On Poincaré duality theorem of infinite cyclic covering.

玉　村　章　枝

§0 序　論

Infinite cyclic covering の Poincaré duality theorem については，Combinatorial manifold の場合を 1968 年に Milnor [1] が解いている．この論文は Topological manifold の場合について考えたもので，結果は次のようになる．

定　理

M を compact connected topological n-manifold without boundary とし，$\widetilde{M}$ を M 上の orientable infinite cyclic covering とする．係数としては体 F を考える．その時，もし $H_*(\widetilde{M} : F)$ が F 上で有限生成になるならば，

$$H^{n-1}(\widetilde{M} : F) \cong F$$

$$H^i(\widetilde{M} : F) \cong H_{n-1-i}(\widetilde{M} : F).$$

さらに cup product oparation によって

$$H^i(\widetilde{M} : F) \otimes H^{n-1-i}(\widetilde{M}) \longrightarrow H^{n-1}(\widetilde{M} : F) \cong F$$

が成り立つ．

$\partial M \neq \phi$ のときも同様に次のような定理が成り立つ．

定　理

M を boundary のある compact topological n-manifold. $\widetilde{M}$ を M 上の orientable infinite cyclic covering とする．もし，$H_*(\widetilde{M})$ が係数体 F 上で有限生成になるならば，cup product operation によって

$$H^i(\widetilde{M} : F) \otimes H^{n-1-i}(\widetilde{M},\ \partial\widetilde{M} : F) \longrightarrow H^{n-1}(\widetilde{M}, \partial\widetilde{M} : F) \cong F.$$

が成り立つ．

証明の概要

まずはじめに，kirby の一連の論文 [3] [4] [5] [6] から「every compact topological manifold M は finite complex K の homotopy type をもつ」ことが分っているので，topological manifold 上の問題を finite complex 上の問題にひき戻す．

次に，$\widetilde{M}$ を M の infinite cyclic covering，$\widetilde{K}$ を K 上の infinite cyclic covering としたと

き，M と K の homotopy equivarent が $\widetilde{M}$ と $\widetilde{K}$ に対しても成り立つことを示す．

homotopy equivarient ならば homology group が等しいからあとは「finite complex K 上の infinite cyclic covering $\widetilde{K}$ が poincaré duality theorem を満たしている」ことを示せば証明は終る．この証明の中で有効な働きをしている "ends" については節を別にして述べた．

§1. $\widetilde{M}\simeq\widetilde{K}$ の証明

命　題　1

任意の compact topological manifold M^m は finite complex の homotopy type をもつ．

証　明

まず，$\partial M=\phi$ のときを考える．M を，normal R^{s-m} bundle ν をもつように R^S の中に imbed する（Milnor [8]）．total space $E(\nu)$ は R^S の中で open set として三角形分割される．今，$S(\nu)$ を sphere bundle とすると．$S(\nu)\times R=E(\nu)-M$ は $E(\nu)$ の中の open set として三角形分割される．R. C. Kirby[4] 系 7.2 より $S(\nu)$ が PL submanifold になるように，$E(\nu)$ 上の PL strucure を変えることができる．その時 disk bundle $D(\nu)$ は PL であり，finite complex である．しかも $D(\nu)$ は M の homotopy type をもつから求める結果が得られた．

次に，$\partial M\neq\phi$ のときを考える．M の double 2M を imbed したときの normal R^{S-m}-bundle を ν_2 とする．先程の 7.2 を使うと，$S(\nu_2|M)\cup D(\nu_2|\partial M)$ を PL submanifold になるように変形できる．その時，三角形分割される finite complex $D(\nu_2(M))$ が得られ，それは M の homotopy type をもっている．

命　題　2

M を compact connected topological manifold. $\widetilde{M}$ を M の oriented infinite cyclic covering manifold, K を命題 1 で作った M と homotopy type の等しい finite complex とする．さらに $\widetilde{K}$ を K の oriented infinite cyclic covering manifold とすると，$\widetilde{M}$ と $\widetilde{K}$ とは同じ homotopy type をもつ．

証　明

K は命題 1 で作られた M と同一の homotopy type をもつ finite complex だから，map f; $K\to M$, g; $M\to K$ に対して，$gf\simeq id$, $fg=id$ となっている．今 $\widetilde{K}$ を，$\widetilde{M}$ を f で induce した infinite cyclic covering として作ると，$\widetilde{K}=\{(k,s)\ |\pi(s)=f(k),\ k\in K,\ s\in\widetilde{M},\ \pi:\widetilde{M}\longrightarrow M\}$.

