

回転液体の自由表面 (Ⅱ)

円筒底面による二次流の影響

大 亀 衛

The Free Surface of a Rotating Viscous Liquid.

II. The Effect of the Secondary Flow Caused by the Bottom of Cylinders

M. OHKAME

摘 要

回転している共軸二円筒間にある液体の自由表面の形は、液深がかなり大きくなっても、二円筒の底面部分による二次流の影響を受けている。

§ 1 ま え が き

回転している共軸二円筒間にある自由表面の形を計算して求めるとき、円筒底面部分による二次流の影響を考慮しなければならない¹⁾。液深が小さい場合には、その二次流の影響は顕著であるが、液深が増大すると急激に減少し、液深がかなり大きくなると無視できるようにも思われる²⁾。ここでは、液深がかなり大きい場合を扱う。先ず、底面部分による二次流が自由表面まで達しているかどうかを調べる。次に、二次流を考えていない基礎式から求めた自由表面の形と実測して求めた形とを比較することによって、底面部分による二次流が自由表面の形に影響を及ぼしているかどうかを調べる。

§ 2 二円筒間の渦模様

内円筒の外半径 R_1 が 2.035 cm, 外円筒の内半径 R_2 が 4.035 cm, 内円筒の角速度 Ω_1 が 26.3 1/sec, 外円筒の角速度 Ω_2 が 20.0 1/sec, 液深 (水深) h_f が約 28 cm, 室温 t が 13.2°C のとき、底面部分からの二次流によって現われた渦模様を図 1 に示す。ここで、色素はフルオレセインを使用した。また、我々の研究室の重力の加速度 g は 979.71 cm/sec² であった。この渦は、二円筒の角速度と半径からして、G. I. Taylor の渦とは異質のものと思われる³⁾。渦は円筒の下部から上部へと現われてゆき、しかも、下部の渦ほど鮮明である。写真は、かなり大きい液深の場合でも、底面部分による二次流が自由表面に達していることを示す。

§ 3 自由表面上の二次流

図 2 は、 $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega_1=33.9$ 1/sec, $\Omega_2=11.3$ 1/sec, $h_f \doteq 30$ cm, $t = 29.6^\circ\text{C}$ で、ストロボの発光振動数 ν が 219.9 1/sec のときの、二円筒間の水面に浮んでいる円形紙を、上方からとったストロボ写真である。円形紙が一回転する間に、半径方向へも移動している。写真は、底面部分による二次流が、かなりの液深の場合の自由表面上にも、現われてい

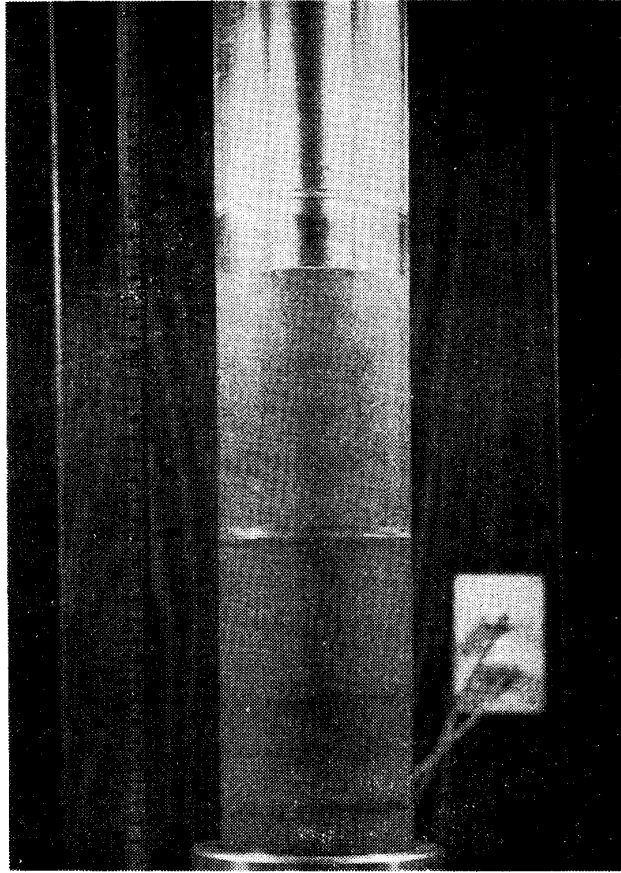


図1 : $R_1=2.035$ cm, $R_2=4.035$ cm, $\Omega_1=26.3$ 1/sec, $\Omega_2=20.0$ 1/sec, $h_1=28$ cm, $g=979.71$ cm/sec²,
 $t=13.2^\circ\text{C}$ のとき, 二円筒間の水中に現われたフルオレセインによる渦模様.

