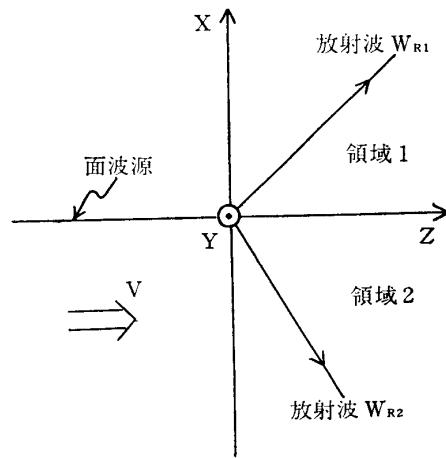


図 7. b 等価波源による放射

Fig. 7. b Radiation from equivalent source.

図 7. a と図 7. b に示すように、 $x > 0$ の領域 1 は構成定数 ϵ_1 、 μ_0 なる静止媒質で、また $x < 0$ の領域 2 は速度 v で Z 軸の正の方向に運動する構成定数 ϵ_2 、 μ_0 、 σ なる導電性媒質で充されているものとする。

図 7. a は入射波の電界 \mathbf{E}_i が

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{i}_y E_0 e^{j\omega t + jk_x X - jk_z Z} \tag{29}$$

のように入射面に垂直な成分のみをもつようなE波が入射した場合に、2次平面波としての反射、透過波が境界面から励振される場合の構成図である。

図7. bは図7. aの入射平面波に等価な面波源をおいたときに領域1および領域2にこの等価波源により放射波が励振される場合の構成図である。

図7. bに対する境界条件はつぎのように与えられる。

$$\mathbf{i}_x \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_0 \quad (30 \cdot a)$$

$$\mathbf{i}_x \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_0 \quad (30 \cdot b)$$

$$\mathbf{i}_x \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = -\mathbf{J}_m \quad (30 \cdot c)$$

$$\mathbf{i}_x \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \rho_m \quad (30 \cdot d)$$

ただし \mathbf{J}_0 および ρ_0 はそれぞれ面電流密度および面電荷密度をあらわし \mathbf{J}_m および ρ_m はそれぞれ面磁流密度および面磁荷密度をあらわす。また電磁界量に付された添字1, 2はそれぞれ領域1, および領域2に属する量であることを示す。

したがって等価波源を境界条件式(30)を用いて

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{i}_y J_0 = \mathbf{i}_y \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_0 e^{j\omega t - jk_z z} \delta(x) \quad (31 \cdot a)$$

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{i}_z J_m = \mathbf{i}_z E e^{j\omega t - jk_z z} \delta(x) \quad (31 \cdot b)$$

のように決定すると、図7. aの2次平面波と図7. bの放射波とは全く等価に取り扱うことができる。したがって、図7. bの放射波は等価電流波源 \mathbf{J}_0 および等価磁流波源 \mathbf{J}_m のそれぞれによって励振される電気型電磁界と磁気型電磁の和として求められる。

ここで \mathbf{J}_0 により励振される放射波は図7. bの領域1では静止系での放射の理論を用いることができ、領域2においては2・に求めた結果が適用できる。一方 \mathbf{J}_m により励振される磁気型の波動の分散関係は電気型の波動の分散関係式(11)と一致することが容易に確かめられるので、その伝搬ベクトルは電気型のものと同じようにとりあつかつてよい。またそれぞれの電磁界の振巾は逆に境界条件式(30)と式(31)を用いて完全に決定できる。

さて、以上の考察より完全誘電体の静止媒質中の平面波が導電性運動媒質に入射する場合の反射と透過の問題は式(31)のような等価波源による放射の問題におきかえて2・の結果を適用することができることがわかったので、図7. aの問題に対する電力反射係数 R および電力透過係数 T を2・の結果を適用して求めると、つぎのようになる。

$$I) \quad v_{pz} < 0, \quad \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 - \beta^2} v < v_{pz} \quad \text{のとき}$$

$$R = \frac{(p - n_1 \cos \theta)^2 + q^2}{(p + n_1 \cos \theta)^2 + q^2} \quad (32 \cdot a)$$

$$T = \frac{4pn_1 \cos \theta}{(p + n_1 \cos \theta)^2 + q^2} \quad (32 \cdot b)$$

