

回転液体の自由表面 (Ⅲ)

計算の始めの値

大 亀 衛

昭和48年9月30日 受理

摘 要

同軸回転二円筒間にある液体の自由表面を表わす方程式から、計算の始めの値の変化に対応する自由表面の形の変化の様子が求められた。

§ 1 ま え が き

同軸回転二円筒間にある液体の自由表面を表わす方程式¹⁾はこの円筒間に実在し得るすべての自由表面の形をその解の中にもっていると思われる。ここでは、計算の始めの値を変化させて、それに対応する自由表面の形の変化を調べる。

§ 2 自由表面を表わす方程式と計算の始めの値

角速度の等しい同軸二円筒間にある自由表面を表わす方程式とその計算の始めの値は円筒の底面に原点をもち円筒軸上で上向きに z 軸をとった円筒座標 r, θ, z を用いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds_f^*}{dr^*} &= \tan \psi_f, \\ \frac{d\psi_f}{dr^*} &= \frac{s_f^* - \frac{1}{2} (\Omega^*)^2 (r^*)^2 + \frac{1}{4} (\Omega^*)^2 \{ (R_2^*)^2 + (R_1^*)^2 \} + E^* + (\sin \psi_f) / r^*}{\cos \psi_f}, \\ \int_{R_1^*}^{R_2^*} s_f^* r^* dr^* &= 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} r^* = R_c^* \quad \text{のとき} \quad s_f^* &= S_c^*, \\ r^* = R_c^* \quad \text{のとき} \quad \psi_f &= \psi_c, \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \frac{r}{L}, \quad R_1^* = \frac{R_1}{L}, \quad R_2^* = \frac{R_2}{L}, \quad R_c^* = \frac{R_c}{L}, \\ s_f^* &= \frac{s_f}{L}, \quad E^* = \frac{E}{L}, \quad \Omega^* = \sqrt{\frac{L}{g}} \Omega, \end{aligned} \right\} (3)$$

$$L = \sqrt{\frac{T}{g\rho}}, \quad s_f = z_f - h_f, \quad E = h_f - h_a, \quad R_c = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}} \quad (4)$$