次に写像 $\widetilde{f}$; $\widetilde{K}\longrightarrow\widetilde{M}$, $\widetilde{g}$; $\widetilde{M}\longrightarrow\widetilde{K}$ を $\widetilde{f}(k,s)=s$, $\widetilde{g}(s)=(g\cdot\pi(s),s)$ と定義すると，$\widetilde{f}\ \widetilde{g}\ (s)=\widetilde{f}(g\cdot\pi(s),s)=s$ となり，$\widetilde{f}\ \widetilde{g}=id_{\widetilde{M}}$．さらに $\widetilde{g}\ \widetilde{f}(k,s)=\widetilde{g}(s)=(g\cdot\pi(s),\ s)=(gf(k),\ s)\simeq(k,\ s)$ となり，$\widetilde{g}\ \widetilde{f}\simeq id_{\widetilde{K}}$．従って $\widetilde{M}$ と $\widetilde{K}$ とは homotopy equivarent である．

§2. Ends

この節では，finite complex の任意の infinite cyclic covering が 2 つの ends をもつことを示す．(cf. Epstein [2])

定　義

locally compact space Y の end ε とは，各 compact subset $K \subset Y$ に対する補集合 $Y-K$ の1つの成分 $\varepsilon(K)$ を対応させる函数で，$K \subset L$ のときはいつでも $\varepsilon(K) \supset \varepsilon(L)$ となる．

locally finite simplicial complex K の ends の数 $e(K)$ とは K の finite subcomplex L が K を動いたとき残された infinite components の数 $n(L)$ の上限である．

今 $C_f^*(K)$ を finite cochains, $C^*(K)$ を infinite cochains とすると，exact sequence : $0 \longrightarrow C_f^*(K) \longrightarrow C^*(K) \longrightarrow C_e^*(K) \longrightarrow 0$ が得られる．自然な方法で，homology exact sequence : $0 \longrightarrow H_f^0(K) \longrightarrow H^0(K) \longrightarrow H_e^0(K) \longrightarrow H_f^1(K) \longrightarrow H^1(K) \longrightarrow \cdots\cdots$ も得られる．

命 題 3

vector space $H_e^0(K)$ の dimension は K の ends の数に等しい．

$$\dim H_e^0(K) = e(K)$$

証 明

H_e^0 の任意の元はその coboundary が finite 1-cochain となる cochain c によって表わされる．つまり，δc はある finite subcomplex L の外側では 0 である．ゆえに，c は $K-L$ の各成分上で constant になる．

H_e^0 の linearly independent elements を 0-cochain $c_1, c_2 \cdots\cdots c_n$ とすると，$K-L$ の各成分が infinite になっていて，しかも，各 c_i がそれぞれの成分上で constant であるような finite complex L が存在する．H_e^0 の中における元 c_i の linear independence より，$n \leqq n(L) \leqq e(K)$ となる．ゆえに，$\dim H_e^0 \leqq e(K)$．

逆に，finite subcomplex L を動かして，$n(L)$ 個の infinite component が残されたとする．$n(L)$ は異なった 0-cochains を1つの成分上では1になり，その他では0になるように作る．これらの cochain は H_e^0 の linearly independent な元を定義する．ゆえに $n(L) \leqq \dim H_e^0$ となり，$e(K) \leqq \dim H_e^0$

上の命題から $e(K)$ は K の 1-skelton のみに依存していることが分る．

命 題 4

K が finite, $\widetilde{K} \longrightarrow K$ が $\pi_1(K)=G$ の subgroup H に対応する covering space とすると，$H_e^0(\widetilde{K})$, $H_f^1(\widetilde{K})$, $H^1(\widetilde{K})$ は G, H, 係数体 F にのみ依存する．又 H が G で normal ならば，$H_e^0(K)$ は G/H にのみ依存する．

