要因計画理論における一部実施法について（1）

藤　井　淑　夫

On fractional replication in the theory of factorial designs (1)

Yoshio Fujii

§1. 序

要因実験は実験条件に関して考察の対象となる各因子の水準を計画的に変化させて生ずる処理を施したときに得られる観測値（収量または測定値）にもとづいて実験の目的とする各因子の主効果，因子間の交互作用等を統計的にしらべる方法である．

因子の数 n が多くなるとき理論的には各因子の主効果のほかに２因子交互作用から n 因子交互作用までのすべての情報が得られるが，高次の交互作用は無視可能であることが多い．この場合，各因子の水準の全ての組合わせを実験する必要がない．そこで与えられた実験条件のもとで，どの処理を実施するかの配置を構成する方法が要因実験における一部実施法である．また制約された実験条件のもとでは実験単位の数に制限があり，実験単位間における変動は目的とする結論に偏りを与える．この困難性を除く方法として，ブロック分けによる交絡法が用いられる．実験単位の全体を実験条件がよく似ている実験単位の集りであるブロックに分割する．われわれの目的とする重要な効果；たとえば主効果，二因子交互作用等がブロック間の変動に無関係に評価でき，他方重要でない効果すなわち高次交互作用等をブロックの変動と交絡させるように処理をブロックにわりつける必要がある．われわれの実験の目的をみたす条件のもとで処理をブロックに配置する方法がブロック交絡法である．一部実施およびブロック交絡法の構成方法が要因計画の理論である．1942 年 Fisher [7] はこれらの配置の仕方を群論的な考察にもとずいて行なっている．

ここではすべての因子が同じ水準数をもつ，いわゆる対称型要因計画の理論について述べる．n を因子数，s（素数または素数巾）を水準数とするとき s^n 個の処理は有限体 GF(s) 上の n 次元有限ユークリッド幾何 EG(n, s) の点 $\underline{a}'=(a_1, \cdots, a_n)$, $a_i \in \mathrm{GF}(s), i=1,2,\cdots, n$ を標識として処理 $\phi(\underline{a})$ で表わすことが出来る．処理の間に幾何学的アソシェーション・スキームおよび，一部実施によって自然に導かれるアソシェーション・スキームを導入することにより，一部実施法，ブロック分けにおける別名関係・ブロック擬要因および部分交絡法等についての代数的な構造が明らかにされる [9].

s^n 対称要因計画において s^n 個の処理のうち $s^{n-p}(0 \leqq p < n)$ 個の一部分からなる処理を実施する計画を s^{n-p}—計画と書くことにする．つぎにこの一部実施において，さらにブロック数が s^{ℓ} $(0 \leqq \ell \leqq n-p)$ であるブロック交絡計画を (s^{n-p}, s^{ℓ})—計画であると記す [2], [13]. この計画においては $(s^p-1)/(s-1)$ 個の一般交互作用が一般平均に別名になり，残りの

s^p 個の一般交互作用が互に別名となる．また，このとき自由度（$s^\ell-1$）の処理効果がブロックの変動に交絡される．そこで問題は無視可能な処理効果の自由度を選択し，その内の適当な一部分の自由度を一般平均に別名関係にし，残りの自由度をブロックの変動に交絡させることである．

これらに関連してつぎの問題がある．

(1) すべての d 因子交互作用以下の処理効果はある $d+1$ 因子交互作用以上の処理効果と別名にし，かつブロック変動に交絡しないで評価できる条件のもとで，計画可能な因子の最大個数 n を決定し，その計画を構成する．すなわち要因分解能が $2d+1$ であるとき，計画可能な最大因子数をもつ計画を構成することである．$r+k=n$，$k=p+\ell$ として，r を固定したとき，計画可能な因子の最大個数は $n=m_t(r,s)$ で与えられる．ここに $t=2d$ である [2]．$m_t(r,s)$ は $r-1$ 次元有限射影幾何 PG(r−1, s) 上のどの t 個の点も一次独立な点の最大個数である．また，このとき大きさ s^r，制約数 $m(\leqq m_t(r,s))$，水準数 s，および強さ t の直交配列 (s^r, m, s, t) が存在する [3]．

$m_t(r,s)$ を求める問題は限られた r, s, t の値に対してのみ解決されているだけである [2], [5].

(2) 与えられた（s^{n-p}, s^ℓ）計画において要因分解能を最大にする計画を構成することである．

対称型要因計画の理論と訂正可能な符号理論との間に密接な関係がある [5]．これは（n，k）線形符号において，与えられた最小の重みが w であるとき，最大の符号長 n をもつ線形符号を構成すること，および与えられた（n，k）線形符号に対して，符号の重みの最小値が最大となる線形符号を構成することに対応する．

§ 2. 幾何学的アソシェーション・スキーム [9]

1952 年 Bose-Shimamoto [4] によって最初に処理の間に導入されたアソシェーション・スキームを n を因子数，$s=q^u$ を水準数とする $v=s^n$ 個の処理 $\phi(\underline{a})$, $\underline{a}\in EG(n,s)$ の間につぎの関係によって導入する．

EG(n, s) の任意の二点 $\underline{a}$，$\underline{b}$ に対して

$$(2.1)\qquad \underline{a}-\underline{b}=\rho\underline{\alpha},\quad \rho\in GF(s),\quad \rho\neq 0,\quad \underline{\alpha}\in PG(n-1,s)$$

のとき処理 $\phi(\underline{a})$, $\phi(\underline{b})$ は $\underline{\alpha}$- アソシェートの関係にあるとする．便宜上，任意の処理はそれ自身の $\underline{0}$-アソシェートであるとする．

v 個の処理の間に導入されたこの関係はアソシェーション・スキームの公理 (a), (b), (c) [4] をみたし，アソシェーション・スキームのパラメーター $n_{\underline{\alpha}}$ および $P^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ はつぎの式で与えられる．

$$(2.2)\qquad n_{\alpha}=\begin{cases} s-1 \ ; & \underline{\alpha}\in PG(n-1,s) \text{ のとき} \\ 1 \ ; & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

$P_{\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$ は $\underline{\alpha}.\ \underline{\beta}.\ \underline{\gamma}\ \in PG(n-1,\ s)$ のとき

(2.3)
$$P_{\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}=\begin{cases}1 & ;\ \underline{\alpha}\neq\underline{\beta},\ \underline{\gamma},\ \underline{\beta}\neq\underline{\gamma} \text{ かつ } \underline{\alpha},\ \underline{\beta},\ \underline{\gamma} \text{ が共線であるとき}\\ s-2 & ;\ \underline{\alpha}=\underline{\beta}=\underline{\gamma} \text{ のとき}\\ 0 & ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

である．また $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$ のうちいずれかが $\underline{0}$ であるときは

(2.4)
$$P_{\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}^{\underline{0}}=\begin{cases}s-1 & ;\ \underline{\beta}=\underline{\gamma}\in PG(n-1,s) \text{ のとき}\\ 1 & ;\ \underline{\beta}=\underline{\gamma}=\underline{0} \text{ のとき}\\ 0 & ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

(2.5)
$$P_{\underline{\beta}\,\underline{0}}^{\underline{\alpha}}=P_{\underline{0}\,\underline{\beta}}^{\underline{\alpha}}=\begin{cases}1 & ;\ \underline{\alpha}=\underline{\beta} \text{ のとき}\\ 0 & ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

で与えられる．以上のことより，v 個の処理 $\phi(\underline{a})$；$\underline{a}\in EG(n,s)$ の間に $m=\dfrac{s^n-1}{s-1}$ 階級のアソシェーション・スキームが導入されるが，これをわれわれは $PG(n-1,s)$ 型アソシェーション・スキームということにする．

$PG(n-1,s)$ 型アソシェーション・スキームの表現行列であるアソシェーション行列は処理 $\phi(\underline{a})$ に適当に番号をつけて

(2.6)
$$A_{\underline{\alpha}}=\|a_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}^{\underline{b}}\|,\quad \underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s),\quad \underline{a},\underline{b}\in EG(n,s)$$

で表わされる．ここに

$$a_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}^{\underline{b}}=\begin{cases}1 & ;\ \phi(\underline{a}) \text{ と } \phi(\underline{b}) \text{ が } \underline{\alpha}\text{-アソシェートであるとき}\\ 0 & ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

$$\overline{PG}(n-1,s)=PG(n-1,s)\cup\{\underline{0}\}$$

である．また処理 $\phi(\underline{a})$ に辞引的に番号をつけることにより，$q\times q$ の置換行列

$$P=\begin{pmatrix}0 & & & & 1\\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

を用いて，$A_{\underline{\alpha}}$；$\underline{\alpha}\in PG(n-1,\ s)$ はつぎの様に表わされる．

(2.6′)
$$A_{\underline{\alpha}}=\sum_{\rho\in GF(s),\ \rho\neq 0} P^{\rho\underline{\alpha}}$$

$$P^{\rho\underline{\alpha}}=\prod_{i=1}^{n}\otimes P^{\rho\alpha_i},\quad P^{\rho\alpha_i}=\prod_{k=1}^{u}\otimes P^{\gamma_i(l)}$$