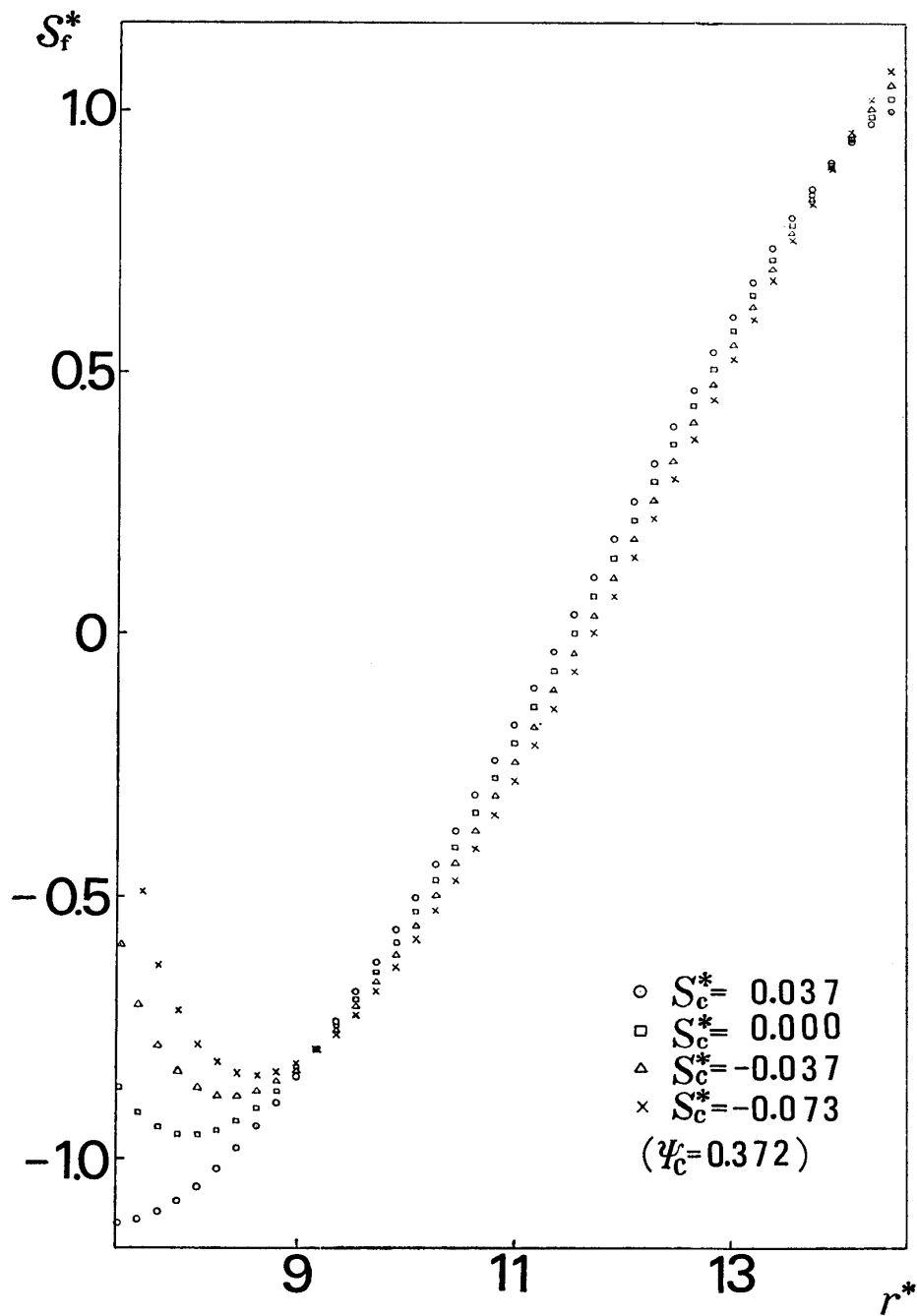


図1 : $R_1^* = 7.340, R_2^* = 14.606, \Omega^* = 0.1891, \Psi_c = 0.372, S_c^* = 0.037, 0.000, -0.037, -0.073$
 ($L = 0.274$ cm, $\sqrt{L/g} = 0.017$ sec.) のときの自由表面.