証 明

$H^1(\widetilde{K}) = \mathrm{Hom}(H_1(\widetilde{K} : Z), F) = \mathrm{Hom}(H/[H, H], F)$ だから，$H^1(\widetilde{K})$ については証明された．

次に $H_e^0(\widetilde{K})$ と $H_f^1(\widetilde{K})$ の証明は長くなるので，補題を使って証明する．$\mathfrak{F}$ を G から F への函数群とする．$\{Hy_i\}$ を G の中の H の cosets の集合とする．Φ を subgroup $\{f \mid f \in \mathfrak{F}$, ① $f(hg)=f(h)+f(g)$, ② 固定した g とほとんどすべての i に対して，$f(y_ig)-f(y_i)=0\} \subset \mathfrak{F}$ とする．① から ② は coset の代表元 y_i の選び方によらないことが分る．次に Φ_1 を subgroup $\{f \mid f \in \mathfrak{F}$, ① と ② 及び ③ $f(H)=0\} \subset \Phi$ とする．① と ③ から $f \in \Phi_1$, $g \in Hy_i$ ならば，

$f(g)=f(y_i)$ となる．さらに，Φ_2 を subgroup $\{f|f\in\mathfrak{F}$，①，② と ③，及び ④ ある固定した k とほとんど全ての i に対して，$f(y_i)=k\in\mathfrak{F}\}\subset\Phi_1$ とする．

命題4は次の命題5から得られる．

命 題 5

Z^1_f を $\widetilde{K}$ の finite 1-cocycles の群とすると，$\lambda(Z^1_f)=\Phi$, $\lambda(\delta C^\circ\cap Z^1_f)=\Phi_1$, $\lambda(\delta C^\circ_f)=\Phi_2$ をみたす準同形 $\lambda: Z^1_f\longrightarrow\mathfrak{F}$ が存在する．

証 明

基点 $O\in K$ 上の基点 $\widetilde{O}\in\widetilde{K}$ を選ぶ．y_i を $\widetilde{K}$ 内で始点 P_i を結ぶ道と考える．今，K の中で Maximal tree T を作ると，K が finite だから，T も又 finite になる．T を P_i を通るように $\widetilde{K}$ に lift したものを T_i とする．T_i は disjoint な finite trees である．

$\pi_1(K)=G\ni g$ を与えて，g を始点 $\widetilde{O}$ をもつ path $\widetilde{g}$ に lift する．その時 $\lambda(c^1)g=c^1(\widetilde{g})$ によって，λ；$Z^1_f\longrightarrow\mathfrak{F}$ を定義する．$\widetilde{g}$ の選び方を変えたものは $\widetilde{g}$ に homologous だから，又 c は cocycle だから，λ は well-defined である．

補 題 6

$$\lambda(Z^1_f)=\Phi$$

証 明

まず始めに $\lambda(Z^1_f)\subset\Phi$ を示す．Z^1_f の任意の元 c^1 に対して，$\lambda c^1(h\ g)=c^1(\widetilde{h}\ \widetilde{g})=c^1(\widetilde{h})+c^1(\widetilde{g})=\lambda c^1(h)+\lambda c^1(g)$ となるから，Φ の ① の条件が満たされた．次に $\widetilde{g_i}$ を始点が P_i となる g の lifting とすると，ほとんどすべての i に対して，$\lambda c^1(y_ig)-\lambda c^1(y_i)=c^1(\widetilde{y_i}\ \widetilde{g_i})-c^1(\widetilde{y})=c^1(\widetilde{g_i})=0$ となるから，Φ の ② の条件が満たされている．ゆえに $\lambda(Z^1_f)\subset\Phi$.

逆に，$\lambda(Z^1_f)\supset\Phi$ を示す．Φ の任意の元 f に対して，$\lambda c^1=f$ となる $c^1\in Z^1_f$ をみつけなければならない．T は maximal tree だから，K の中のすべての道は 0 を基点とする loop となる．$\widetilde{K}$ の中の simplicial path を $\widetilde{w}$，$\widetilde{w}$ を K に射影したものを w とする．$\widetilde{w}$ が T_i の中で始点をもつとき，$c^1(\widetilde{w})=f(y_iw)-f(y_i)$ と定義する．