である．GF(s) の元 $\rho\alpha$ を座標表現で表わして $\rho\alpha_i=(\gamma_i^{(1)},\ \gamma_i^{(2)},\cdots,\gamma_i^{(u)})$，$\gamma_i^{(l)}\in GF(q), i=1, \cdots,\ n,\ \ell=1,\cdots,\ u$ とする．

$P_{\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}^{\alpha}$ の値を考慮すれば，つぎの式が成立する．

$$(2.7)\qquad \begin{cases}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})^2=s(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}}) & ;\ \underline{\alpha}\neq 0 \text{ のとき}\\ (A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\beta}})=A_{\underline{0}}+\sum\limits_{\underline{\gamma}\in\mathfrak{P}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}A_{\gamma} & ;\ \underline{\alpha},\underline{\beta}\neq\underline{0}\ \ \underline{\alpha}\neq\underline{\beta} \text{ のとき}\end{cases}$$

である．ここに $\mathfrak{P}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ は $\underline{\alpha},\ \underline{\beta}$ を含む最小の射影部分空間とする．

つぎにこの PG(n −1, s) 型アソシェーション・スキームによって自然に導かれるアソシェーション・スキーム（一部実施型アソシェーション・スキーム）を定義する．

$v=s^n$ 個の処理 $\phi(\underline{a})$ において，どの処理を実施するかを規定する GF(s) 上の階数 p の行列を

$$(2.8)\qquad F=\|f_{ij}\|\quad (p\times n)$$

とする．EG(n, s) における ($n-p$)-flat を

$$(2.9)\qquad \mathfrak{F}^{n-p}=\{\underline{x}\,|\,F\underline{x}=\underline{f},\ \ \underline{x}\in EG(n,s)\},\ \ \underline{f}\in EG(p,s)$$

とする．$\underline{f}$ の任意の値に対して一部実施計画は同じであるから以下簡単のために $\underline{f}=\underline{0}$ とする．

$\mathfrak{F}^{n-p}\ni\underline{x}$ に対応する処理 $\phi(\underline{x})$ のみを実施するものとする．この一部実施計画を $s^{n-p}(F)$-計画と書くことにする．このときFは $s^{n-p}(F)$-計画における生成行列といわれる [13]．実施した処理 $\phi(\underline{x})$ の間には，PG(n −1, s) 型アソシェーション・スキームから自然に導かれる関係が定義される．すなわち $\underline{x},\ \underline{y}\ (\in\mathfrak{F}^{n-p})$ を標識とする二つの処理 $\phi(\underline{x})$，$\phi(\underline{y})$ が EG(n, s) 上で $\underline{x}-\underline{y}=\rho\underline{\alpha}$，$\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$ $\rho\neq 0$ のとき，$\underline{\alpha}$-アソシエートであると定義する．この自然に導かれた関係はアソシェーション・スキームの公理をみたす．アソシェーションの関係を標示する $\underline{\alpha}(\neq\underline{0})$ の全体は PG(n −1, s) における n −1−p-flat：

$$(2.10)\qquad \mathfrak{P}^{n-1-p}=\{\underline{\alpha}\,|\,F\underline{\alpha}=\underline{0},\ \ \underline{\alpha}\in PG(n-1,s)\}$$

をつくる．このアソシェーション・スキームを PG(n −1, s) 型アソシェーション・スキームによって自然に導かれた一部実施型アソシェーション・スキームということにする．このアソシェーション・スキームに対応するアソシェーション行列を

$$(2.11)\qquad B_{\underline{\alpha}}=\|\,a_{\underline{x}\,\underline{\alpha}}^{\underline{y}}\,\|\,;\ \underline{x},\underline{y}\in\mathfrak{F}^{n-p},\ \ \underline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{P}}^{n-1-p}$$

とする．$B_{\underline{\alpha}}$，$\underline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{P}}^{n-1-p}$ の演算について PG(n −1, s) 型アソシェーション・スキームの場合と同様な関係式が成立する．たとえば

$$(2.12)\qquad \begin{cases}(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})^2=s(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}}), & \underline{\alpha}\neq\underline{0} \text{ のとき}\\ (B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\beta}})=B_{\underline{0}}+\sum\limits_{\gamma\in\mathfrak{P}(\alpha,\beta)}; & \underline{\alpha}\neq\underline{\beta},\ \ \underline{\alpha},\underline{\beta}\in\mathfrak{P}^{n-1-p} \text{ のとき}\end{cases}$$

である．

PG(n −1, s) 型アソシェーション行列 $A_{\underline{\alpha}}$: $\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$ を生成元とする有理数体上のベクトル空間 $[A_{\underline{\alpha}}\,;\ \underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)]$ は有理数体上の可換な代数，(linear associative) algebra [12] [18] をつくる．これを

$$\mathfrak{A}(PG(n-1,s))=[A_{\underline{\alpha}}\,;\ \underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)]$$

と書き，これを PG(n −1, s) 型アソシェーション代数とよぶことにする．対称行列から生成される代数は完全可約であり，有理数体に $A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$ のすべての固有根を添加して出来る拡大体上で可換な代数の既約表現は1次であるから $\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ は順序を度外視して $\frac{s^n-1}{s-1}+1$ 個の既約な両側イデアルの直和として一意的に書き表わされる [12]． これらのイデアルの主巾等行列を $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$; とすれば，$\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ はこれらの主巾等行列 $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in PG(n-1,s)$の線型閉包として

$$\mathfrak{A}(PG(n-1,s))=[A_{\underline{\alpha}}^{\#}\,;\ \underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)] \tag{2.13}$$

で表わされることが知られている [12].

同様に PG(n −1, s)−型アソシェーション・スキームによって自然に導かれる一部実施型アソシェーション代数を

$$\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)=[B_{\underline{\alpha}}\,;\ \underline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{P}}^{n-1-p}] \tag{2.14}$$

で表わす．PG(n −1, s) 型アソシェーション代数の場合と同様に $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の $(s^{n-p}-1)/(s-1)+1$ 個の既約は両側イデアルの主巾等行列を $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ で表わせば

$$\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)=[B_{\underline{\alpha}}^{\#}\,;\ \underline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{P}}(\tilde{F}')]$$

である．ここに $\tilde{F}$ は F の p 個の行ベクトルに一次独立な n −p 個の一次独立な行ベクトルからなる (n −p)×n 行列である．すなわち rank(F′ ; $\tilde{F}'$)＝n とする．また $\mathfrak{P}(\tilde{F}')$ は $\tilde{F}'$ の n −p 個の列ベクトルによって生成される PG(n −1, s) の n −1 −p 次元射影部分空間とする．

PG(n −1, s)−型アソシェーション代数 $\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ およびその自然に導かれる s^{n-p} 一部実施型アソシェーション代数 $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の互に直交する主巾等行列はつぎの定理によって与えられる．

定理 2.1 (Fujii [9]) $\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の既約な両側イデアルの互に直交する主巾等行列 $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$, $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}(\tilde{F}')$ は

$$\begin{cases} A_0^{\#}=\dfrac{1}{s^n}G_{s^n} \\ A_{\underline{\alpha}}^{\#}=\prod\limits_{\underline{\gamma}\in\underline{p}_{\alpha}}\left(\dfrac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\gamma}})\right)-\dfrac{1}{s^n}G_{s^n}=\dfrac{1}{s^n}\{(s-1)\sum\limits_{\underline{\beta}\in\underline{p}_{\alpha}}A_{\underline{\beta}}-\sum\limits_{\underline{\beta}\notin\underline{p}_{\alpha}}A_{\underline{\beta}}\} \\ \underline{\alpha}\in PG(n-1,s) \end{cases} \tag{2.15}$$

$$
(2.16)\qquad
\begin{cases}
B_0^{\#}=\dfrac{1}{s^{n-p}}G_{s^{n-p}} \\
B_{\underline{\beta}}^{\#}=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{P}_{\underline{\beta}}{}^{n-2-p}}\left(\dfrac{1}{s}(B_{\underline{0}}+B_{\underline{\alpha}})\right)-\dfrac{1}{s^{n-p}}G_{s^{n-p}} \\
=\dfrac{1}{s^{n-p}}\{(s-1)\sum\limits_{\alpha\in\overline{\mathfrak{P}}_{\underline{\beta}}{}^{n-2-p}}B_{\underline{\alpha}}-\sum\limits_{\alpha\notin\overline{\mathfrak{P}}_{\underline{\beta}}{}^{n-p-2}}B_{\underline{\alpha}}\} \\
\underline{\beta}\in\mathfrak{P}(\tilde{F}')
\end{cases}
$$