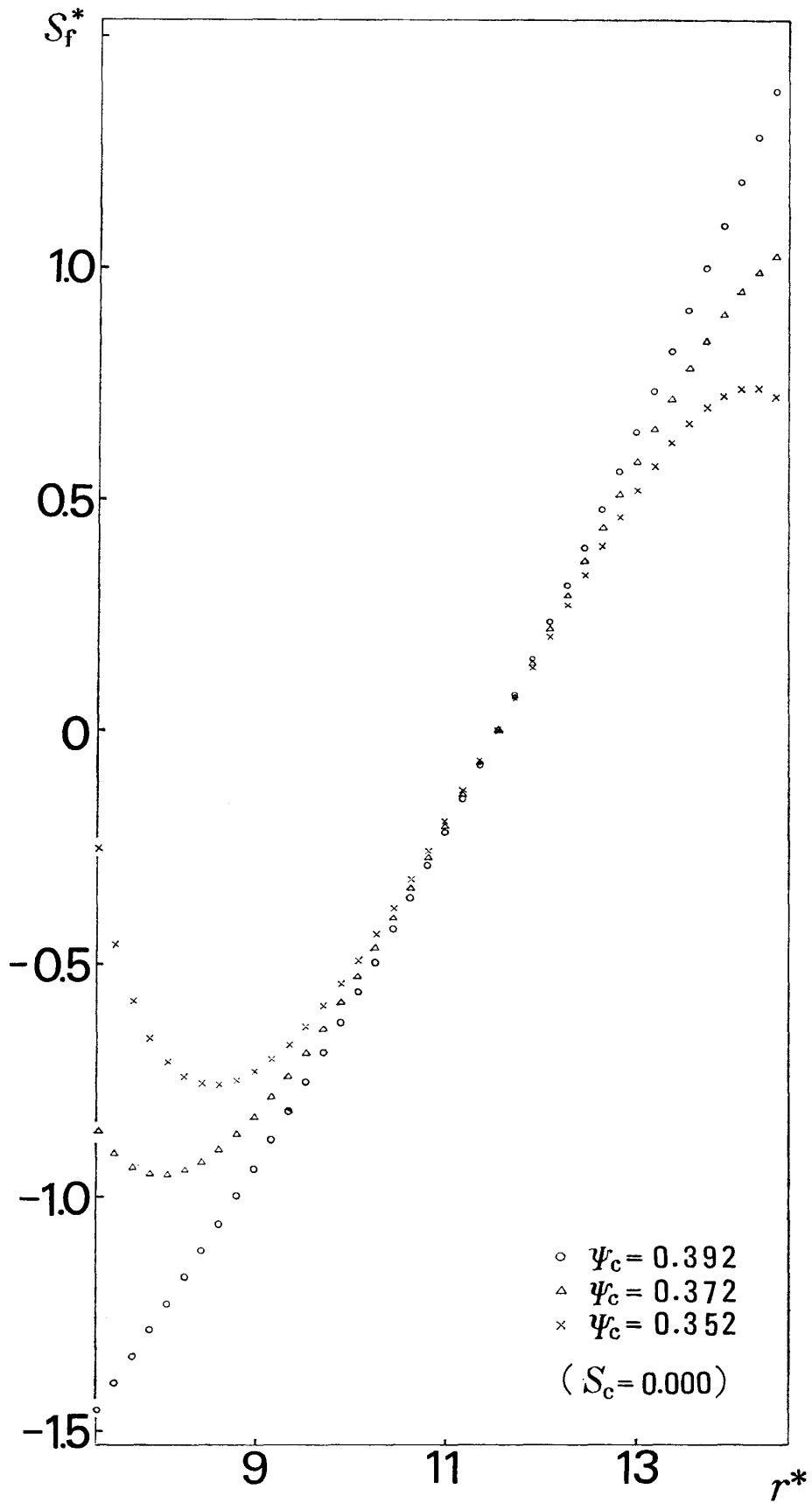


図2 : $R_1^* = 7.340$, $R_2^* = 14.606$, $\Omega^* = 0.1891$, $\Psi_c = 0.392, 0.372, 0.352$, $S_c^* = 0.000$
 ($L = 0.274\text{cm}$, $\sqrt{L/g} = 0.017\text{ sec.}$) のときの自由表面.