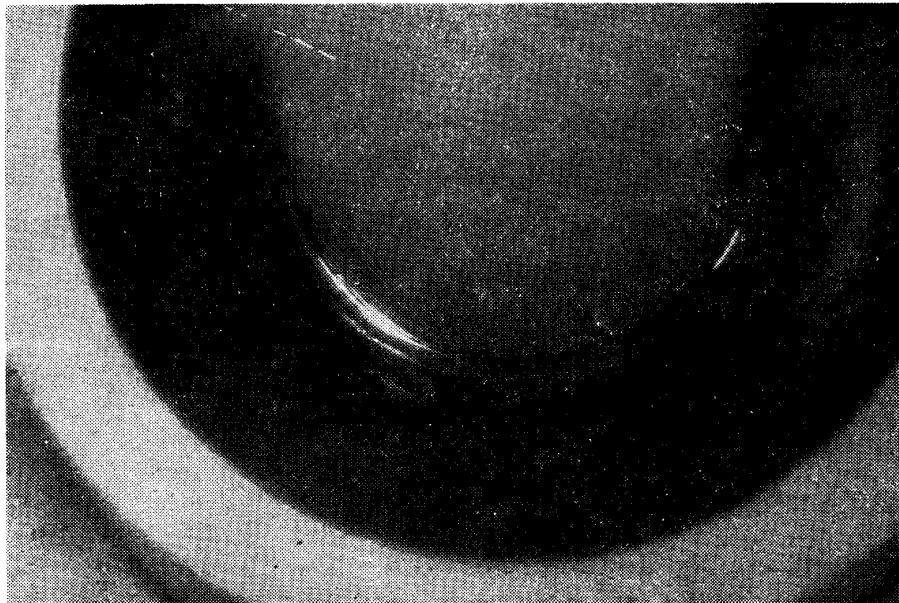


図2 : $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega_1=33.9$ 1/sec, $\Omega_2=11.3$ 1/sec, $h_1=30$ cm, $g=979.71$ cm/sec²,
 $t=29.6^\circ\text{C}$ のとき, 二円筒間の水面上に現われた二次流 ($\nu=219.9$ 1/sec).

ることを示す.

§ 4 自由表面の形

円筒底面の中心に原点をとり, 円筒軸上向きに z 軸をもつ円筒座標 r, θ, z を使用する. 更に, 自由表面上の z 座標を s_f で表わし, $z_1 - h_f$ を s_f で表わし, 円筒軸を含む面内における自由表面の接線が r 軸となす角を ψ_f で表わし, 自由表面上の気圧に等しい圧力をもっている液体の等圧力面の平均の高さを h_a で表わし, $h_f - h_a$ を E で表わし, 液体の密度を ρ で表わし, 表面張力を T で表わす. ここで, 長さの元をもっている $L = \sqrt{T/\rho g}$ と, 時間の元をもっている $\sqrt{L/g}$ を用いて無次元化した量に * を付して表わすと, 二次流を考慮していない自由表面の形を表わす基礎式は

$$\frac{ds_f^*}{dr^*} = \tan \psi_f, \tag{1}$$

$$\frac{d\psi_f}{dr^*} = \frac{F(r^*, s_f^*) - (\sin \psi_f)/r^*}{\cos \psi_f}, \tag{2}$$

$$F(r^*, s_f^*) = s_f^* - \frac{(A^*)^2}{2} (r^*)^2 - 2A^*B^* \ln r^* + \frac{(B^*)^2}{2} \frac{1}{(r^*)^2}$$

$$- \frac{4(B^*)^2(\ln R_2^* - \ln R_1^*) - 4A^*B^* \{(R_2^*)^2(2\ln R_2^* - 1) - (R_1^*)^2(2\ln R_1^* - 1)\}}{4\{(R_2^*)^2 - (R_1^*)^2\}}$$

$$- \frac{(A^*)^2\{(R_2^*)^4 - (R_1^*)^4\}}{4} + E^*$$

となり, この式に現われる未知定数 E^* を決める式は

$$\int_{R_1^*}^{R_2^*} s_f^* r^* dr^* = 0 \tag{3}$$

となる. 計算の始めの値として,

$$r^* = R_c^* \quad \text{で} \quad s_f^* = S_c^*, \quad \psi_f = \psi_c,$$

$$\frac{(B^*)^2}{4} \frac{1}{(R_c^*)^2} - \frac{(A^*)^2}{4} (R_c^*)^2 - A^*B^* \ln R_c^*$$