今 $\widetilde{v}$ が $\widetilde{w}$ で follow されるならば，$c^1(\widetilde{v}\ \widetilde{w})-c^1(\widetilde{v})=c^1(\widetilde{w})$ となることが分る．なぜなら，$\widetilde{v}$ を始点が T_i 内に，終点が T_j 内にあるものとすると，y_iv は coset Hy_i の中にある．ゆえに $c^1(\widetilde{w})=f(y_iw)-f(y_i)=f(y_ivw)-f(y_iv)$．ところで，$\Phi$ の条件 ① を使うと，$f(y_ivw)-f(y_iv)=[f(y_ivw)-f(y_i)]-[f(y_iv)-f(y_i)]=c^1(\widetilde{v}\ \widetilde{w})-c^1(\widetilde{v})$ となる．

もし $w=1$ とすると，$c^1(\widetilde{w})=f(y_iw)-f(y_i)=f(y_i)-f(y_i)=0$ となる．$c^1(\widetilde{w^{-1}})=c^1(\widetilde{w^{-1}}\widetilde{w})-c^1(\widetilde{w})=0-c^1(\widetilde{w})$ より，c^1 が cochain になることが分る．ところが 2 simplex の boundary は 0 と homotopic だから c^1 は cocycle になる．

次に cocycle c^1 が finite であることを示す．w を K の中で固定された 1-simplex とし，$\widetilde{w_i}$ を T_i で始点をもつ w の lifting とすると，Φ の条件②より，ほとんどすべての i に対して，$c^1(\widetilde{w_i})=f(y_iw)-f(y_i)=0$ となる．ところが，K の中には 1-simplexes が有限個しか存在しな

いから，c^1 は finite である．ゆえに $c^1 \in Z^1_f$.

最後にこのようにしてえられた $c^1 \in Z^1_f$ が $\lambda^1 c^1 = f$ を満たすことを示せば証明は終る．$\widetilde{g}$ は $\widetilde{O}$ を始点としているから，$\lambda c^1 g = c^1(\widetilde{g}) = f(g) - f(1)$ となる．ところが Φ の条件①より，$f(1) = f(1) + f(1)$，ゆえに，$f(1) = 0$．したがって，$\lambda c^1 g = f(g)$.

補　題　7

$$\lambda(\delta C^0 \cap Z^1_f) = \Phi_1$$

証　明

$H^1(K) = \mathrm{Hom}(H_1(K),\ F)$ だから，$Z^1_f \cap \mathrm{Ker}(H^1_f \longrightarrow H^1)$ の任意の cocycle c^1 は任意の cocycle $c \in Z_1(K)$ に対して $<c^1,\ c> = 0$ となる．逆に $Z^1_f \ni c^1$ が $Z_1(K)$ の任意の cycle c に対して，$<c^1,\ c> = 0$ となるならば，$c^1 \in Z^1_f \cap \mathrm{Ker}(H^1_f \longrightarrow H^1)$ となる．homology の exact 性から，$\mathrm{Ker}(H^1_f \longrightarrow H^1) = \mathrm{Im}(H^{\circ}_e \longrightarrow H^1_f) = \delta C^{\circ}$．ゆえに，上の事は，$Z^1_f \cap \delta C^{\circ}$ に対しても成り立っている．

そこで $\lambda(\delta C^{\circ} \cap Z^1_f) \subset \Phi_1$ を示す．$\delta C^{\circ} \cap Z^1_f(K)$ の任意の元 c^1 をとると．補題6より，$\lambda c^1 \ni \Phi$. H の任意の元 h に対しては，$\lambda c^1 h = c^1(\widetilde{h}) = f(h) - f(1) = f(h)$．ところが，$\widetilde{h}$ は cycle だから，$c^1(\widetilde{h}) = 0$．ゆえに $f(h) = 0$．Φ_1 の③の条件が満たされたから $\lambda c^1 \in \Phi_1$ となる．

逆に，$\lambda(\delta C^{\circ} \cap Z^1_f) \supset \Phi_1$ を示す．Φ_1 の任意の元 f をとると，補題6より，$f = \lambda c^1$ となる $c^1 \in Z^1_f$ が存在する．$\widetilde{w}$ を $\widetilde{K}$ の任意の cycle とすると，$\widetilde{w}$ は $\widetilde{O}$ を基点とする loop と考えられる．$w \in \pi_1(K)$ を $p(\widetilde{w}) = w$ とすると，$w \in H$ となるから，$c^1(\widetilde{w}) = \lambda c^1(w) = f(w) - f(1) = f(w) = 0$．ゆえに $c^1 \in \delta C^{\circ} = \mathrm{Ker}(H^1_f \longrightarrow H^1)$ となり，$c^1 \in \delta C^{\circ} \cap Z^1_f$.