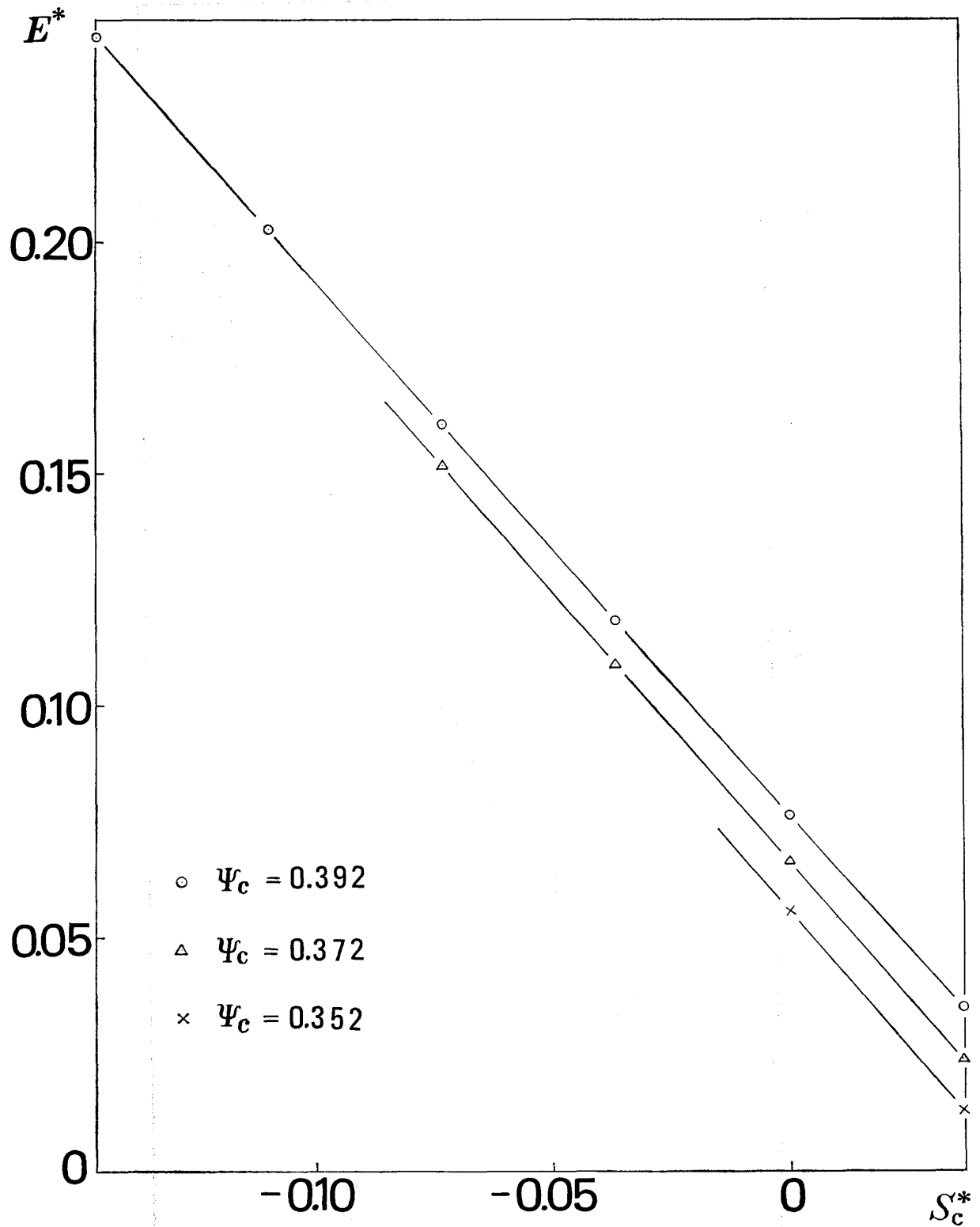


図 3 : $R_1^* = 7.340$, $R_2^* = 14.606$, $\Omega^* = 0.1891$, $\Psi_c = 0.392, 0.372, 0.352$ ($L = 0.274$ cm, $\sqrt{L/g} = 0.017$ sec.) のときの E^* と S_c^* の関係.