で与えられる．ここに G_v はすべての要素が1である $v\times v$ 行列で

$$\mathfrak{P}_{\underline{\alpha}}=\{\underline{\beta}\,|\,\underline{\alpha}'\underline{\beta}=0,\ \ \underline{\beta}\in PG(n-1,s)\}$$

$$\mathfrak{P}_{\underline{\beta}}^{n-2-p}=\{\underline{\alpha}\,|\,\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0,\ \ \underline{\alpha}\in\mathfrak{P}^{n-1-p}\},\ \ \underline{\beta}\in\mathfrak{P}(\tilde{F}')$$

である．

$\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の幾何学的意味を考えて，われわれは有理数体上の s^n 次元ユークリッド空間から s^{n-p} 次元ユークリッド空間への線形写像を与える行列 $\Phi(s^{n-p}\times s^n)$ をつぎの様に定義する．

$$(2.17)\qquad \Phi=\|\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}}\|\ ;\ \underline{x}\in\mathfrak{F}^{n-p},\ \ \underline{a}\in EG(n,s)$$

ここに

$$\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}}=\begin{cases}1\ ;\ \underline{x}=\underline{a}\quad \text{のとき}\\ 0\ ;\ \underline{x}\neq\underline{a}\quad \text{のとき}\end{cases}$$

とする．Φ によって自然に導かれる $\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ の線形写像 σ：

$$\sigma\ :\ \mathfrak{A}(PG(n-1,s))\ni A\longrightarrow\Phi A\Phi'$$

を考える．$A_{\underline{\alpha}}$, $B_{\underline{\alpha}}$ および Φ の定義から

$$(2.18)\qquad \Phi A_{\underline{\alpha}}\Phi'=\begin{cases}B_{\underline{\alpha}}\ ;\ \underline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{P}}^{n-1-p}\quad \text{のとき}\\ 0\ \ ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

である．したがって

$$\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)=\{\Phi A\Phi'\,|\,A\in\mathfrak{A}(PG(n-1,s))\}$$

が成立する．Φ によって導かれる線型写像 σ は $\mathfrak{A}(PG(n-1,s))$ から $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の上への一部実施相似写像である [9].

$\mathfrak{P}(\tilde{F}')\cap\overline{\mathfrak{P}}(F')$ は空集合で，$p(\tilde{F}')\cup\overline{p}(F')=\overline{PG}(n-1,s)$ であるから，$\overline{PG}(n-1,s)$ のすべての点 $\underline{\alpha}$ は

$$(2.19)\qquad \underline{\alpha}=\xi\underline{\alpha}_1+\underline{\alpha}_2,\ \ \underline{\alpha}_1\in\mathfrak{P}(\tilde{F}'),\ \ \underline{\alpha}_2\in\overline{\mathfrak{P}}(F'),\ \ \xi\in GF(s)$$

で一意的に表わされる．(2.15)，(2.16) および (2.18) からつぎの補題が成立する．

補題 2,1 (Fujii [9]) 行列 Φ によって定義される線形写像 σ によって対応関係が

(i) $\Phi A_{\underline{0}}^{\#}\Phi' = s^{-p}B_{\underline{0}}^{\#}$

(ii) $\Phi A_{\underline{\alpha}}^{\#}\Phi' = \begin{cases} s^{-p}B_{\underline{\alpha}_1}^{\#} \ ; \xi \neq 0 & \text{のとき} \\ s^{-p}(s-1)B_{\underline{0}}^{\#} \ ; \xi = 0 & \text{のとき} \end{cases}$

で与えられる．ここに $\underline{\alpha}$ は (2.19) をみたすものとする．したがってわれわれはつぎの定理を得る．

定理 2.2 (Fujii [9]) (2.17) 式で定義される $\mathfrak{A}(PG(n-1, s))$ から $\mathfrak{A}(s^{n-p}F_r)$ の上への線形写像は一部実施相似写像で，$\mathfrak{A}(PG(n-1, s))$ の $(s^p-1)/(s-1)+1$ 個の巾等行列 $A_{\underline{\alpha}_2}^{\#}(\underline{\alpha}_2 \in \mathfrak{P}(F'))$ が常数倍を除いて $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の同一の巾等行列 $B_0^{\#}$ に対応し，$\mathfrak{A}(PG(n-1, s))$ の s^p 個の巾等行列 $A^{\#}\xi\underline{\alpha}_1+\underline{\alpha}_2(\underline{\alpha}_1 \in \mathfrak{P}(\widetilde{F'}),\ \underline{\alpha}_2 \in \overline{\mathfrak{P}}(F'),\ \xi \neq 0)$ が常数倍を除いて $\mathfrak{A}(s^{n-p}-F_r)$ の同一の巾等行列 $B_{\underline{\alpha}_1}^{\#}$ に対応する．

以上のことより $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ によってきまる処理間の自由度 s−1 の対比を一般交互作用と呼び

$$(2.20) \qquad A^{\underline{\alpha}'} = A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}\cdots A_n^{\alpha_n} \quad \text{(Finney-Kempthone の記号[11])}$$

で表わされる [11]．このとき $\underline{\alpha} \in \mathfrak{P}(F')$ に対応する $(s^p-1)/(s-1)$ 個の一般交互作用 $A^{\underline{\alpha}'}$ は一般平均 $A^{\underline{0}'}$ と別名で，$\underline{\alpha} = \xi\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2(\xi \neq 0,\ \underline{\alpha}_1 \in \mathfrak{P}(\widetilde{F'})$；固定，$\underline{\alpha}_2 \in \mathfrak{P}(F'))$ に対応する s^p 個の一般交互作用 $A^{\underline{\alpha}'}$ は一般交互作用 $A^{\underline{\alpha}'_1}$ と別名である．この $s^{n-p}(F)$-計画における定義対比 [6] は

$$(2.21) \qquad I = A^{\underline{\alpha}'} = A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}\cdots A_n^{\alpha_n}, \quad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)' \in \mathfrak{P}(F')$$

で与えられる．定理 2.2 より $\overline{PG}(n-1, s) \ni \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ に対して，$\alpha - \beta \in \overline{\mathfrak{P}}(F')$ であるならば $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ に対応する一般交互作用 $A^{\underline{\alpha}}$, $A^{\underline{\beta}}$ は互に別名関係にある．したがって別名関係は一部実施を規定する行列 F によってきまる．

§ 3. ブロック計画とリレーションシップ代数

s^n 個の処理 $\phi(\underline{a})$；$\underline{a} \in EG(n, s)$ のどの処理を実施するかを指定するために用いた GF(s) 上の階数が p の行列 $F(p \times n)$ に対して，実施した一部の処理 $\phi(\underline{x})$；$\underline{x} \in \mathfrak{F}^{n-p}$ をどのようにブロックに配置するかの仕方を指定するために GF(s) の上階数が ℓ の行列 $B(\ell \times n)$ を導入する．ここに F，B はつぎの条件をみたすものとする．

$$(3.1) \qquad \text{rank}(F' ; B') = p + \ell \leq n$$

EG(n, s) 上の $n-p-\ell$ flat

$$(3.2) \qquad \mathfrak{B}_{\underline{u}} = \{\underline{x} \mid F\underline{x} = 0,\ B\underline{x} = \underline{u}\},\quad \underline{u} \in EG(\ell, s)$$

を考える．このとき行列 B をブロック配置における生成行列といわれている[13].

$\mathfrak{B}_{\underline{u}} \ni \underline{x}$ に対応する処理 $\phi(\underline{x})$ によってブロック $\Phi(\mathfrak{B}_{\underline{u}})$ を構成する．明らかに，$\mathfrak{B}_{\underline{u}}$ の点の個数 k は

$$(3.3)\qquad k = s^{n-p-\ell}$$

である．このように s^{n-p} 個の処理を s^{ℓ} 個のブロック $\phi(\mathfrak{B}_u)$, $u \in EG(\ell, s)$ に配置するときの計画を生成行列 F，B を用いて $(s^{n-p}(F), s^{\ell}(B))$計画，または単に (s^{n-p}, s^{ℓ}) 計画と略記する．この計画における結合行列を

$$(3.4)\qquad N = N(\mathfrak{B}_{\underline{u}}\,;\ \underline{u} \in EG(\ell, s)) = \| n_{\underline{x}, \underline{u}} \|$$

で表わす．ここに

$$n_{\underline{x}, \underline{u}} = \begin{cases} 1\,;\ \underline{x} \in \mathfrak{B}_{\underline{u}} & \text{のとき} \\ 0\,;\ \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする． N は $v_p \times b$ 行列 ($v_p = s^{n-p}$, $b = s^{\ell}$ であって，ブロックの大きさおよび反復数はそれぞれ $k = s^{n-p-\ell}$, $r = 1$ である．この計画の結合行列 N について

$$(3.5)\qquad NN' = B_0 + \sum_{\underline{\alpha} \in \ n-1-p} B_{\underline{\alpha}}$$

が成立する．$\mathfrak{A}(s^{n-p} - F_r)$ の互に直交する主巾等行列 $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathfrak{P}}(\widetilde{F'})$ を用いて

$$(3.6)\qquad NN' = \sum_{\alpha \in \overline{\mathfrak{p}}(\widetilde{F}')} \mu_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\alpha}}^{\#}$$