補　題　8

$$\lambda(\delta C^0_f) = \Phi_2$$

証　明

$\lambda(\delta C^0_f) \subset \Phi_2$ を示す．$c^1 \in Z^1_f$ を $c^1 = \delta c^{\circ}$ $(c^{\circ} \in C^0_f(\widetilde{K}))$ となるようにすると，ほとんどすべての i に対して，$\lambda c^1 \cdot y_i = c^1(\widetilde{y_i}) = \delta c^{\circ}(\widetilde{y_i}) = c^{\circ}(P_i) - c^{\circ}(\widetilde{O}) = -c^{\circ}(\widetilde{O})$．ゆえに $\lambda c^1 \in \Phi_2$.

逆に $\lambda(\delta C^0_f) \supset \Phi_2$ を示す．$\lambda c^1 \in \Phi_2$ とすると，ほとんどすべての i に対して，$\lambda c^1 \cdot y_i = k$. y_i を $\lambda c^1 \cdot y_i = k$ とし，$Q \in \widetilde{K}$ を与えたとき，P_jQ を P_j から Q への道とすると，$c^{\circ}(Q) = c^1(P_jQ)$ と定義できる．補題7より，$c \in Z_1(K)$ に対して $<c^1,\ c> = 0$ だから，この定義は道の取り方によらない．$Q_1\ Q_2$ が 1-simplex ならば，$P_jQ_1Q_2$ は P_j から Q への道となる．したがって，$\delta c^{\circ}(Q_1Q_2) = c^{\circ}(Q_2 - Q_1) = c^1(P_jQ_1Q_2) - c^1(P_jQ_1) = c^1(Q_1Q_2)$．ゆえに $\delta c^{\circ} = c^1$.

ところで，ほとんど全ての i に対して，$c^{\circ}(P_i) = c^1(P_jP_i) = c^1(\widetilde{OP_i}) - c^1(\widetilde{OP_j}) = \lambda c^1 \widetilde{y_i} - k = 0$ となっている．もし $Q \in T_i$ のとき，$P_jQ = P_jP_iQ$（ただし，$P_iQ \subset T_i$）とすると，$c^{\circ}Q = c^1(P_jP_iQ) = c^1(P_jP_i) + c^1(P_iQ) = c^{\circ}(P_i) + c^1(P_iQ)$，ゆえに，$c^{\circ}(Q) \neq 0$ ならば，$c^{\circ}(P_i) \neq 0$ か $c^{\circ}(P_iQ) \neq 0$，ゆえに T_i が c^1 の finite support と交わるから，$c^{\circ} \in C^0_f(\widetilde{K})$ したがって，$\lambda(\delta C^0_f) \supset \Phi_2$ となる。

補題6，7，8から命題5が証明された．

命題4の証明

命題5から $H^1_f=Z^1_f/\delta C^0_f=\Phi/\Phi_2$ ゆえに H^1_f については命題4が成り立つ．

もし，H が G で finite index ならば，$\widetilde{K}$ が finite となり，$e(\widetilde{K})=0$．命題3より，$\dim H^0_e=e(\widetilde{K})=0$，ゆえに $H^0_e=0$ となる．H が G で infinite index をもつならば，$H^0_f=0$，$H^1=F$ で exact sequence : $H^0_f\to H^0\to H^0_e\to H^1_f\to H^1\to\cdots$ は，$0\to F\to H^0_e\to\Phi_1/\Phi_2\to 0$，(ただし，$\mathrm{Im}(H^0_e\to H^1_f)=\mathrm{Ker}\ (H^1_f\to H^1)=(\delta C^0\cap Z^1_f)/\delta C^0_f=\Phi_1/\Phi_2$.) となる．したがって，$H^0_e$ はΦ_1/Φ_2 と F のみに依存している．ところが，Φ_1，Φ_2 は作り方より，G，H，F にしか依存してないから，H^0_e についても命題4が成り立つ．