II) $0 < v_{pz} < \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 - \beta^2} v$ のとき

$$R = \frac{(p + n_1 \cos \theta)^2 + q^2}{(p - n_1 \cos \theta)^2 + q^2} \tag{33 \cdot a}$$

$$T = \frac{-4pn_1 \cos \theta}{(p - n_1 \cos \theta)^2 + q^2} \tag{33 \cdot b}$$

ここに P, q は式 (15) において ε を ε_2 におきかえたものに等しく, n_1, n_2 はそれぞれ領域 1, 領域 2 の媒質の屈折率で θ は入射波の入射角である. I) の場合は前節の i) と instability の起る ii) の場合を含み, このときは

$$R + T = 1 \tag{34}$$

なる関係が成り立っており, R は常に 1 より小である. ところが前節の iii) の場合に対応する II) のときは, R と T はやはり式 (34) の関係を満足するが, R は常に 1 より大で, かつ T は負となる. このことは前節の結果から予測されるように, T は透過係数と呼ばれるにふさわしくなく, T の絶対値は領域 2 の媒質から湧出するエネルギーと入射波のエネルギーの x 方向の成分との比をあらわしていることになる. したがって R が 1 より大になることは物理的解釈として不

自然ではない. 以上のことをいいかえると, II) の場合の関係を v および v_{pz} が満足するときには, 導電性運動媒質に平面波を入射させると入射波より大きいエネルギーをもった反射波をもった反射波をとりだすことができるということになる.

図 8. a~c は, $n_1=4, m=2.5$ の場合に n_2 をパラメータとしてそれぞれ 2, 4 および 10 について反射係数の数値計算例を示したものである. 例えば, 図 8. a の $P=0.6, P=0.9$ の場合については $\theta > 0$

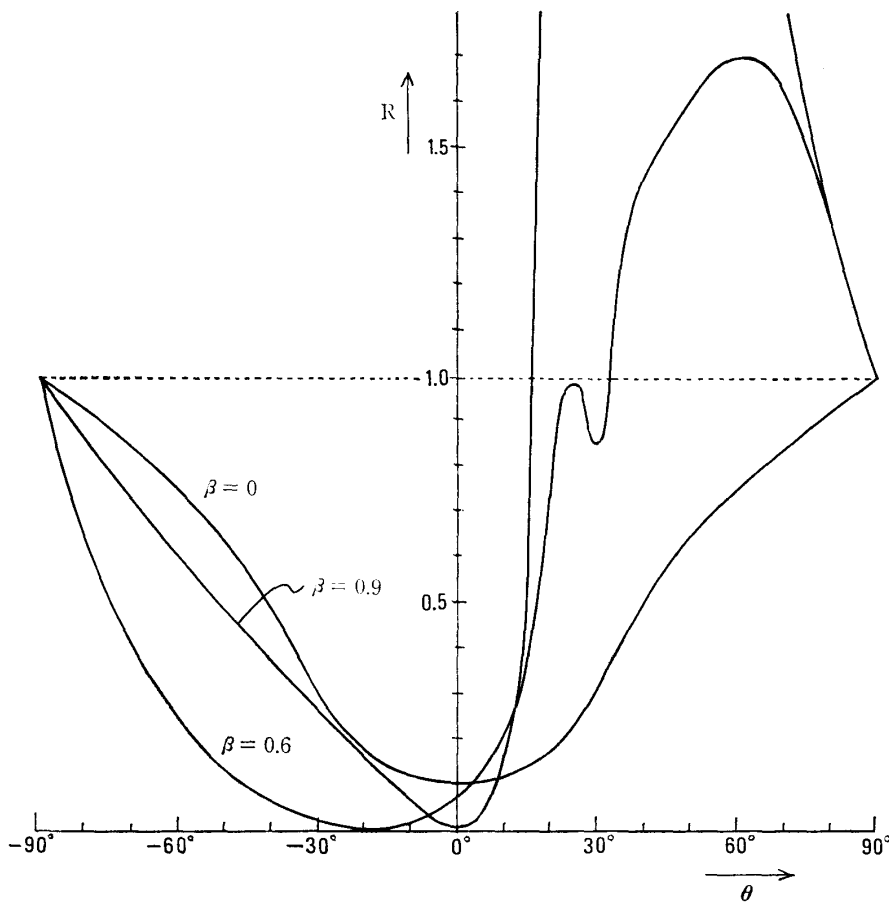


図 8. a 反射係数 ($n_1=4, n_2=2, m=2.5$)