$$- \frac{4(B^*)^2(\ln R_2^* - \ln R_1^*) - 4A^*B^* \{(R_2^*)^2(2\ln R_2^* - 1) - (R_1^*)^2(2\ln R_1^* - 1)\}}{8\{(R_2^*)^2 - (R_1^*)^2\}} \tag{4}$$

$$- \frac{(A^*)^2\{(R_2^*)^4 - (R_1^*)^4\}}{4}$$

を使用する¹⁾. ここで,

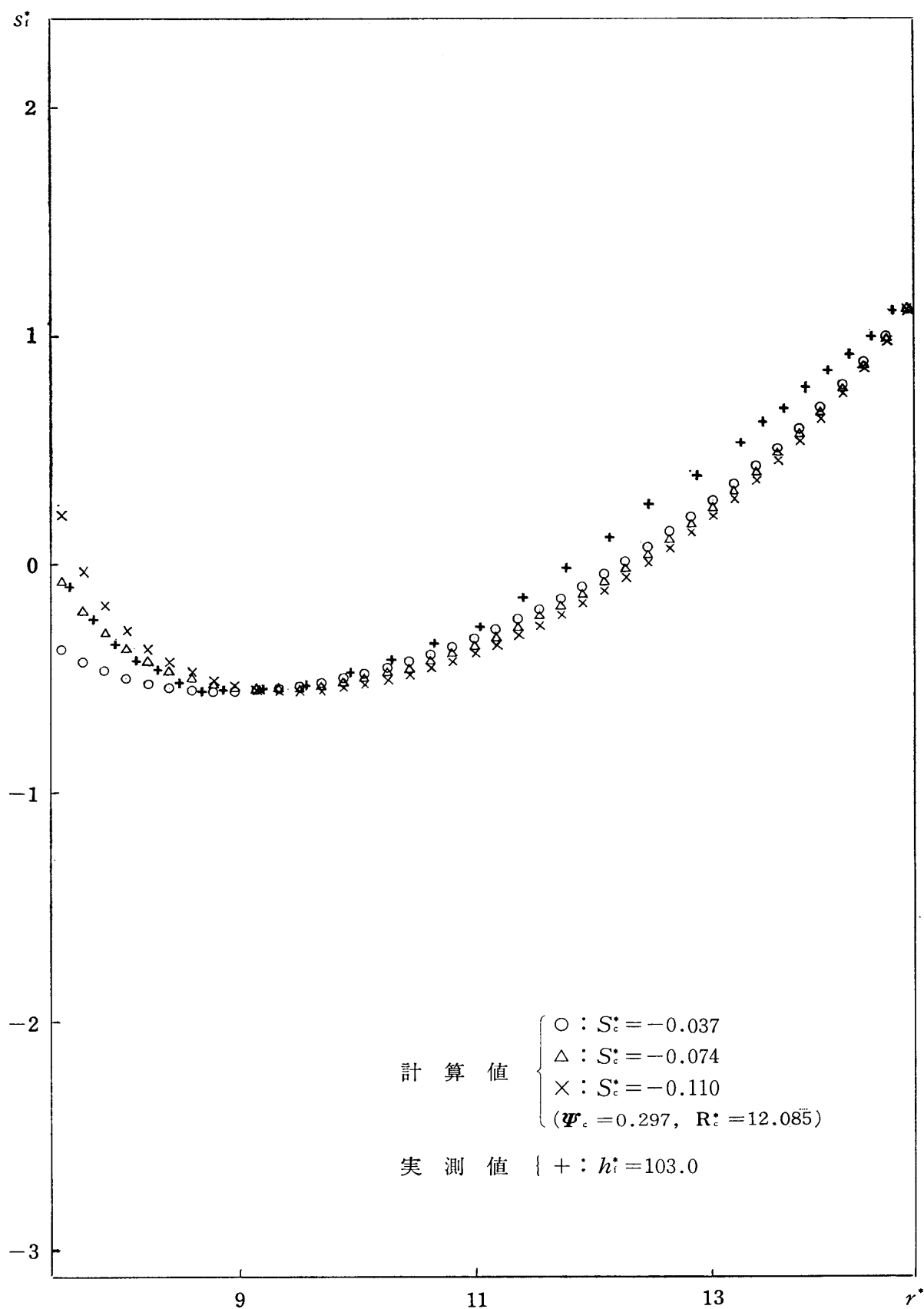


図3 : $R_1^* = 7.391$, $R_2^* = 14.708$, $\Omega_1^* = 0$, $\Omega_2^* = 0.188$, $L = 0.272$ cm の場合の, 計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較.