次にHがGで normal とすると，$\Phi_1=\{f|G\to G/H\xrightarrow{f}F$，① $f(1)=0$，② 固定された $g\in G/H$ とほとんどすべての $y\in G/H$ に対して，$f(yg)=f(y)\}$ となり，$\Phi_2=\{f|$ ①，②，③ ある固定された k と，ほとんどすべての $y\in G/H$ に対して，$f(y)=k\}$ となる．ゆえに Φ^1/Φ_2 は G/H に依存している．したがって，最後に示した exact sequence より，H^0_e は G/H にのみ依存している．

定 義

命題 4より，Group G の ends の数 e(G) を $\widetilde{K}$ の ends の数と定義できる．ただし，$\widetilde{K}$ は finite complex K の regular covering で G は covering translation group である．

命 題 9

G が finite index の infinite cyclic subgroup をもつならば G は 2 つの ends をもつ．

証 明

まずはじめに H が G で finite index をもつならば，H と G の ends の数は同じになることを示す．$\widetilde{K}\longrightarrow K$ を e(G) に対する covering とする．$\pi_1(K)=M$，$\pi_1(\widetilde{K})=N$ とすると，$G=M/N$．ゆえに $H=L/M$ (ただし，L は M で finite index をもつ)．ところで $\pi_1(K')=L$ となる covering $\widetilde{K}$——$K'\longrightarrow K$ があるから，K' は finite complex である．ゆえに covering $\widetilde{K}\longrightarrow K$ は $e(H)=e(\widetilde{K})$ を与える．上の定義より $e(\widetilde{K})=e(G)$，ゆえに $e(H)=e(G)$．

今 R を real line としたとき，covering $R\longrightarrow S^1$ は covering transformations の group として，G でfinite index をもつ infinite cyclic subgroup H をもっている．ところが R は2つの ends をもっているので，$e(R)=2$．上の定義より $e(H)=e(R)=2$．ところが，はじめに述べたことより，H と G の ends の数は等しいから，$e(G)=e(H)=2$．つまり，infinite cyclic group G は2つの ends をもつ．

§3. 定理の証明

§1 より，$\widetilde{M}\simeq\widetilde{K}$．homotopy equivalent であれば，homology group が等しいから，$H_*(\widetilde{M})=H_*(\widetilde{K})$．したがって，定理は，$\widetilde{K}$ において証明すればよい．

定 義

ある $\varepsilon(K)$ を含んでいる任意の集合 $N \subset Y$ を end ε の近傍という．1つの end を modulo とする Y の cohomology group $H^i(Y.\ \varepsilon)$ は，N が ε のすべての近傍上を動くときの group $H^i(Y.N)$ の direct limit と定義される．

補 題 10

係数 F は体とする．$\widetilde{K}$ が finite complex K の infinite cyclic covering で，$H_*(\widetilde{K} : F)$ が F 上の有限生成ならば，§2 における $\widetilde{K}$ の2つの ends ε，ε' に対して，$H^*(\widetilde{K},\ \varepsilon,\ F)=H^*(\widetilde{K},\ \varepsilon',\ F)=0$ となる．

証 明

K が finite complex だから，$\widetilde{K}$ は covering transformation group π の下での変換……$t^{-1}K$, K, tK, t^2K……によって cover されている．$|i-j| \geqq$ constant に対しては $t^iK \cap t^jK=\phi$．便利の為 K と $K \cap tK$ を連結と仮定しておく．

end ε の近傍 N の定義より，$N_p=t^pK \cup t^{p+1}K \cup t^{p+2}K \cup \cdots\cdots$ は1つの end $\varepsilon(\widetilde{K})$ の近傍となっている．実際，$N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots\cdots$ は近傍の1つの cofinal sequence となる．別の言葉でいえば，ε の全ての近傍はある N_p を含んでいるといえる．同様にして，$N'q=t^{-q}K \cup t^{-q-1}K \cup \cdots\cdots$ は $\widetilde{K}$ の他方の end ε' の cofinal sequence となる．ところが上の定義より，$H_*(\widetilde{K}, \varepsilon)=\varinjlim_{p\to\infty} H^*(\widetilde{K},\ N_p)$ だから，補題 10 は $\varinjlim H^*(\widetilde{K},\ N_p)=0$ を証明すればよい．