Fig. 8. a Reflection coefficient ($n_1=4, n_2=2, m=2.5$)

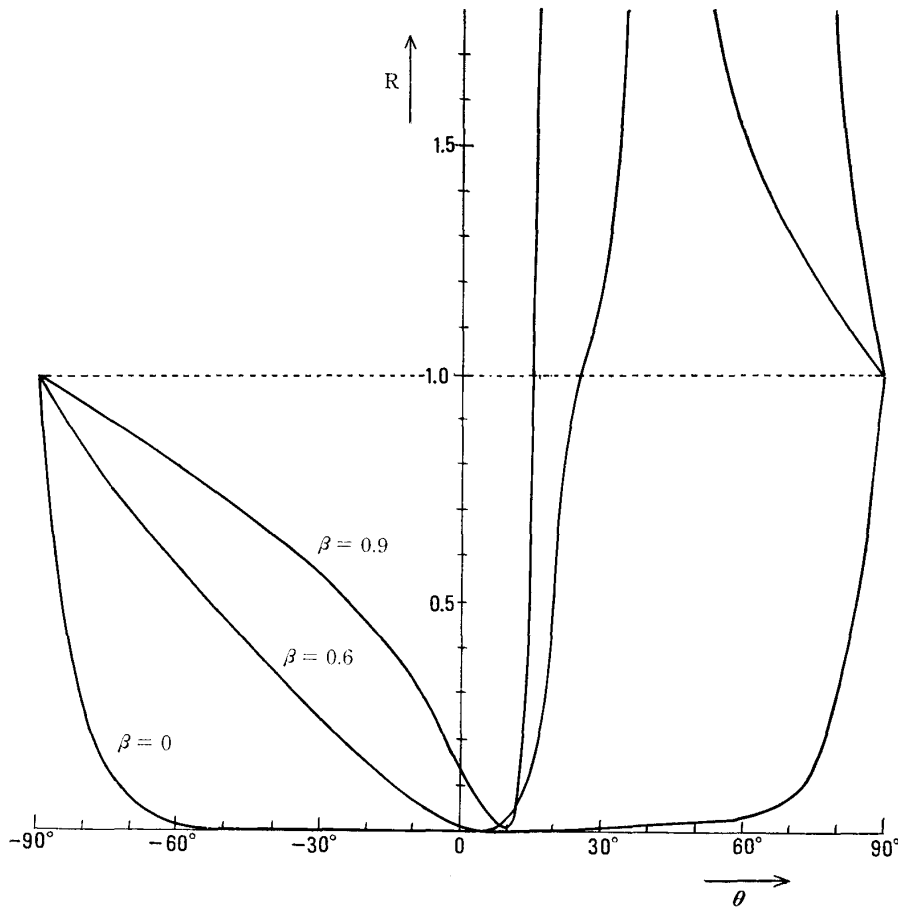
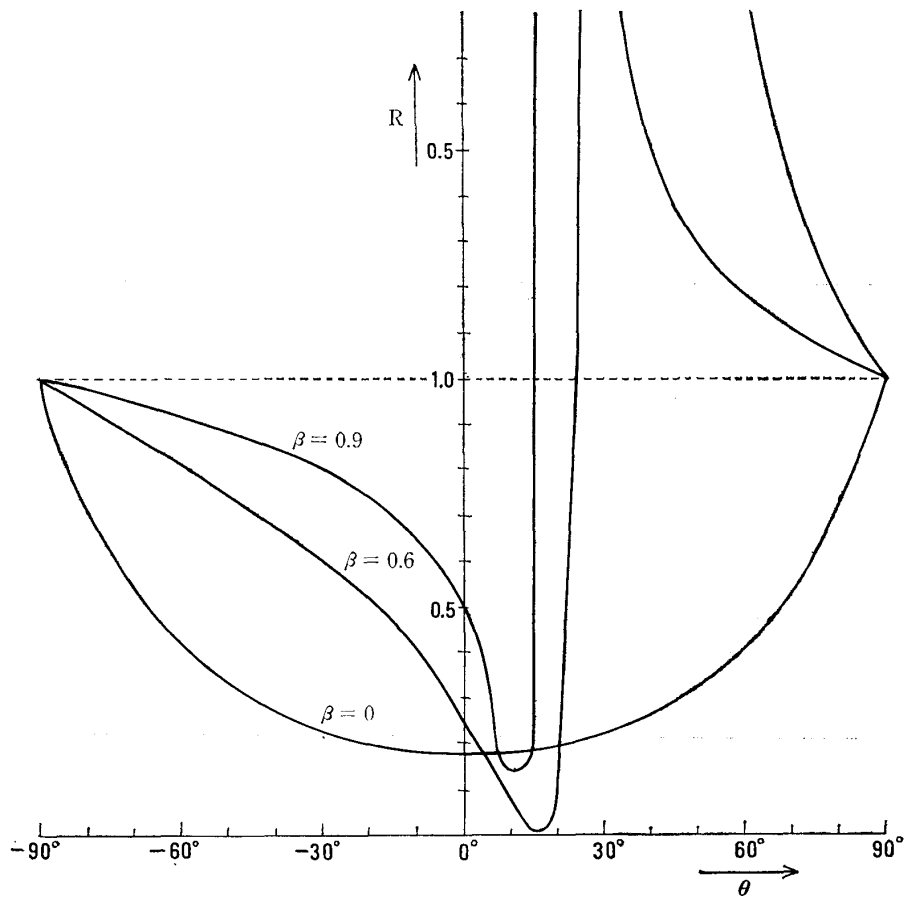