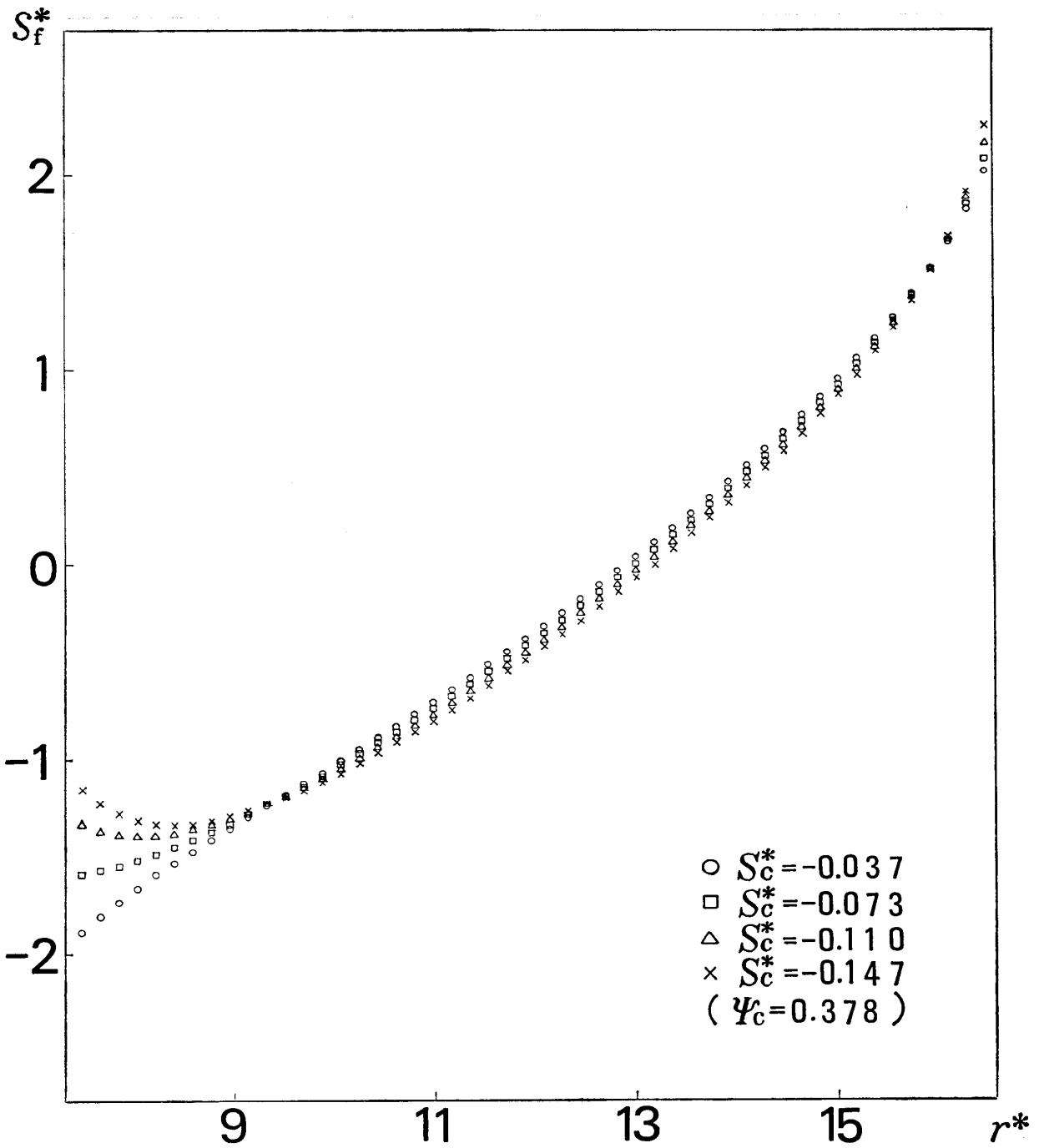


図4 : $R_1^* = 7.346$, $R_2^* = 16.558$, $\Omega^* = 0.175$, $\Psi_c = 0.378$, $S_c^* = -0.037, -0.073, -0.110, -0.147$ ($L = 0.273$ cm, $\sqrt{L/g} = 0.017$ sec.) のときの自由表面.