で表わされる．ここに $\mu_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathfrak{P}}(\widetilde{F'})$ について

$$(3.7)\qquad \mu_{\underline{\alpha}} = \begin{cases} 0\ ;\ \underline{\alpha} \notin \overline{\mathfrak{P}}(B') & \text{のとき} \\ k\ ;\ \underline{\alpha} \in \overline{\mathfrak{P}}(B') & \text{のとき} \end{cases}$$

が成立する [9]．以上の事よりつぎの定理によって，行列Bによって(s^{n-p}, s^{ℓ})計画のブロック交絡の構造が定まる．

定理 3.1 (Fujii [9]) $(s^{n-p}(F), s^{\ell}(B))$ 計画においてつぎの事が成立する．

(i) $\underline{\alpha} \notin \overline{\mathfrak{P}}(B')$, $\underline{\alpha} \in \mathfrak{P}(F')$ なる α に対応する一般交互作用 $\underline{A}^{\underline{\alpha}}$ はブロックの変動に無関係に評価出来る（直交する）．

(ii) $\underline{\alpha} \in \mathfrak{P}(B')$ なる α に対応する一般交互作用 $\underline{A}^{\underline{\alpha}}$ はブロックに完全に交絡する．

したがって，ブロック配置のために用いられる一般交互作用 $\underline{A}^{\underline{\alpha}}$, $\alpha \in \mathfrak{p}(B')$ をブロック擬要因といわれている [6].

§ 4.　$s^{n-p}(F)$ 計画における重み分布

一部実施計画における要因分解能 [6] は s^{n-p} 計画を規定する生成行列 $F(p \times n)$ について，

$\mathfrak{P}(F')$ の重み分布によって完全に決定されるから，われわれは重み分布の概念を導入する．

$\underline{\alpha}\in\overline{PG}(n-1,s)$ の 0 でない成分の個数を $\underline{\alpha}$ の重み (weight) といい $w(\underline{\alpha})$ で表わすことにする．

$$(4.1)\qquad w_F=\min_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}(F')} w(\underline{\alpha})$$

は一部実施計画における要因分解能 w_F を与える．与えられた n, p に対して，要因分解能 w_F を最大にする生成行列Fを構成する問題は一般に未解決である．そこで要因分解能および別名関係をさらに詳しく調べるために重み分布 $w(\underline{\alpha})$；$\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}(F')$ について考える．

符号理論において Slepian [15] によって最初に導入されたモヅル表現の概念を導入する．生成行列Fの0でない列ベクトルを PG(p−1, s) の点とみなす．$GF(s^p)$ の原始根の一つを π とし PG(p−1, s) の点を $\{(\pi^0),(\pi^1),\cdots,(\pi^{N-1})\}$ で表わすことが出来る[7]．ここに $N=(s^p-1)/(s-1)$ で，(π^i) は $GF(s)\ni a\neq 0$ に対して (π^i) と $(a\pi^i)$ は射影空間 PG(p−1, s) の同一な点とみなす．PG(p−1, s) のN個の点を $P^i=(\pi_i)$，$i=0, 1, \cdots, N-1$ で表わす．$i=0, 1\cdots, N-1$ に対して点 P_i を表わす F の列ベクトルの個数を M_i とし，F の 0 ベクトルの個数を z とする．ここに $\sum_{i=0}^{N-1} M_i=n-z$ である．ベクトル $\underline{M}'=(M_0, M_1, \cdots, M_{N-1})$ を生成行列 F のモヅル・ベクトルであると定義する．PG(p−1, s) における (initial) p-2 -flat $V_{p-2}(0)$ はそれに含まれる点を用いて，$V_{p-2}(0)=\{(\pi^{e_0}),(\pi^{e_1}),\cdots,(\pi^{e_{k-1}})\}$，$e_0=0$，$k=\dfrac{s^p-1}{s-1}$ で表わすことが出来る．そのとき PG(p−1, s) におけるすべての p-2-flats は

$$(4.2)\qquad V_{p-2}(i)=\pi^i\ V_{p-2}(0)\equiv\{(\pi^{i+e_0}),\ (\pi^{i+e_1}),\cdots,(\pi^{i+e_{k-1}})\}$$

$i=0, 1, \cdots, N-1$ で表わされる．

点 P_j と p-2-flats $V_{p-2}(i)(i, j=0, 1, \cdots, N-1)$ の間の結合行列 $C=\|c^i{}_j\|$ をつぎの様に定義する．

$$(4.3)\qquad c_{ji}=\begin{cases}1\ ;\ P_j\in V_{p-2}(i)\ ;\ i, j=0, 1, \cdots, N-1 & \text{のとき}\\ 0\ ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする．このとき，c_{ji} は (4.2) より

$$(4.4)\qquad c_{ij}=\begin{cases}1\ ;\ j\equiv i+e_l\ (\mathrm{mod}\ N) & l=0, 1, \cdots, k-1\\ 0\ ;\ \text{そうでないとき}\end{cases}$$

である．

$GF(s^p)$の原始根 π について，$\pi^i, i=0, 1, \cdots, N-1$ の多項式表現を $\pi^i=a_{i0}+a_{i1}\pi+\cdots+a_{ip-1}\pi^{p-1}$，$a_{ji}\in GF(s)$ とするとき，π^i にベクトル $\underline{P}'_i=(a_{i0}, a_{i1}, \cdots, a_{ip-1})$ を対応させる．π が原始根であるから対応は1対1である．

PG(n−1, s) の p-1-flat$\mathfrak{P}(F')$ のすべての点 $\underline{\alpha}_i$ はつぎのように表わされる．

$$(4.5) \qquad \underline{\alpha}_i = \mathrm{F}'\underline{\mathrm{P}}_{j(i)}, \quad i=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$$

ここに $\underline{\mathrm{P}}_{j(i)}$ は p-2-flat $V_{p-2}(i)$ に対応する点とする．すなわち p-2-flat をベクトル表示で表わして $V_{p-2}(i)=\{\underline{x}|\underline{\mathrm{P}}_j{}'_{(i)}\underline{x}=0\}$，$i=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$ とする．

このとき，重み分布とモヅル・ベクトルの間につぎの補題が成立する．

補題 4.1 $\mathfrak{P}(\mathrm{F}')\ni\underline{\alpha}_i$ の重み $w(\underline{\alpha}_i)$ を成分とするベクトル（重みベクトル）を $\underline{w}'=(w(\underline{\alpha}_0), \cdots, w(\underline{\alpha}_{\mathrm{N}-1}))$，行列Fのモヅル・ベクトルを $\underline{\mathrm{M}}$ とすれば

$$(4.6) \qquad \underline{w}=(\mathrm{G}-\mathrm{C})\,\underline{\mathrm{M}}$$

$$(4.6') \qquad \underline{\mathrm{M}}=\frac{1}{\mathrm{s}^{p-1}}\mathrm{G}\underline{w}-\frac{1}{\mathrm{s}^{p-2}}\mathrm{C}'\underline{w}$$

が成立する．ここに G はすべての元が 1 である N×N 行列で演算は有理数体上で考える．

したがって重み分布は結合行列Cの構造とモヅル・ベクトル $\underline{\mathrm{M}}$ によって決定される．

証明 $\mathrm{F}=(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \cdots, \underline{f}_n)$，$\underline{f}_h\in\overline{\mathrm{PG}}(\mathrm{p}-1, \mathrm{s})$，$h=1, 2, \cdots, n$ とする．このとき，$\underline{\alpha}_i\in\mathfrak{P}(\mathrm{F}')$ を固定すると

$$\underline{\alpha}_i'=\underline{\mathrm{P}}_j{}'_{(i)}\mathrm{F}=\underline{\mathrm{P}}'_{j(i)}(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \cdots, \underline{f}_n)$$

をみたす $\underline{\mathrm{P}}_{j(i)}$ はFの階数がpであるから，一意的に決定される．$\underline{\alpha}_i$ の第 h 成分は

$$\alpha_{ih}=\underline{\mathrm{P}}_j{}'_{(i)}\underline{f}_h$$

である．したがって $\alpha_{ih}\neq 0$ となるのは $\underline{\mathrm{P}}_j{}'_{(i)}\underline{f}_h\neq 0$ のときに限る．すなわち，$\alpha_{ih}\neq 0$ となるのは点 $\underline{f}_h$ が p−2−flat$V_{p-2}(i)=\{x|\underline{\mathrm{P}}_j{}'_{(i)}\underline{x}=0\}$ に含まれないときに限る．重複度を含めて F の $n-z$ 個の零でない列ベクトル $\underline{f}_h$ を PG(p−1, s) の点 $\underline{\mathrm{P}}_l$(M_l 個ある）とみなしたとき点 P_l が p−2 flat $V_{p-2}(i)$ に含まれないならば，$\alpha_{ih}\neq 0$ である．したがって $\mathfrak{P}(\mathrm{F}')\ni\underline{\alpha}$ の重みの定義と，点 P_j と p−2−flats$V_{p-2}(i)$ の結合行列Cの定義から

$$w(\underline{\alpha}_i)=\sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1}(1-c_{ij})\mathrm{M}_j$$