図 8. b 反射係数
($n_1 = 4$, $n_2 = 4$,
 $m = 2.5$)

Fig. 8. b Reflection
coefficient ($n_1 = 4$,
 $n_2 = 4$, $m = 2.5$)

図 8. c 反射係数
($n_1 = 4$, $n_2 = 10$,
 $m = 2.5$)

Fig. 8. c Reflection
coefficient ($n_1 = 4$,
 $n_2 = 10$, $m = 2.5$)



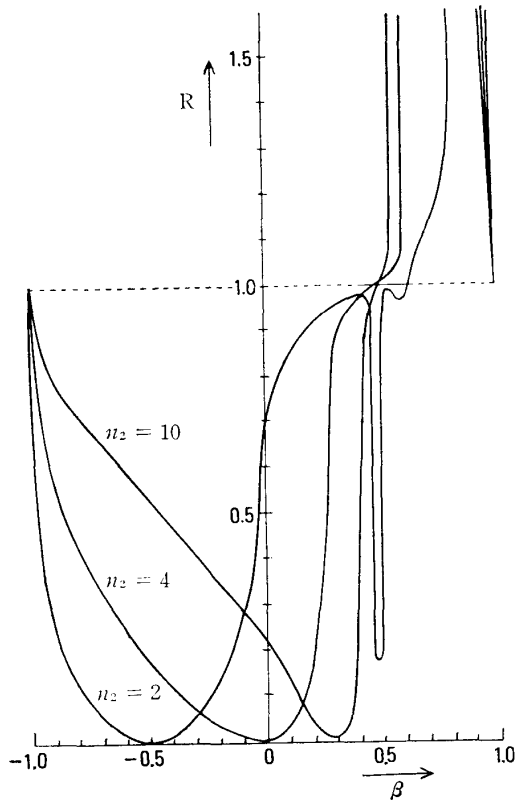


図 9. a 反射係数 ($n_1=4, m=0.5, \theta=30^\circ$)
 Fig. 9. a Reflection coefficient ($n_1=4, m=0.5, \theta=30^\circ$)