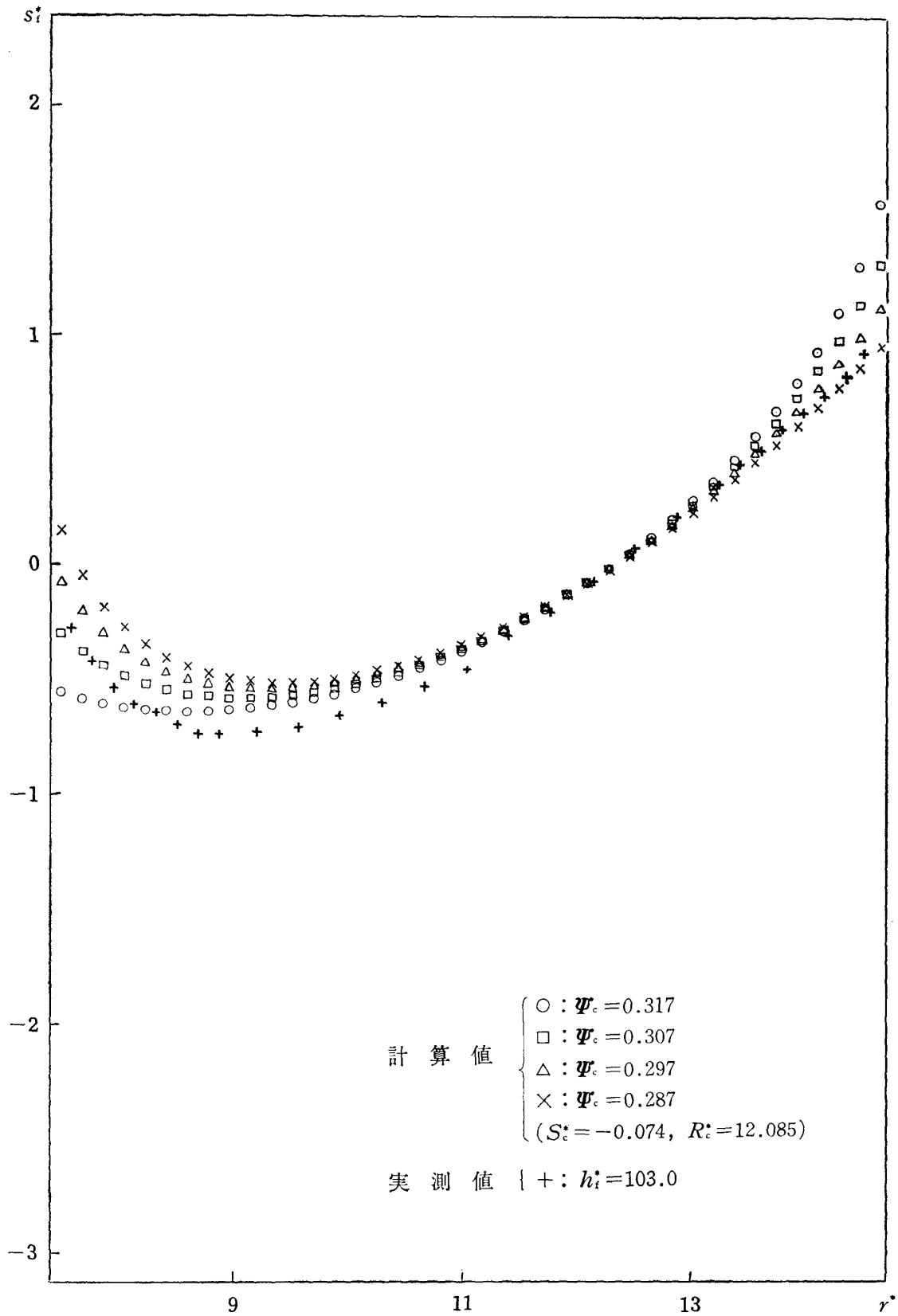


図4 : $R_1^* = 7.391, R_2^* = 14.708, \Omega_1^* = 0, \Omega_2^* = 0.188, L = 0.272 \text{ cm}$ の場合の、計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較。