が成立し，したがって (4.6) 式が成立する．

G − C を結合行列とするデザインはパラメーター $v=b=\mathrm{N}=\dfrac{\mathrm{s}^p-1}{\mathrm{s}-1}$, $r=k=\mathrm{s}^{p-1}$, $\lambda=\mathrm{s}^{p-2}(\mathrm{s}-1)$, をもつ対称釣合不完備計画 (SBIBD) である．したがって (4.6) 式を $\underline{\mathrm{M}}$ について解くことにより (4.6′) 式を得る．

$\mathfrak{P}(\mathrm{F}')\ni\underline{\alpha}_i$ の重み $w(\underline{\alpha}_i)$ は (4.4) から

$$(4.7) \qquad \underline{w}(\alpha_i)=\sum_{\substack{j\neq i+e_l (\mathrm{mod\ N})\\ l=0,1,\cdots,k-1}}\mathrm{M}_j \quad i=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$$

で与えられる．$w(\underline{\alpha}_i)$，$i=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$ およびモヅル・ベクトル $\underline{\mathrm{M}}'=(\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \cdots, \mathrm{M}_{\mathrm{N}-1})$ の

生成多項式を

$$(4.8)\qquad \mathrm{W}(x)=\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} \underline{w}(\alpha_i)x^i,\quad \mathrm{M}(x)=\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{M}_i x^i$$

と定義し，それぞれ重み関数，モヅル関数と呼ぶことにする．このとき，$\sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{M}_j=n-z$ であることに注意して重み関数とモヅル関数の間につぎの関係が成立する．

$$(4.9)\qquad \mathrm{W}(x)=(n-z)\frac{x^{\mathrm{N}}-1}{x-1}-\left(1+\frac{1}{x^{c_1}}+\cdots+\frac{1}{x^{c_{k-1}}}\right)\mathrm{M}(x)\quad (\mathrm{mod}\,(x^{\mathrm{N}}-1))$$

同様に (4.4)，(4.6′) 式より，(4.9) 式をモヅル関数 M(x) について解けば

$$(4.9')\qquad \mathrm{M}(x)=\frac{1}{\mathrm{s}^{p-1}}\mathrm{W}\cdot\frac{x^{\mathrm{N}}-1}{x-1}-\frac{1}{\mathrm{s}^{p-2}}\left(x^{c_0}+x^{c_1}+\cdots+x^{c_{k-1}}\right)\mathrm{W}(x)\quad (\mathrm{mod}\,(x^{\mathrm{N}}-1))$$

が成立する．ここに $\mathrm{W}=\mathrm{W}(1)=\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\underline{w}(\alpha_i)$ とする．

われわれはいま生成行列 F の $\underline{0}$ でない列ベクトル $\underline{f}_i$，$i=1,2,\cdots,n$ を PG(p−1, s) における点 P_i を重複度を含めて M_i 個選んだ高々 n 個の点の集合 $\mathfrak{S}$(F) を s^{n-p}(F) 計画における生成グラフということにする．補題 (4.1) の証明から，生成行列 F の $h_1,h_2,\cdots,h_r$ 列によって表わされる生成グラフ上の点のみが p−2−flat$V_{p-2}(i)$ に属さなければそのときに限り $\alpha_{ih_j}\neq 0$，$j=1,2,\cdots,\mathrm{r}$；$\alpha_{ik}=0$ $k\neq h_j$，$j=1,2,\cdots,\mathrm{r}$ が成立するから，このとき一般交互作用 $\mathrm{A}^{\underline{\alpha}'_i}=\mathrm{A}_{h_1}^{\alpha_{ih_1}}\mathrm{A}_{h_2}^{\alpha_{ih_2}}\cdots\mathrm{A}_{h_r}^{\alpha_{ih_r}}$ が一般平均 $\underline{\mathrm{A}}^{\underline{0}}$ と別名になることがわかる．このことから生成グラフの構造にもとづいて別名関係を調べることができる．

以上のことをつぎの二，三の例によって説明する．

例 4.1　生成行列が

$$\mathrm{F}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \end{array}\qquad n=10,\quad \mathrm{p}=2\,(\mathrm{s}\geqq 9)$$

である s^{10-2}(F) 計画の場合，ここに＊は 0 でない GF(s) の元で，＊を元とする 2 列から出来る行列式が 0 でないとする．GF(s^2) の原始根を π とするとき，PG(1, s) 上の s+1 個の点は $\mathrm{P}_i=(\pi^i)$，$i=0,1,\cdots,\mathrm{s}$ で表わされる．生成行列 F の 3 列，8 列，10 列に対応する PG(1, s) の点を P_2，P_3，P_4 とすれば，F の生成グラフは

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
(1, 4, 7)	(2, 5, 6, 9)	(3)	(8)	(10)

である．生成行列 F のモヅル・ベクトルは

$$\underline{\mathrm{M}}=(3,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

である．このとき $\mathfrak{P}(F')$ の重み分布はつぎの様になる．

(E. 4.1)

weight $w(\underline{\alpha_i})$	no. of elements $\underline{\alpha_i}$ in $\mathfrak{P}(F')$
6	1
7	1
9	3
10	s-4

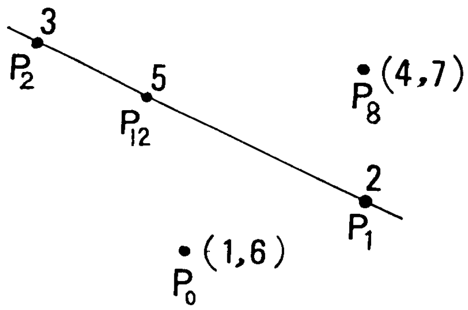
例 4.2　生成行列が

$$F=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad n=7,\ \ p=3,\ \ s=3$$

を生成行列とする $3^{7-3}(F)$ 計画を考える．PG(2, 3) 上の点 P_i $i=0, 1, \cdots, 12$ をつぎの様に指定する．x^3+2x^2+1 を GF(3) 上の最小多項式とし，その原始根の一つを π とすれば，$GF(3^3)=\{0,\ 1,\ \pi,\ \cdots,\ \pi^{3^3-2}\}$ である．この原始根 π を用いて

$$\text{(E. 4.2)}\quad PG(2, 3)=\{(1),\ (\pi),\ (\pi^2),\ (\pi^3=\pi^2+2),\ (\pi^4=\pi^2+2\pi+2),$$
$$(\pi^5=2\pi+2),\ (\pi^6=2\pi^2+2\pi),\ (\pi^7=\pi^2+1),\ (\pi^8=\pi^2+\pi+2),$$
$$(\pi^9=2\pi^2+2\pi+2),\ (\pi^{10}=\pi^2+2\pi+1),\ (\pi^{11}=\pi+2),\ (\pi^{12}=\pi^2+2\pi)\}$$

で表わされる．PG(2.3) 上の点 $P_i=(\pi^i)$, $i=0,\ 1, \cdots,\ 12$ とすれば F の生成グラフは



で表わされ，モヅル・ベクトルは

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \underline{M}'=(& 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\ ) \\ & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} \end{array}$$

である．射影平面 PG(2, 3) 上の 1 点を通る直線は 4 個あることに注意すれば $\mathfrak{P}(F')$ の重み分布はつぎの様になる．

	weight $w(\underline{\alpha_i})$	*no. of elements in* $\mathfrak{P}(\mathrm{F}')$
	3	1
(E. 4.3)	4	7
	6	3
	7	2

である．生成行列Fによる 3^{7-3}(F) 計画ではっきの 13 個の一般交互作用が一般平均と別名になる．

$A_1\ A_4^2\ A_6\ A_7$	$A_1\ A_3\ A_4^2\ A_5$	$A_1\ A_2\ A_3^2\ A_4^2\ A_5^2\ A_6\ A_7$
$A_2\ A_4\ A_5\ A_7^2$	$A_1\ A_3^2\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7^2$	$A_1\ A_2^2\ A_3\ A_4^2\ A_5\ A_6\ A_7$
$A_3\ A_4\ A_5^2\ A_7^2$	$A_2\ A_3\ A_4^2\ A_7$	$A_1\ A_2^2\ A_3^2\ A_6$
$A_1\ A_2\ A_5\ A_6$	$A_2\ A_3^2\ A_5^2$	
$A_1\ A_2^2\ A_4\ A_2\ A_6\ A_7$	$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_6\ A_7^2$	

このとき定義対比の一つとして

$$\mathrm{I} = A_1 A_4^2 A_6 A_7 = A_2 A_4 A_5 A_7^2 = A_3 A_4 A_5^2 A_7^2$$

と書くことが出来る．

PG(2, 3) 上のすべての 13 個の直線 $V_1(i)\,(i=0, 1, \cdots, 12)$ はそれに含まれる点（4 個の点）によって (E. 4.2) から巾表現を用いて

$$\text{(E. 4.4)} \qquad V_1(i) = \{(\pi^i), (\pi^{1+i}), (\pi^{5+i}), (\pi^{11+i})\}$$

で表わされる．このとき重みベクトル $\underline{w}$ とモヅル・ベクトル $\underline{\mathrm{M}}$ の間の関係はつぎの様になる．

$$\underset{\underline{w}}{\begin{pmatrix} 4\\4\\4\\4\\6\\7\\7\\4\\3\\6\\4\\6\\4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}
0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0
\end{pmatrix} \underset{\underline{\mathrm{M}}}{\begin{pmatrix} 2\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\2\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}}$$

したがってこのことより重み分布が (E. 4.3) で与えられることがわかる.