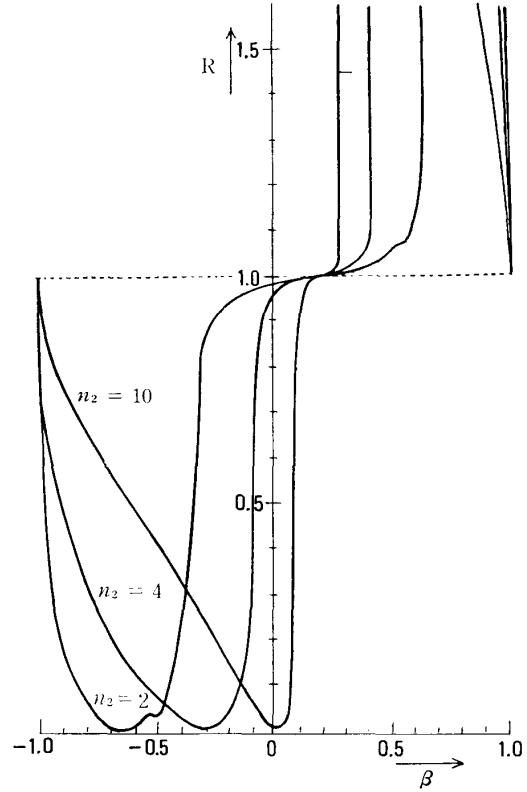


図 9. b 反射係数 ($n_1=10, m=0.5, \theta=30^\circ$)
 Fig. 9. b Reflection coefficient ($n_1=10, m=0.5, \theta=30^\circ$)

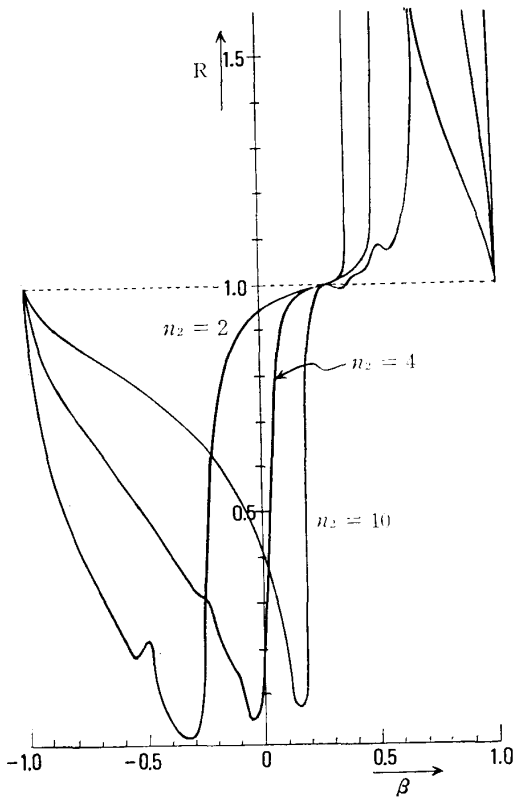


図 9. c 反射係数 ($n_1=4, m=0.5, \theta=60^\circ$)
 Fig. 9. c Reflection coefficient ($n_1=4, m=0.5, \theta=60^\circ$)

の領域で $R > 1$ となることが示されている。

図 9. a~c は、媒質の速度と横軸にとった場合の反射係数の数値計算例である。

5. 検 討

本節では因果律とローレンツ変換との関係について詳しく検討しあわせて文献 (1), (2) における理論の不十分な点、および誤った結論に至った理由を明らかにする。

図 10. a は入射波 W_i が Z の正の方向に速度 v で運動している導電性媒質に入射した場合を観測者の系 (K 系) においてみたときの構成図である。図 10. b は同じ問題を導電性媒質に固定された系 (K' 系) でみたときの構成図である。以下プライムを付した量は K' 系で測定される量であるとする。従来は図 10. a の問題を解析することと図 10. b の問題を解析することとは互いに同等な

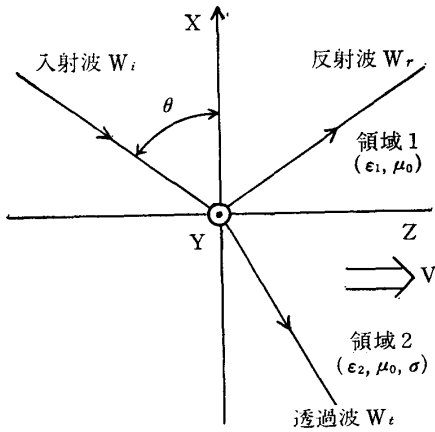


図 10. a K系における反射と透過

Fig. 10. a Reflection and Transmission at K-frame.