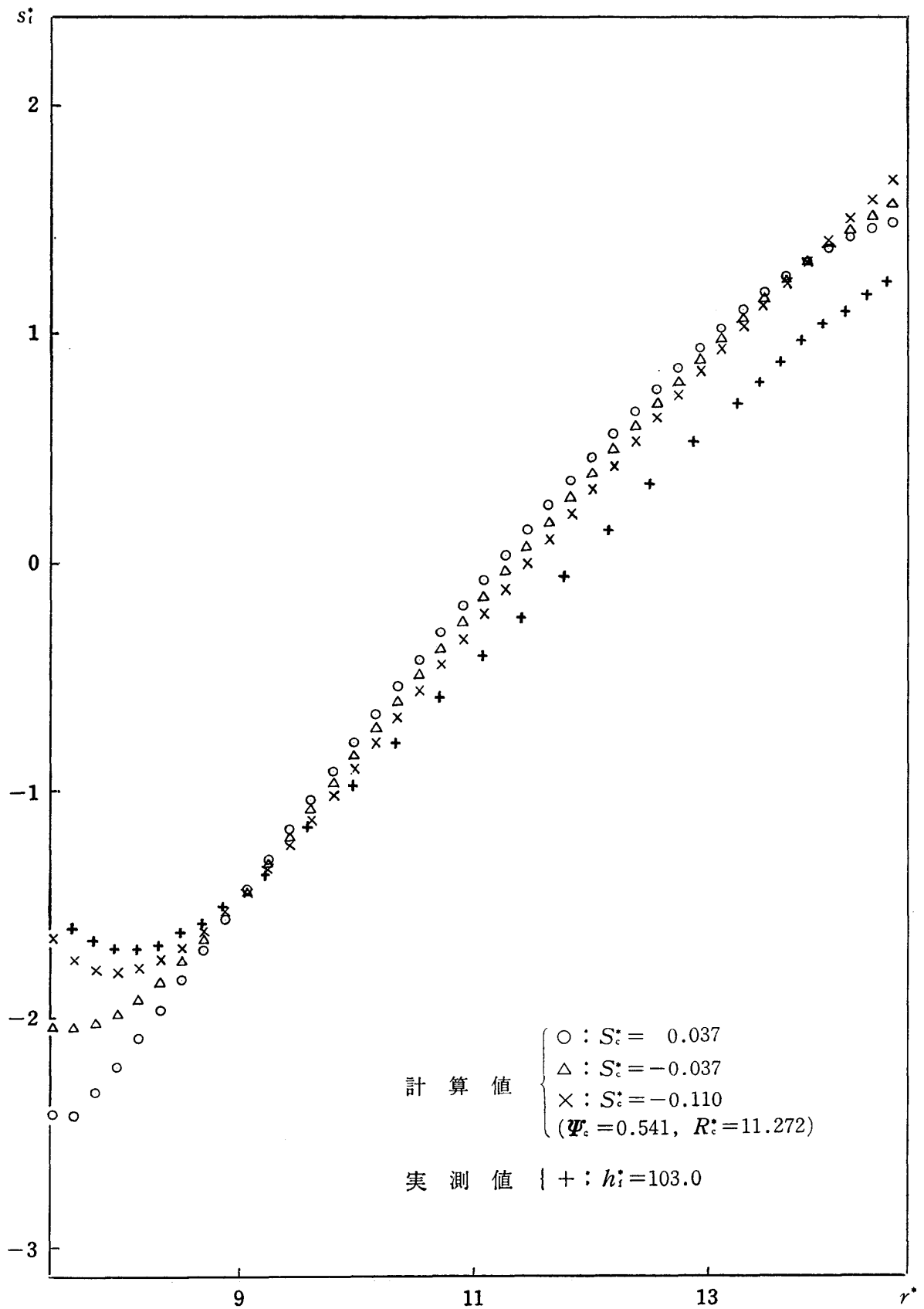


図 5 : $R_1^* = 7.391, R_2^* = 14.708, \Omega_1^* = 0.377, \Omega_2^* = 0.188, L = 0.272$ cm の場合の、計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較.