§ 5. 同値な $s^{n-p}(F)$ 計画

生成行列 F をもつ s^{n-p} 計画において, $\mathfrak{P}(F')\ni\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$とするとき, 一般交互作用 $\underline{A}^{\underline{\alpha}}$ は一般平均に別名になる. いま $\varepsilon(\alpha_i)$ を

$$(5.1)\qquad \varepsilon(\alpha_i)=\begin{cases}1\,;\ \alpha_i\neq 0 & \text{のとき}\\ 0\,;\ \alpha_i=0 & \text{のとき}\end{cases}$$

によって定義する. $\underline{\alpha}'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して, $\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha}')=(\varepsilon(\alpha_1),\ \varepsilon(\alpha_2),\cdots,\varepsilon(\alpha_n))$ を対応させる. この記号を用いて $\underline{\alpha}$ に対応する一般交互作用は $\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}(F')$ のとき交互作用 $\underline{A}^{\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha}')}=A_1^{\varepsilon(\alpha_1)}\cdots A_n^{\varepsilon(\alpha_n)}$ (Yates の記号) に属する一部分の自由度 (s−1) が一般平均に別名になる. このことはつぎの様に説明される. すなわち一般交互作用 $\underline{A}^{\underline{\alpha}}$ に対応する s−1 個の独立な対比 (Contrast) は PG(n−1, s) アソシエーション代数 $\mathfrak{A}$(PG(n−1, s)) の互に直交する巾等行列 $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ で表わされる. また $w(\underline{\alpha})(=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\alpha_i))$ 因子交互作用 $\underline{A}^{\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha})}$ に対応する自由度 $(s-1)^{w(\underline{\alpha})}$ の独立な対比は factorial type または F_n 型アソシエーション代数 $\mathfrak{A}(F_n)$ [16] の互に直交する巾等行列 $A^{\#}_{\varepsilon(\underline{\alpha})}$ で与えられる. ここに

$$(5.2)\qquad \begin{cases}A^{\#}_{\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha})}=A^{\#}_{\varepsilon(\alpha_1)}\otimes A^{\#}_{\varepsilon(\alpha_2)}\otimes\cdots\otimes A^{\#}_{\varepsilon(\alpha_n)}\\ A^{\#}_{\varepsilon(\alpha_i)}=\varepsilon(\alpha_i)\left(I_s-\dfrac{1}{s}G_s\right)+(1-\varepsilon(\alpha_i))\dfrac{1}{s}G_s\\ \varepsilon(\alpha_i)=0,1\,;\ i=1,2,\cdots,\ n\end{cases}$$

である. $\mathfrak{A}$(PG(n−1, s)) および $\mathfrak{A}(F_n)$ の互に直交する巾等行列の間につぎの補題が成立する.

補題 5.1　$\mathfrak{A}$(PG(n−1, s)) および $\mathfrak{A}(F_n)$ の互に直交する巾等行列を各々 $A^{\#}_{\alpha}$, $A^{\#}_{\varepsilon(\alpha)}$ とするとき

$$(5.3)\qquad \underline{A}^{\#}_{\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha})}=\sum_{\underline{\beta}}\underline{A}^{\#}_{\underline{\beta}}$$

で与えられる. ここに総和は $\underline{\beta}'=(\beta_1\varepsilon(\alpha_1),\cdots,\beta_n\varepsilon(\alpha_n))$, $\varepsilon(\alpha_i)\neq 0$ であるとき $\beta_i\neq 0$ なるすべての $\underline{\beta}$ についての和を表わすものとする.

証明　$\mathfrak{A}$(PG(n−1, s)) および $\mathfrak{A}(F_n)$ の定義から二つの処理 $\phi(\underline{a})$ と $\phi(\underline{b})$ が PG(n−1, s) 型 $\underline{\alpha}$-アソシェートであるならば F_n 型 $\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha})$ アソシェートである. したがってアソシエーション行列の間に

$$A_{\underline{\varepsilon}(\underline{\alpha})}=\sum_{\underline{\beta}}A_{\underline{\beta}}\quad(\underline{\beta}'=(\beta_1\varepsilon(\alpha_1),\cdots,\beta_n\varepsilon(\alpha_n))$$

の関係式が成立する. (2.15), (5.2) 式より補題が成立することがわかる.

そこで，われわれはつぎの記号を定義する．

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{A}}^{\underline{\varepsilon(\alpha)}} = \mathrm{A}_1^{\varepsilon(\alpha_1)} \cdots \mathrm{A}_n^{\varepsilon(\alpha_n)} \\ \mathfrak{P}^{\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}') = \{ \underline{\mathrm{A}}^{\underline{\varepsilon(\alpha)}} \mid \underline{\alpha} \in \mathfrak{P}(\mathrm{F}') \} \end{cases}$$

このとき $\mathfrak{P}^{\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}')$ に属するすべての交互作用のうち一部の一般交互作用が一般平均に別名になる．

生成行列 F_1 および F_2 によって定義される各々の計画 $s^{n-p}(\mathrm{F}_1)$ および $s^{n-p}(\mathrm{F}_2)$ を考える．そのとき因子 A_1, $\mathrm{A}_2 \cdots$, A_n の適当な変換によって $\mathfrak{P}^{\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}_1')$ から $\mathfrak{P}^{\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}_2')$ が得られるとき二つの計画 $s^{n-p}(\mathrm{F}_1)$ と $s^{n-p}(\mathrm{F}_2)$ は同等であるという．すなわち適当な置換行列 E_n に対して

$$(5.5)\qquad \mathfrak{P}^{\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}_1') = \mathfrak{P}^{\mathrm{E}_n\underline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}_2')$$

が成立するときである．計画 $s^{n-p}(\mathrm{F}_1)$ と $s^{n-p}(\mathrm{F}_2)$ が同等であるための十分条件としてつぎの補題が成立する．

補題 5.2（Robillard [13]） 行列 F_1, F_2 を生成行列とするそれぞれの計画 $s^{n-p}(\mathrm{F}_1)$ と $s^{n-p}(\mathrm{F}_2)$ が同等であるための十分条件は

$$(5.6)\qquad \mathrm{F}_1' = \mathrm{E}_n \mathrm{D}_n \mathrm{F}_2' \mathrm{C}_p$$

である．ここに C_p は $\mathrm{p}\times\mathrm{p}$ の非特異行列，D_n は $n\times n$ の非特異な対角行列，E_n は $n\times n$ の置換行列とする．

証明 (5.4) および (5.5) 式より明らかである．

生成行列 $\mathrm{F}(\mathrm{p}\times n)$ の零でない列ベクトル $\underline{f}_j (j=1, \cdots, n)$ を $\mathrm{PG}(\mathrm{p}-1, \mathrm{s})$ における点と考える．$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}(\mathrm{N}=(\mathrm{s}^p-1)/(\mathrm{s}-1))$ を $\mathrm{PG}(\mathrm{p}-1, \mathrm{s})$ の異なるすべての点とする．$\mathrm{p}\times 1$ の零ベクトルを $\underline{\mathrm{O}}_p$ で表わす．そのとき生成行列 F は $\underline{\mathrm{O}}_p, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}$ から重複を許してとられた n 個の点の集合 $\mathfrak{G}(\mathrm{F})$ であるとみなすことが出来る．$\mathfrak{G}(\mathrm{F})$ は計画 $s_{n-p}(\mathrm{F})$ の生成グラフといわれている [13].