まず，はじめに，H_*N_0 は F 上で有限となる．なぜなら，Meyer-Vietoris の exact sequence : $\xrightarrow{\partial} H_i(N_0 \cap N'_0) \longrightarrow H_i(N_0) \oplus H_i(N'_0) \longrightarrow H_i(\widetilde{K}) \xrightarrow{\partial} \cdots\cdots$ において，$H_i(\widetilde{K})$ は仮定より有限生成であり，$N_0 \cap N'_0$ が finite complex だから，$H_i(N_0 \cap N'_0)$ も有限生成となる．ゆえに，$H_i(N_0)$ が有限生成となる．

次に $H_*(\widetilde{K},\ N_0)$ も有限生成になる．なぜなら，Meyer-Vietoris の exact sequence :

$\longrightarrow H_i(N_0) \longrightarrow H_i(\widetilde{K}) \longrightarrow H_i(\widetilde{K},\ N_0) \longrightarrow H_{i+1}(N_0) \longrightarrow \cdots\cdots$ において，$H_i(\widetilde{K})$，$H_{i+1}(N_0)$ が有限生成だから，$H_i(\widetilde{K},\ N_0)$ も有限生成となる．したがって，ある finite subcomplex $L \subset \widetilde{K}$ が存在して，準同形 $H_*(L,\ N_0) \longrightarrow H_*(\widetilde{K}, N_0)$ が onto となる．

$N_{-s} \supset L$ となるように，十分大きく，近傍 $N_{-s}=t^{-s}K \cup t^{-s+1}K \cup \cdots\cdots \cup K \cup tK \cup \cdots\cdots$ を選ぶと，$H_*(\widetilde{K}, N_0)$ は N_{-s} 内の cycle で表わされる．つまり，準同形 $H_*(N_{-s},\ N_0) \longrightarrow H_*(\widetilde{K}, N_0)$ が onto となる．ゆえに $(\widetilde{K},\ N_{-s},\ N_0)$ に対する triple の exact sequence :

$\longrightarrow H_i(N_{-s},\ N_0) \longrightarrow H_i(\widetilde{K},\ N_0) \longrightarrow H_i(\widetilde{K},\ N_{-s}) \longrightarrow H_{i+1}(N_{-s},\ N_0) \longrightarrow$ から，準同形 $H_i(\widetilde{K},\ N_0) \longrightarrow H_i(\widetilde{K},\ N_{-s})$ は 0-map となる．

このことより，triple $(\widetilde{K},\ N_{-s},\ N_0)$ から triple $(\widetilde{K},\ N_p,\ N_{p+s})$ への automorphism t^{p+s} を考えると，すべての p に対して，自然な準同形 $H_*(\widetilde{K},\ N_{p+s}) \longrightarrow H_*(\widetilde{K},\ N_p)$ が 0-map となるような整数 $s>0$ が1つ存在する．係数 F は体だから，dual cohomology homomorphism : $H^*(\widetilde{K},\ N_p) \longrightarrow H^*(\widetilde{K},\ N_{p+s})$ も又 0-map となる．ゆえに，$H^*(\widetilde{K},\ \varepsilon)=\varinjlim H^*(\widetilde{K}, N_p)=0$．

定 理 11

$H_*(\widetilde{K}:F)$ が F 上で有限生成ならば，次の事が成り立つ．

$$H^i(\widetilde{K}:F)\cong H_{n-1-i}(\widetilde{K}:F)$$

$$H^i(\widetilde{K}:F)\otimes H^{n-1-i}(\widetilde{K}:F)\longrightarrow H^{n-1}(\widetilde{K}:F)\cong F.$$

証 明

$\widetilde{K}$ は finite complex K の infinite cyclic covering であるが，§1 より，K は disk bundle $D(\nu)$ であった．$D(\nu)$ は組合せ的 manifold だから，その上の $\widetilde{K}$ に対して，$H^*(\widetilde{K}:Np\cup Nq')$ の direct limit $(p.\ q\to\infty)$ はちょうど，compact support に関する $\widetilde{K}$ の cohomology となる．つまり，$\varinjlim H^*(\widetilde{K}:Np\cup Nq')=H$ compact $(\widetilde{K})$ $(p.\ q\to\infty)$ となる．