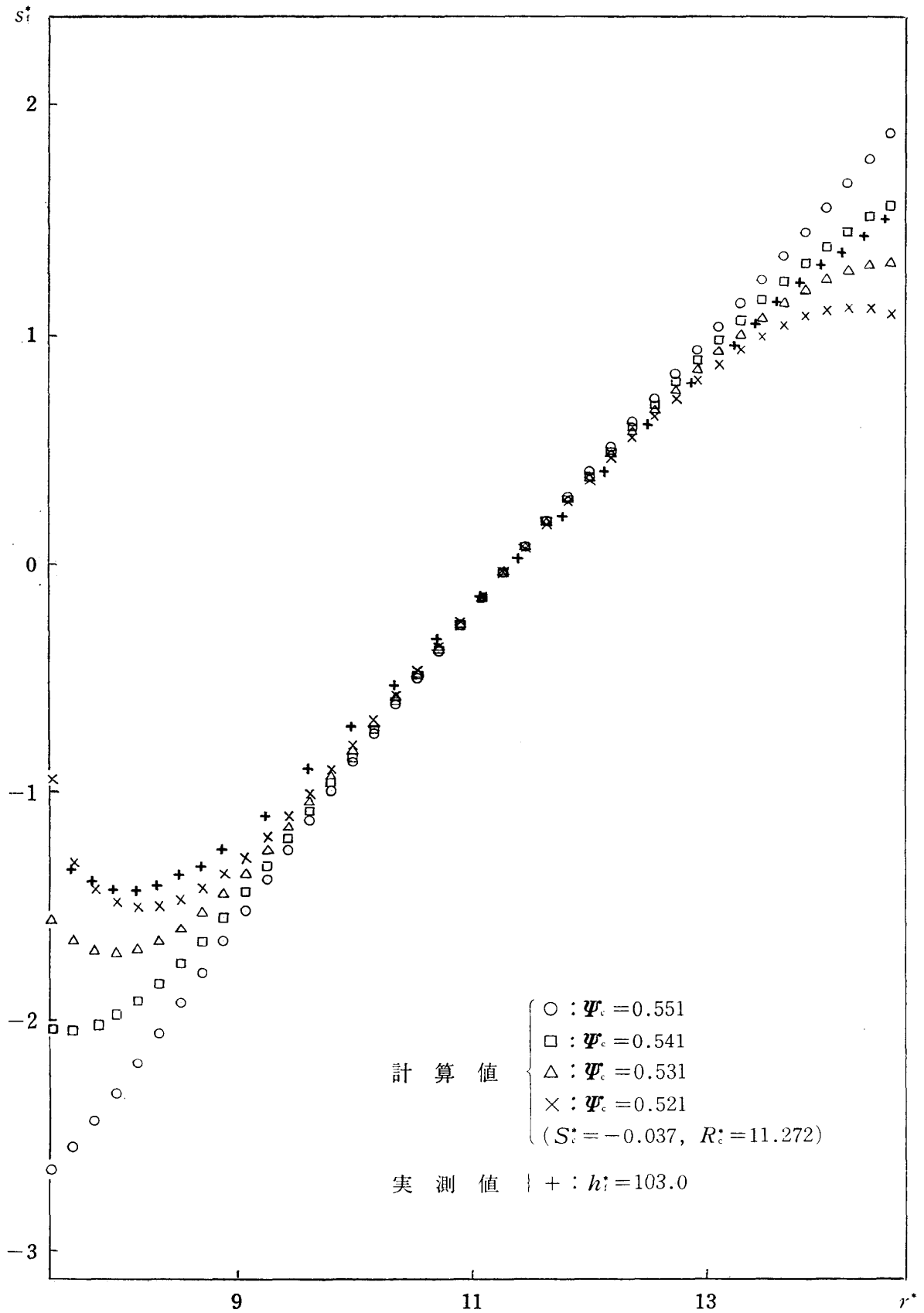


図 6 : $R_1^* = 7.391, R_2^* = 14.708, \Omega_1^* = 0.377, \Omega_2^* = 0.188, L = 0.272$ cm の場合の, 計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較.