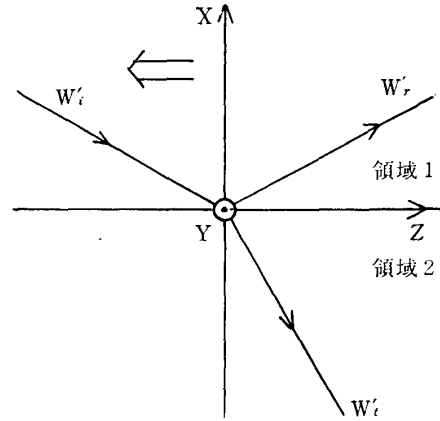


図 10. b K'系における反射と透過

Fig. 10. b Reflection and Transmission at K'-frame.

ものとして取り扱われている^{2),6)}. すなわち, K系のいずれか一方で解析すれば他方は相対的な問題として電磁界と伝搬ベクトルに対するローレンツ変換により導びかれるものとしている. しかしながら媒質の速度がある一定の速度を越えると上の2つの問題は伝搬ベクトルに関してはローレンツ変換によって同等にとりあつかうということができなくなる. このことを明らかにするために, 平面波を特徴づける緒量, すなわち位相速度 v_p , 光線速度 (素元波の先端の速度で群速度に一致する) u , およびポインティングベクトル \mathbf{S} のローレンツ変換式を求め, これらについて考察しよう. それらはつぎのように求められる.

$$v'_{px} = \left(1 - \frac{v}{v_{pz}}\right) v_{px} \tag{35 \cdot a}$$

$$v'_{pz} = \frac{1 - \frac{v}{v_{pz}}}{1 - \frac{v \cdot v_{pz}}{c^2}} v_{pz} \tag{35 \cdot b}$$

$$u'_x = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v u_z}{c^2}\right)} u_x \tag{36 \cdot a}$$

$$u'_z = \frac{1 - \frac{v}{u_z}}{1 - \frac{v n_z}{c^2}} u_z \tag{36 \cdot b}$$

$$S'_x = \gamma \left(1 - \frac{v}{v_{zp}}\right) S_x \tag{37 \cdot a}$$

$$S'_z = \gamma^2 \left(1 - \frac{v}{v_{pz}}\right) \left(1 - \frac{v}{u_z}\right) S_z \tag{37 \cdot b}$$

上式において下添字 x, z はそれぞれ x 成分, z 成分であることを示す. 表 2 は式 (35)~(37)

を $0 < v_{pz} < c$ ($0 < n_1 \sin \theta < 1$) の場合に入射波の緒量の各成分の符号の関係についてまとめたもので、表の+符号は K 系と K' 系の成分が同符号となることを示し、また-符号は成分の方向が逆になることを示す。表2において、 v が v_{pz} をこえたところで $v_{p,r}$ と $v'_{p,r}$ および $v_{p,z}$ と $v'_{p,z}$ の符号が変わることは、K 系でみたときと K' 系でみたときの入射波の位相面の進行方向が逆になることからす

表2 位相速度, 光線速度, およびポインティングベクトルの変換による符号の関係

	$0 < v < u_z$	$v = v_z$	$v_z < v < v_{pz}$	$v = v_{pz}$	$v_{pz} < v < c$
$v_{p,x} v_{p,x}'$	+	+	+	0	-
$v_{p,z} v_{p,z}'$	+	+	+	0	-
$u_x u_x'$	+	+	+	+	+
$u_z u_z'$	+	0	-	-	-
$S_x S_x'$	+	+	+	0	-
$S_r S_r'$	+	0	-	0	+

ぐ納得される。また u_x と u'_x の符号の変らないことは、光線速度自体が粒子論的意味をもっているので、運動方向と垂直な成分は変換によって符号が変わらないことから了解され、また運動に平行な成分はその成分より大きい速度で運動する系からみれば逆転することは容易に理解される。またポインティングベクトル \mathbf{S} の成分の変換による符号の変化は、 $0 < v < v_{pz}$ の場合については光線速度と対応させて十分理解される。ところが問題なのは $v_{pz} < v < c$ の場合のポインティングベクトル \mathbf{S} の x 成分の解釈である。ここで文献 (1), (2) の S_x の解釈をあげるとつぎのようになる。