$(\widetilde{K}, N_p, N_q')$ に対する Meyer-Vietoris の exact sequence に対して，direct limit をとると，次の図の下の sequence が exactとなる．

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow H^{i-1}(\widetilde{K}) & \longrightarrow & H^i(\widetilde{K}, N_p\cup N_q') & \longrightarrow & H^i(\widetilde{K}, N_p)\oplus H^i(\widetilde{K}, N_q') & \longrightarrow \\
\downarrow \mathrm{d.1} & & \downarrow \mathrm{d.1} & & \downarrow \mathrm{d.1} & \\
\longrightarrow H^{i-1}(\widetilde{K}) & \xrightarrow{\delta} & H^i\ \mathrm{compact}(\widetilde{K}) & \longrightarrow & 0\ \oplus\ 0 & \longrightarrow
\end{array}$$

したがって，$H^{i-1}(\widetilde{K})\cong H^i$ compact$(\widetilde{K})$……①． ところが，§1 より，$\widetilde{K}$ と $\widetilde{M}$ とは homotopy equivarent だから，$H_*(\widetilde{M})=H_*(\widetilde{K})$．$\widetilde{M}$ は向きのついた topological n-manifold だから，Poincaré duality theorem (Spanier [7]) が成り立つ．ゆえに，H^i compact$(\widetilde{M})\cong H_{n-i}(\widetilde{M})$．したがって，$H^i$ compact $\widetilde{K}\cong H_{n-i}(\widetilde{K})$……②．①と②より，$H^{i-1}(\widetilde{K})\cong H_{n-i}(\widetilde{K})$．ここで i を $i-1$ に置き換えると，$H^i(\widetilde{K})\cong H_{n-1-i}(\widetilde{K})$ となり，duality iso が証明できた．

最後に係数 F が体で，$H_*(\widetilde{K})$ が有限生成のときは，次の図の上の dual pair に対して cup product が operate して，$x\in H^{i-1}(\widetilde{M})$，$y\in H^{n-i}(\widetilde{M})$ に対して，$\delta(x)\cup y=\delta(x\cup y)$ を使うと，求める結果が得られる．

$$\begin{array}{ccccc}
H^i\ \mathrm{compact}(\widetilde{K}) & \otimes H^{n-i}(\widetilde{K}) & \xrightarrow{\cup} & H^n\ \mathrm{compact}(\widetilde{K})\cong F \\
\cong\uparrow\delta & & & \cong\uparrow\delta \\
H^{i-1}(\widetilde{K}) & \otimes\ H^{n-i}(\widetilde{K}) & \xrightarrow{\cup} & H^{n-1}(\widetilde{K}).
\end{array}$$

同様にして relative の場合も証明される．

定 理 12

$H_*\widetilde{K}$ が体 F 上で有限生成ならば，

$$H^{i-1}\widetilde{K}\otimes H^{n-i}(\widetilde{K},\ \delta\widetilde{K})\longrightarrow H^{n-1}(\widetilde{K},\ \delta\widetilde{K})\cong F.$$

付記

この研究に対し，絶えまない御指導を賜わった大阪市立大学教授田尾鶉三博士に厚く感謝致します．尚，本論文の一部は「多様体の位相幾何学」研究集会（1971 年 11 月，香川）において発表した．

参 考 文 献

[1] J. W. Milnor, Infinite cyclic coverings, Conference on the topology of manifolds 1968 115—133.

[2] D. B. A. Epstein, Ends, topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall 1962, 110—117.

[3] R. C. Kirby & L. C. Siebenmann. On the triangulation of manifold and Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 1969 742—749.

[4] R. C. Kirby, Lecture on triangulations of manifolds. mimeographed 1969.

[5] ——————, Lecture on triangulations of manifolds, Appendix, mimeographed 1969.

[6] R. C. Kirby & E. D. Edwards, Deformations of spaces of Imbeddings. mimeographed 1970.

[7] E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill 1966.

[8] J. W. Milnor, Microbundle—I, Topology 3, supplement 1, (1964) 53—80.