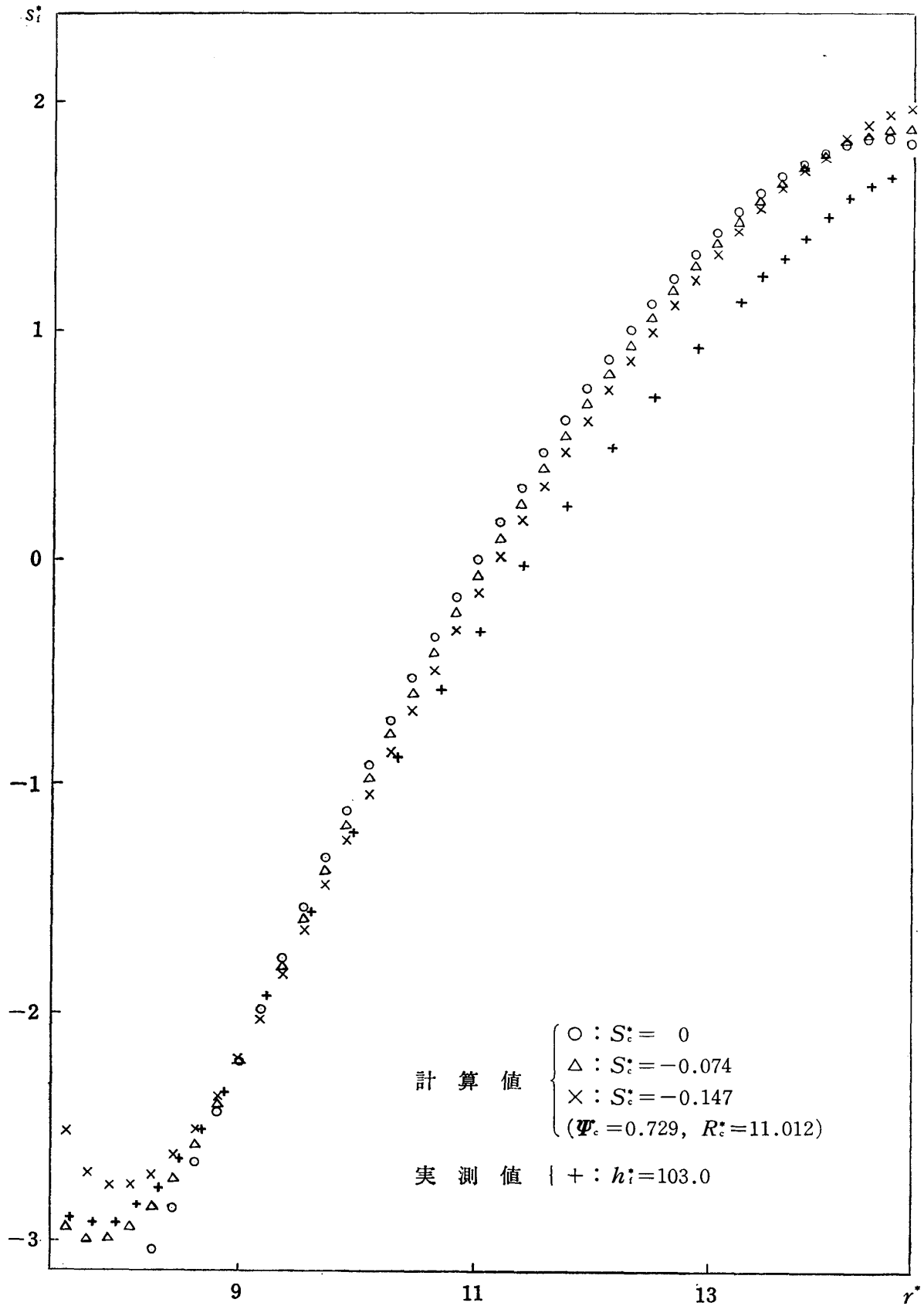


図7 : $R_1^* = 7.391, R_2^* = 14.708, \Omega_1^* = 0.565, \Omega_2^* = 0.188, L = 0.272 \text{ cm}$ の場合の, 計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較.