補題 5.3 二つの生成行列 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2(\mathrm{p}\times n)$ に対して $\mathfrak{G}(\mathrm{F}_1)=\mathfrak{G}(\mathrm{F}_2)$ であるとき，かつそのときに限り

$$(5.7)\qquad \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 \mathrm{D}_n \mathrm{E}_n$$

が成立する．ここに D_n は非特異な対角行列で E_n は置換行列とする．

証明 生成グラフの定義と射影空間の同次座標より補題が成立する．

生成グラフ $\mathfrak{G}(\mathrm{F})$ にあらわれる点 P_i の個数を M_i, $i=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$ とし，零ベクトルの個数を z とする．このとき生成行列 F のモヅル・ベクトルは $\mathrm{M}'=(\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \cdots, \mathrm{M}_{\mathrm{N}-1})$, $\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{M}_i = n - z$ である．同一のモヅル・ベクトル $\underline{\mathrm{M}}$ をもつすべての生成行列は同等な s^{n-p} 計画を与える．

与えられたベクトル $\underline{\mathrm{M}}$ に対して s^{n-p} 計画が存在するとき $\underline{\mathrm{M}}$ は許容的であるといわれる．許容的なベクトル $\underline{\mathrm{M}}$ に対してつぎの補題が成立する．

補題 5.4　$\underline{M}'=(M_0, M_1, \cdots, M_{N-1})$ が許容的であるための必要十分条件は

（i）$p \leqq \sum_{i=0}^{N-1} M_i \leqq n$,

（ii）M_i；非負整数 $i=0, 1, \cdots, N-1$,

（iii）ベクトル（G－C）$\underline{M}$ の成分はすべて正整数，ここに G－C は (4.6) 式で定義されたものとする．

以上を重みベクトル $\underline{w}'=(w_0, w_1, \cdots, w_{N-1})$ について表わせば，(4.6) および (4.6′) 式より

（i′）$p\ s^{p-1} \leqq \sum_{i=0}^{p-1} w_i; \leqq n s^{p-1}$,

（ii′）ベクトル $\frac{1}{s^{p-1}}(G-sC')\ \underline{w}$ の成分は非負整数,

（iii′）w_i；正整数，$i=0, 1, \cdots, N-1$

である．

モヅル・ベクトル M の概念を用いて二つの s^{n-p}－計画が同等であるための必要十分条件についてつぎの定理が成立する．

定理 5.1　二つの計画 $s^{n-p}(F_1)$ と $s^{n-p}(F_2)$ が同等であるための必要十分条件は，それらの計画の生成行列のモヅル・ベクトル $\underline{M}'_1=(M_{10}, M_{11}, \cdots, M_{1N\ 1})$ および $\underline{M}'_2=(M_{20}, M_{21}, \cdots, M_{2N-1})$ について

（i）$\sum_{i=1}^{N-1} M_{1i} = \sum_{i=0}^{N-1} M_{2i}$

（ii）PG(p－1, s) 上の点 $P_i=(\pi^i)$ の巡回置換 $T_l: (\pi^{i+l})=T_l(\pi^i)$ $i=0, 1, \cdots, N-1,\ l=0, 1, \cdots, N-1$ に対応する N個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_{N-1}$ の置換行列 $E_N(T_l)=P^l$ に対して

$$\underline{M}_1 = E_N(T_l)\underline{M}_2 \tag{5.8}$$

が成立することである．ここに P は N× N行列で

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

とする．

証明　必要条件は Robillard [13] による．十分条件を示すためにつぎの概念を導入する．生成グラフ $\mathfrak{G}(F'_1)$ 上の点から他の生成グラフ $\mathfrak{G}(F'_2)$ の上へのつぎの条件 (S. 1)，(S. 2) をみたす写像 Φ が存在するとき，$\mathfrak{G}(F'_1)$ と $\mathfrak{G}(F'_2)$ は同じ構造をもつと定義する．

(S. 1) 生成グラフ $\mathfrak{G}(F'_1)$. $\mathfrak{G}(F'_2)$ の結合関係は写像 Φ に関して不変である．すなわち $\mathfrak{G}(F'_1)$

の任意の部分集合Xに対して $\dim(X)=\dim(\Phi(X))$ である．

（S. 2）点 P_i に附随した $\mathfrak{G}(F_1')$ の点の個数 M_{1i} と点 $P_i'=\Phi(P_i)$ に附随した $\mathfrak{G}(F_2')$ の点の個数 M_{2i}' が等しい．

このときつぎの補題が成立する．

補題 5.5　二つの計画 $s^{n-p}(F_1)$ と $s^{n-p}(F_2)$ が同等であるための必要十分条件は対応する生成グラフ $\mathfrak{G}(F_1')$ と $\mathfrak{G}(F_2')$ が同じ構造をもつことである．

証明　Robillard [13] による．

以上のことより $PG(p-1, s)$ 上の巡回置換 T_ℓ；$\ell=0, 1\cdots, N-1$ は（S. 1）をみたし，（5.8）により（S. 2）をみたすから定理 5.1 が成立することがわかる．

§ 6.　最適な $s^{n-p}(F)$ 計画の構造

与えられた n，pに対して生成行列Fをもつ $s^{n-p}(F)$ 計画における要因分解能は

$$(6.1)\qquad d_F=\min_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}(F')} w(\underline{\alpha})$$

で与えられる．ここに $w(\underline{\alpha})$ は $\underline{\alpha}$ の重みである．この章では与えられた n，p に対して要因分解能が最大となる $s^{n-p}(F)$ 計画の構成について述べる．このことを $\mathfrak{P}(F')$ の重み分布の式で書けば要因分解能 d_F を最大にする生成行列は

$$(6.2)\qquad d=\max_{F}\min_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{p}(F')} w(\underline{\alpha})$$

をみたす行列 F を求めることになる．現在のところ $p\geqq3$ および s が一般の場合にはほとんど未解決である．まず二，三の特別の場合について考察する．

場合 6.1（Robillard [13]）　$p=2, s=$ 素数巾のときの $s^{n-p}(F)$ 計画

このとき $PG(p-1=1, s)$ の $s+1$ 個の点を $P_0, P_1, \cdots, P_s$ として，生成行列Fのモヅル・ベクトルを $\underline{M}'=(M_0, M_1, \cdots M_s)$，$\sum_{i=0}^{s} m_i=n-z$（$z$ は F の列ベクトルの中で $\underline{0}_p$ であるものの個数）とする．（4.6）から $p=2$ の場合の $\mathfrak{P}(F')$ の $s+1$ 個のベクトルの重みは

$$(6.3)\qquad \sum_{i=0}^{s} M_i-M_j=n-z-M_j,\quad j=0, 1, \cdots, s$$

で与えられる．したがって与えられた n，$p=2$ に対して $\min_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{p}(F')} w(\underline{\alpha})$ を最大にするFを構成する問題は

$$(6.4)\qquad \sum_{i=0}^{s} M_i=n-z,\quad z\geqq0,\quad M_i\geqq0,\quad i=0,\ 1, \cdots, s$$

の条件のもとで

$$(6.5)\qquad \min_{j=0,1,\cdots,s}(n-z-M_j)=n-z-\max_{j=0,1,\cdots,s} M_j$$

を最大にする z およびモヅル・ベクトル $\underline{M}$ を選ぶことと同等である．この解は $z=0$ で

$$(6.6)\qquad \max_{F}\ \min_{j}(n-M_j)=n-\min_{F}\ \max_{j}\ M_j$$

であるから，$\sum_{j=0}^{s} M_j=n$ なる条件のもとで，$\max_{j} M_j$ を最小にする $\underline{M}$ をみつけることと同等である．この解は一意的でないがつぎのようになる．

$$(6.7)\qquad \begin{cases} \text{(i)}\ M_i=k\ ;\ n=k(s+1) \quad \text{のとき}\quad i=0,1,\cdots,s \\ \text{(ii)}\ M_0=M_1=\cdots=M_{r-1}=k+1,\ \ M_r=M_{r+1}=\cdots=M_s=k \\ \qquad ;\ n=k(s+1)+r,\ \ 1\leqq r\leqq s \quad \text{のとき，} \end{cases}$$

したがって (ii) の場合は $\min_{\underline{M}}\ \max_{j}\ M_j=k+1=\left[\dfrac{n}{s+1}\right]+1$ であり，したがって maxi-min weight は

$$(6.8)\qquad \max\ d_F=\begin{cases} n-\left[\dfrac{n}{s+1}\right]\ ;\ \text{(i)}\quad \text{のとき} \\ n-\left[\dfrac{n}{s+1}\right]-1\ ;\ \text{(ii)}\quad \text{のとき} \end{cases}$$

である．ここに $[x]$ は x を超えない最大の整数とする．したがって (6.8) はまたつぎの様に表わされる．

$$(6.8')\qquad \max\ d_F=\begin{cases} sk \qquad\quad ;\ n=k(s+1) \quad \text{のとき} \\ sk+r-1\ ;\ n=k(s+1)+r,\ \ 1\leqq r\leqq s \quad \text{のとき} \end{cases}$$

例 (6.1) 生成行列が

$$F=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad n=10,\ s=3,\ p=2$$

のとき生成グラフは

$$\begin{array}{cccc} (1,5,9) & (2,7,10) & (3.8) & (4,6) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ P_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & P_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & P_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & P_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \end{array}$$

で表わされ，モヅル・ベクトルは $\underline{M}'=(3,3,2,2)$ である．このとき重み分布は

(E.6.1)

weight $w(\underline{\alpha_i})$	*no. of elements in* $\mathfrak{P}(F')$
7	2
8	2

である．したがって $\mathfrak{P}(F')$ の maxi-min weight は $d_F=10-\left[\dfrac{10}{4}\right]-1=7$ で要因分解能を最大にする計画である．このとき $3^{10-2}(F)$ 計画ではつきの 4 個の一般交互作用が一般平均と別名になる．