文献 (1) の場合：「透過波のエネルギー流は必ず境界面より遠ざかる方向に向う。」

文献 (2) の場合：「 S_x の符号は波源との関係を与えるのに決定的なものでなくローレンツ変換によって符号の不変な減衰項のみが意味を持ち、これによって透過波を決定すべきである。*」

文献 (2) の主張する仮定では、波源あるいは入射波がばくぜんと $x > 0$ ($x' > 0$) にあるとしており、入射波が波源によりどのように励振されているのか明確でない。そこで入射平面波の波源として考えられる2つのタイプをつぎにあげ、それぞれについて検討する、

1) 図 10・a の K 系において入射波の波面の進む方向の反対方向の十分遠方に点波源とみなしうる波源のある場合、

2) 2) にとりあげたような面波源が $x > 0$ の有限の位置にある場合、

ただしここでは K 系系においての入射波の定常状態を考えるために、K 系においては波源は運動していないものとする。

K 系において 1) と 2) のタイプの波源によって励振される入射波は領域 1 の媒質が完全誘電体であると、一見全く同じ位相をもった平面波として励振されることが可能におもえる。しかし、波源による放射波の伝搬ベクトルは微少の損失をもつものとして解析しなければ決定できず、また完全誘電体というものは理想的なものであって実際には媒質は有限の損失 σ をもつものと考えて解析し、完全誘電体は、 $\sigma \rightarrow 0$ ($\sigma \neq 0$) の極限を考えることにすればより一般的に

* 文献 (2) では下線部を因果律と呼んでいるが本文 2・2 の初めに定義した因果律と異なる

取り扱える。したがって、図 10・a の $x > 0$ に充された媒質は微少の損失をもつものと考えるとき、1) のタイプの波源によって励振される入射波 W_i の位相 F は x 方向、 z 方向の減衰をあらわす E の値の微少量 $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_z$ を用いてつぎのようにかける。

$$F = \omega t + (k_x - j\delta\sigma_x)x - (b_z - j\delta\sigma_z z) \quad (38)$$

このとき K' 系の周波数および伝搬ベクトルはつぎのようにかける。

$$\omega' = \gamma \{ \omega - v(k_z - i\delta\sigma_z) \} \quad (39 \cdot a)$$

$$k'_x = k_x - j\delta\sigma_x \quad (39 \cdot b)$$

$$k'_z = \gamma \left\{ (k_z - j\delta\sigma_z) - \frac{v}{c^2} \omega \right\} \quad (39 \cdot c)$$

式 (39・a) でわかるように、 K' 系では ω' が正の虚数部をもち時間的に減衰してゆく。したがって 1) のタイプの波源によって K 系に励振された波は、 K' 系では定常状態がなく K' 系で解析すること自体に意味がないことになる。つぎに 2) のタイプの場合は、媒質が損失をもつことを考慮しなければならないので、2. の結果を適用しなければならない。ところが変換式 (35)～(37) に導びかれる結果は、2. に導びかれた instability の存在するときの結果と一致しない。このことは、一方の系で求めた解が他方の系にローレンツ変換されないとか、あるいはこのような波動が一方の系では観測されないということの意味するものではない。instability が一方の系であるときローレンツ変換をうけた波は他方の系では時間の充分にたったあとでは消滅するというのである。また 2. で行ったように i)～iii) の速度領域に分けたとき、それらが問題解析を行なった系固有の定数で決まったことから instability はその系固有のものであることがわかる。(付録 B 参照)。以上より、運動媒質をとりあつかう場合に注意すべきつぎのような結論が導びかれる。

(1) 媒質の運動速度が波動の位相速度の運動方向成分をこえた場合、エネルギー流の方向あるいは減衰定数の符号からは定常状態の波動は決定できず、因果律を満足する定常解を選ばなければならない。また完全誘電体の場合も微少の損失を考慮するので同様である。

(2) 因果律は観測者の系に固有のものとし考慮すべきで媒質に instability のあるときは伝搬ベクトルに対するローレンツ変換を用いる解析は有効でない。

6. む す び

面波源に平行に運動する導電性媒質中に励振される放射波について解析し、instability の存在することや交流発電の可能性等の興味ある結論を得た。また上の結果を平面波解析の問題に適用し、ローレンツ変換と因果律との関係について重要な結論を導びいた。