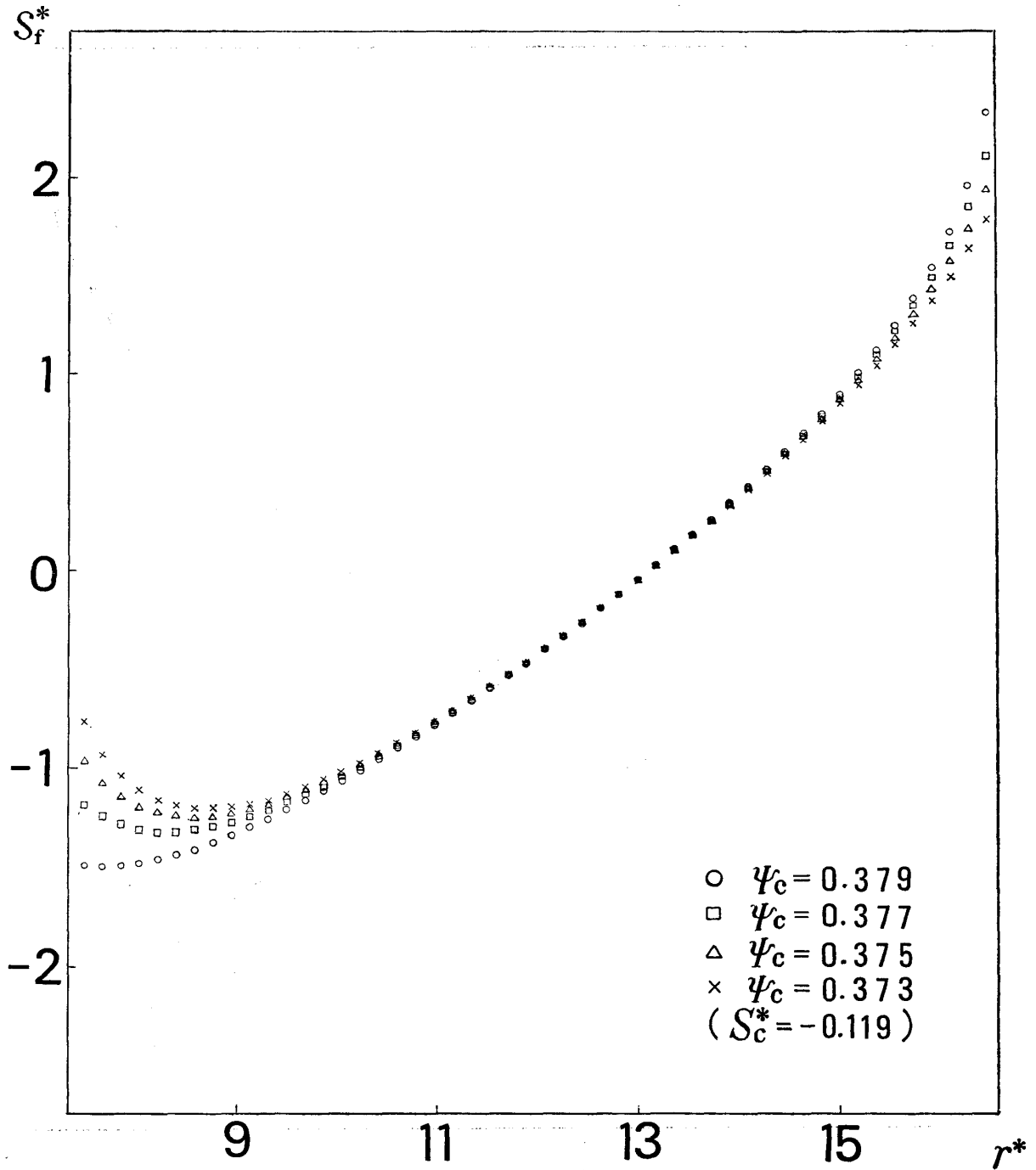


図5 : $R_1^* = 7.346$, $R_2^* = 16.558$, $\Omega^* = 0.175$, $\psi_c = 0.379, 0.377, 0.375, 0.373$, $S_c^* = -0.119$ ($L = 0.273\text{cm}$, $\sqrt{L/g} = 0.017\text{sec.}$) のときの自由表面.