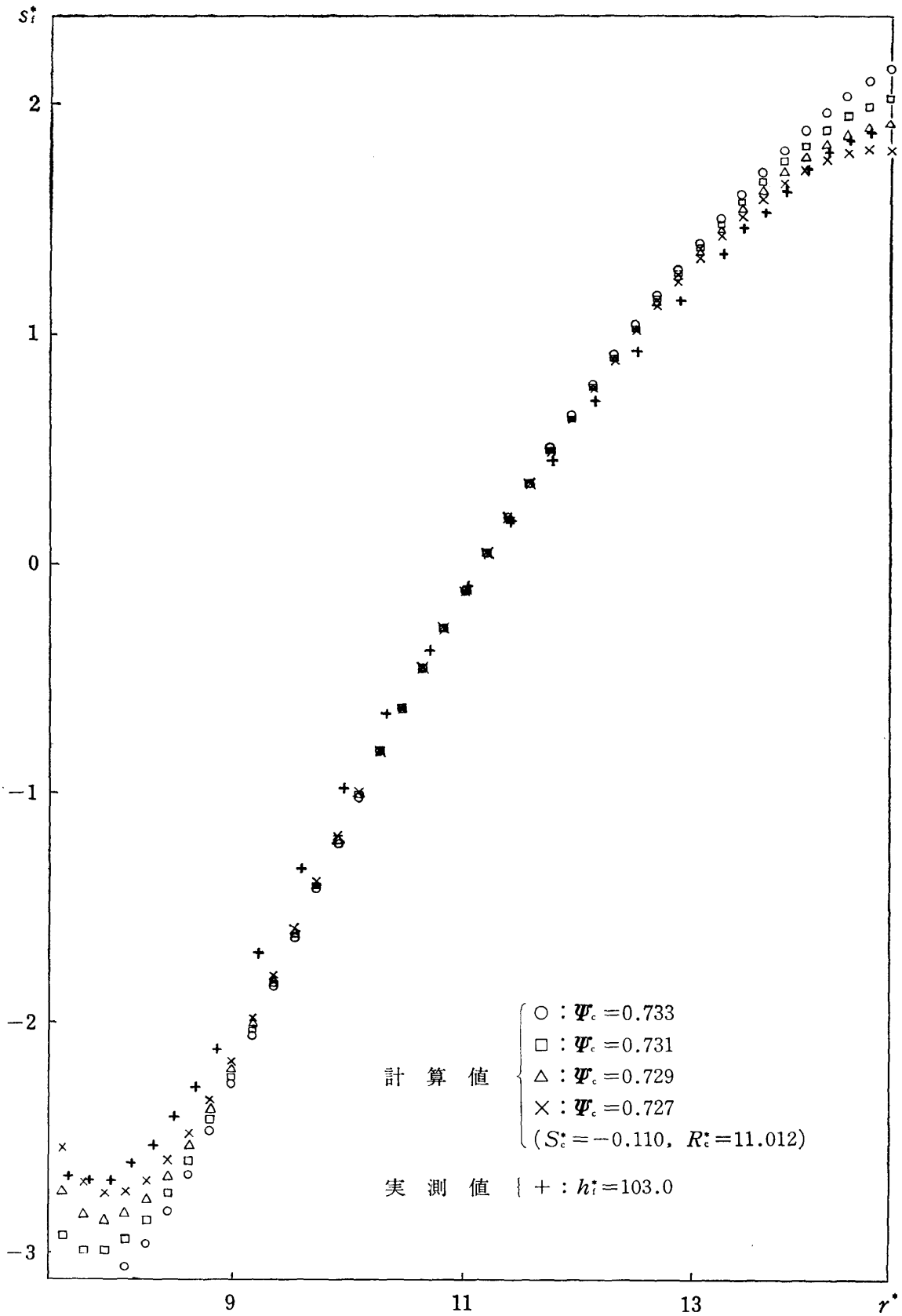


図8 : $R_1^* = 7.391, R_2^* = 14.708, \Omega_1^* = 0.565, \Omega_2^* = 0.188, L = 0.272$ cm の場合の, 計算で求めた自由表面の形と実測した自由表面の形との比較.

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{\Omega_2^* (R_2^*)^2 - \Omega_1^* (R_1^*)^2}{(R_2^*)^2 - (R_1^*)^2}, \\
 B^* &= \frac{(\Omega_1^* - \Omega_2^*) (R_1^*)^2 (R_2^*)^2}{(R_2^*)^2 - (R_1^*)^2}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

である。我々は、計算の始めの値 Re^* , Ψ_c , Sc^* のうちの Ψ_c と Sc^* に種々の値を与えてこれらの式から計算して求めた自由表面の形と、実測して求めた $h_f^* = 103.0$ の場合の自由表面の形とを比較した。図3, 図4, 図5, 図6, 図7, 図8はその一部である。図の実測された値は、比較を容易にするために、上方または下方へ移動させている。 Ψ_c や Sc^* に実測値やそれに近い値を用いて計算しても、実測された自由表面の形にはならない。このずれの様子は、表面張力の影響を無視して計算した自由表面の形との比較で得られた傾向と同じである^{1,2)}。このことは、液深がかなり大きくなっても、底面による二次流の影響が自由表面の形に現われていることを示す。

§ 5 む す び

液深がかなり大きい場合でも、回転二円筒間の自由表面の形は底面部分による二次流の影響を受けている。

文 献

- 1) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第3号 (1967) 15.
- 2) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第4号 (1968) 23.
- 3) G. I. Taylor : Phil. Trans A223 (1923) 289.