なお、数値計算には本学、電子計算機センター HITAC—8400—65 を使用したことを附記して謝意を表す。

文 献

- 1) 藤岡, 小川: “導電性運動媒質中の増幅波の励振”, 信学論 (B), 54-B, 2, P. 53 (昭46-02)
- 2) 細野, 日向: “導電性運動媒質による反射現象と増幅波の励振についての問題点”, 信学論 (B), 55-B, 1, P. 16 (昭47-01)
- 3) 藤岡, 中川, 熊谷: “導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取り扱い”, 信学論 (B), 52-B, 3, P. 130 (昭44-03)
- 4) 藤岡, 熊谷: “導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”, 信学論 (B), 52-B, 8, P. 429 (昭44-08)
- 5) Besieris, I. M., and R. T. Compton, Jr: “Time-dependent Green's function for electromagnetic waves in moving, conductive media”, J. Math. Phys., 8 (12), p. 2445-2451 (1967).
- 6) Kalafus, R. M.: “Radiation from sources in a moving, conducting medium”, Radio Sci., 4, p. 977-982 (Oct. 1969).
- 7) Briggs, R. J.: “Electron-stream interaction with Plasmas”, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts (1964).

付 録

A. Instability の条件の導出

本文図2の積分路 C_1 を C_2 に変えたとき本文図3の k_x 平面の極が実軸を越える場合, すなわち instability の起こるときの条件は k_x の実数の値に対して分散関係式

$$\begin{aligned} \Delta(k_x, k_{z_0}, \omega) &= \omega^2 \varepsilon \mu_0 a - \frac{1}{a} (k_{z_0} + \omega \Omega)^2 \\ &\quad - k_x^2 - j\omega \mu_0 \sigma \gamma \left(1 - \frac{vk_{z_0}}{\omega}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

より決まる ω の虚数部が負の値をもつ条件より決定される⁷⁾. そこで ω を実数部虚数部にわけて

$$\omega = \omega_r + j\omega_j$$

とおき式 (A・1) に代入すればつぎの2式が得られる.

$$\begin{aligned} k_x^2 &= (\omega_r^2 - \omega_j^2) \varepsilon \mu_0 a - \frac{1}{a} k_{z_0}^2 \\ &\quad - \frac{2}{a} \omega_r \Omega k_{z_0} - \frac{1}{a} (\omega_r^2 - \omega_j^2) \Omega^2 \\ &\quad + \omega_j \mu_0 \sigma \gamma \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \omega_r \omega_j \varepsilon \mu_0 - \frac{2}{a} \omega_j \Omega k_{z_0} \\ &\quad - \frac{1}{a} \omega_r \omega_j \Omega^2 - \omega_r \mu_0 \sigma \gamma + \mu_0 \sigma \gamma v k_{z_0} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

上の2式より ω_j が負となる条件はつぎのように求められる.

$$\frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} vk_{z0} < \omega_r < vk_{z0} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

上の条件を満足するときには本文図5のような k_x の積分路が選ばれなければならない, このとき instability が存在する. なお式 (A・1) を満足する k_x, ω はたがいの複素平面において鞍部点をもたない.

B. 運動媒質中の電磁波の位相速度と光線速度の関係式

(A・1) の $\sigma=0$ とおいた完全誘電体媒質の分散関係式よりつぎの関係式が得られる.

$$u_x v_{px} = \frac{(1-\beta^2)c^2/n^2 - \beta^2}{1 - \frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} \frac{v}{v_{pz}}} \quad (\text{B} \cdot 1)$$

$$u_z v_{pz} = \frac{\frac{1}{v}(1+v_{pz}Q)}{c^2(1-\beta^2) \left(1 - \frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} \frac{v}{v_{pz}}\right)} \quad (\text{B} \cdot 2)$$

上式より媒質の運動速度 v が

$$\frac{n^2-1}{n^2-\beta^2} v < v_{pz} < v \quad (\text{B} \cdot 3)$$

を満足するときは位相速度と群速度 (光線速度) の同じ成分同志は同符号でなければならない. ところがローレンツ変換を用いる解析では波動を一对一に対応させる限りこのような解を選ぶことができない. なお式 (B・3) の関係は本文 2. の instability の領域と一致し, 本文において i)~iii) の3つの領域に分けたことがよく理解される.