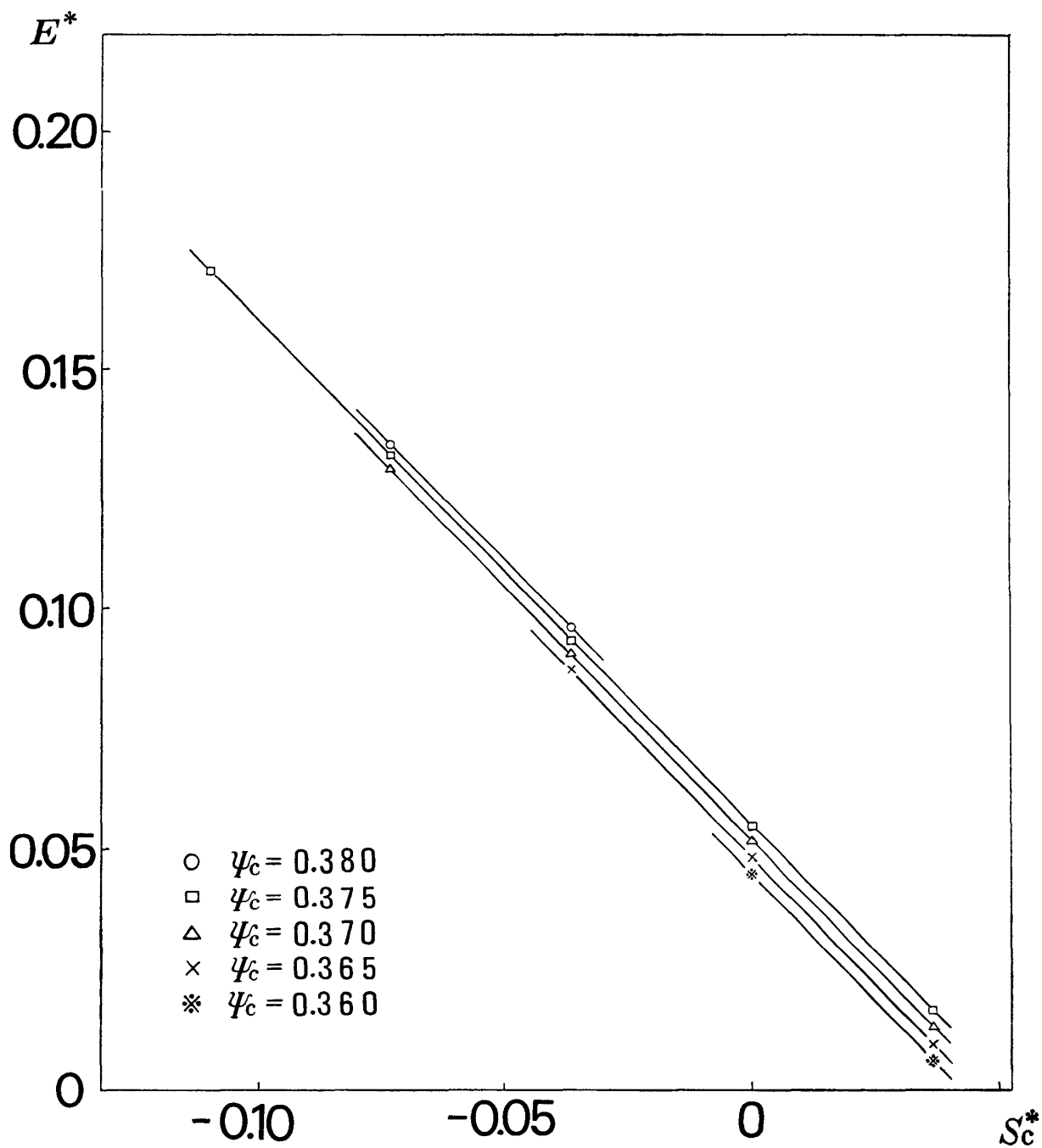


図6 : $R_1^*=7.346$, $R_2^*=16.558$, $\Omega^*=0.175$, $\Psi_c=0.380, 0.375, 0.370, 0.365, 0.360$ ($L=0.273$ cm, $\sqrt{L/g}=0.017$ sec.) のときの E^* と Sc^* の関係.

で表わされる。ここで、*は無次元化された量を表わし、 z_f は自由表面の z 座標であり、 ψ_f は z 軸を通る自由表面の接線が r 軸となす角度であり、 h_f は自由表面の平均の高さであり、 h_a は自由表面上の気圧に等しい液体の等圧力面の平均の高さであり、 Ω は円筒の角速度であり、 R_1 は内円筒の外半径であり、 R_2 は外円筒の内半径であり、 g は重力の加速度であり、 ρ は液体の密度であり、 T は表面張力である。従って、未知の函数 s_f^* 、 ψ_f と未知の定数 E^* が自由表面を表わす式 (1) から計算の始めの値 (2) を用いて求められる。

§ 3 計算の始めの値と自由表面の形

図1と図2と図3は $R_1^*=7.340$, $R_2^*=14.606$, $\Omega^*=0.1891$, ($L=0.274$ cm, $\sqrt{L/g}=0.017$ sec) の場合の計算結果である。図1は Ψ_c を 0.372 に保ち s_c^* に 0.037, 0.000, -0.037, -0.073 を与えて得られた自由表面の形を示し、図2は s_c^* を 0.000 に保ち Ψ_c に 0.392, 0.372, 0.352 を与えて得られた自由表面の形を示し、図3は Ψ_c が 0.392, 0.372, 0.352 における E^* と s_c^* との関係を示す。図4と図5と図6は $R_1^*=7.346$, $R_2^*=16.558$, $\Omega^*=0.175$, ($L=0.273$ cm, $\sqrt{L/g}=0.017$ sec) の場合の計算結果である。更に、内外円筒の角速度は異っているが、流れの不安定性による二次的な流れは現われず、底面部分から生ずる二次的な流れの自由表面の形へ及ぼす影響も無視されるときに、同様の計算をして求めた結果は上記の図と類似のものであった。

§ 4 む す び

- (a) 自由表面を表わす方程式の解は計算の始めの値のかぎられた範囲に対してのみ存在する。
- (b) 自由表面の形は計算の始めの値をわずかに変化させても大きく変動する。
- (c) Ψ_c の一定の値に対して E^* と s_c^* は比例し、種々の Ψ_c に対応するこれらの直線の勾配はほとんど等しい。

文 献

- 1) 大亀衛：岡山理科大学紀要 第8号 (1972) 117.

The Free Surface of Rotating Viscous Liquid.

III. The Initial Values of Calculation

M. OHKAME

(Department of Applied Physics, Okayama College of science, Okayama, Japan)

How the shapes of the free surfaces vary according to the change of the initial values of calculation has been ascertained by using the equations representing the free surface of rotating fluid between two concentric cylinders.