$A_1\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6^2\ A_8^2\ A_9^2$　　　$A_2\ A_3\ A_4^2\ A_6\ A_7\ A_8^2\ A_{10}^2$

$A_1\ A_2\ A_3^2\ A_5\ A_7\ A_8\ A_9^2\ A_{10}^2$　　　$A_1\ A_2^2\ A_4^2\ A_5\ A_6\ A_7^2\ A_9^2\ A_{10}$

すなわち定義対比は

$$I = A_1\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6^2\ A_8^2\ A_9^2 = A_2\ A_3\ A_4^2\ A_6\ A_7\ A_8^2\ A_{10}^2$$

である．

場合 6.2　p=3，s=3 のときの 3^{n-3}(F) 計画

例 (4.2) の場合と同様に x^3+2x^2+1 を GF(3) の最小多項式とし，その原始根の一つを π とする．生成行列 F のモヅル・ベクトル $\underline{M}'=(M_0, M_1, \cdots, M_{12})$ とすれば，(4.6) 式から maximin weight をもつ 3^{n-3} 計画の生成行列Fを求める問題はつぎの様になる．

$$(6.9)\qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{12} M_i = n-z \\ \max_{F}\ \min_{\underline{\alpha}\in p(F')}\ w(\underline{\alpha}) = n-z-\min_{F}\ \max_{i}\ \sum_{j=0}^{12} c_{ij} M_j \end{cases}$$

をみたす $z\geqq 0$ およびモヅル・ベクトル $\underline{M}$ を求めることである．(6.9) から $z=0$ で，したがって $\sum_{i=0}^{12} M_0 = n$ の条件のもとで $\min_{F}\ \max_{i}\ \sum_{j=0}^{12} C_{ij} M_j$ をみたす $\underline{M}$ を求めればよい．E(4.4) を考慮することにより

$$(6.9')\qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{12} M_i = n \\ \min_{F}\ \max_{i=0}^{12}(M_i+M_{1+i}+M_{5+i}+M_{11+i}) \end{cases}$$

をみたす生成行列 F を求めればよい．ここに i，$1+i$，$5+i$，$11+i$ は mod 13 で考える．この解は一般に一意的でないが，$n=13k+r$，$0\leqq r\leqq 12$ のときつぎの様になる．

(i) r=0　のとき

$$\underline{M}'=(\overset{0}{k}, \overset{1}{k}, \overset{2}{k}, \overset{3}{k}, \overset{4}{k}, \overset{5}{k}, \overset{6}{k}, \overset{7}{k}, \overset{8}{k}, \overset{9}{k}, \overset{10}{k}, \overset{11}{k}, \overset{12}{k})$$

(ii) $1\leqq r\leqq 3$　のとき

$$\underline{M}'=(\underbrace{k+1, \cdots, k+1}_{r\text{個}}, k, \cdots, k)$$

(iii) r=4　のとき

$$\underline{M}'=(\overset{0}{k+1}, \overset{1}{k+1}, \overset{2}{k+1}, \overset{3}{k}, \overset{4}{k+1}, \overset{5}{k}, \overset{6}{k}, \overset{7}{k}, \overset{8}{k}, \overset{9}{k}, \overset{10}{k}, \overset{11}{k}, \overset{12}{k})$$

(iv) $5\leqq r<7$　のとき

$$\underline{M}'=(\overset{0}{k+1}, \overset{1}{k+1}, \overset{2}{k+1}, \overset{3}{k}, \overset{4}{k+1}, \overset{5}{k}, \overset{6}{k}, \overset{7}{k}, \underbrace{\overset{8}{k+1}, \cdots, k+1}_{r-4\text{個}}, k, \cdots, \overset{12}{k})$$

(v) r=7 のとき，10 番目の成分以外の他のどれか 1 つ例えば第 7 成分を $k+1$ とする

(vi) $8 \leqq r \leqq 12$ のとき

$\underline{M}'$ の 11, 12, 3, 5, 6, 10 番目の成分の順で r 個に 1 を加えればよい.

$\mathfrak{P}(F')$ の maxi-min weight $d_p(n, s=3)$ の結果を表にするとつぎの様になる.

表 6.1 3^{n-3} 計画における maxi-min weight.

n	$d_3(n, 3)$	
$13k$	$9k$	$k \geqq 1$ *
$13k+1$	$9k$	$k \geqq 1$ *
$13k+2$	$9k$	$k \geqq 1$ *
$13k+3$	$9k+1$	$k \geqq 0$
$13k+4$	$9k+2$	$k \geqq 0$
$13k+5$	$9k+2$	$k \geqq 0$
$13k+6$	$9k+3$	$k \geqq 0$
$13k+7$	$9k+4$	$k \geqq 0$
$13k+8$	$9k+5$	$k \geqq 0$
$13k+9$	$9k+6$	$k \geqq 0$
$13k+10$	$9k+6$	$k \geqq 0$
$13k+11$	$9k+7$	$k \geqq 0$
$13k+12$	$9k+8$	$k \geqq 0$

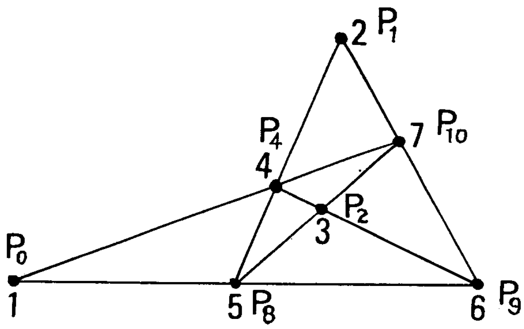
* の条件は生成行列 F の階数が 3 であるため.

例 (6.2) 生成行列が

(E. 6.2)
$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad n=7,\ p=3,\ s=3$$

である 3^{7-3} 計画を考える. このとき生成グラフはつぎの様になる.

(E. 6.3)



モヅル・ベクトルは $\underline{M}' = (\overset{0}{1}, \overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{0}, \overset{6}{0}, \overset{7}{0}, \overset{8}{1}, \overset{9}{1}, \overset{10}{1}, \overset{11}{0}, \overset{12}{0})$ である. このとき $\mathfrak{P}(F')$ の重み分布は

	weight $w(\underline{\alpha})$	*no. of elements in* $\mathfrak{P}(F')$
	4	6
(E.6.4)	5	3
	6	4

である．この生成行列 F による 3^{7-3} 計画ではつぎの 13 個の一般交互作用が一般平均と別名になる．

$\underline{A_1\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7}$	$A_1\ A_3\ A_6^2\ A_7^2$	$A_1\ A_2\ A_3^2\ A_5\ A_6\ A_7$
$\underline{A_2\ A_4\ A_5^2\ A_6\ A_7^2}$	$A_1\ A_3^2\ A_4^2\ A_5^2$	$A_1\ A_2^2\ A_3\ A_4^2\ A_5\ A_6$
$\underline{A_3\ A_4\ A_5^2\ A_6^2\ A_7}$	$A_2\ A_3\ A_5\ A_6^2$	$A_1\ A_2^2\ A_3^2\ A_4\ A_6^2\ A_7$
$A_1\ A_2\ A_4^2\ A_6^2$	$A_2\ A_3^2\ A_4^2\ A_7$	
$A_1\ A_2^2\ A_5^2\ A_7^2$	$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5^2\ A_7$	

定義対比は

$$I = A_1 A_4 A_5 A_6 A_7 = A_2 A_4 A_5^2 A_6 A_7^2 = A_3 A_4 A_5^2 A_6^2 A_7$$

である．この一部実施計画の要因分解能は 4 で表 6.1 で $n=7$ のとき，maxi-min weight が 4 であるからこの 3^{7-3} 計画は要因分解能が最大である意味で最適な計画である．

一般の n，p に対する最適な $s^{n-p}(F)$ 計画について述べる．重み分布とモヅル・ベクトルの間の関係式 (4.7) より maxi-min weight をもつ生成行列 F を求める問題は

$$(6.10)\qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1} M_i = n - z \\ \max_{F} \min_{\underline{\alpha} \in \mathfrak{p}(F')} w(\underline{\alpha}) = n - z - \min_{F} \max_{i=0}^{N-1} \sum_{\substack{j \equiv i + e_l (\mathrm{mod}\ N) \\ l = 0, 1, \cdots, k-1}} M_j \end{cases}$$

で与えられる．ここに $\underline{M}' = (M_0, M_1, \cdots, M_{N-1})$ は生成行列 F のモヅル・ベクトルで，$N = (s^p-1)/(s-1)$，$k = (s^{p-1}-1)/(s-1)$ である．$e_0, e_1, \cdots, e_{k-1}$ は $PG(p-1, s)$ における (initial) p−2−flat $V_{p-2}(0) = \{\pi^{e_0}), (\pi^{e_1}), \cdots (\pi^{e_{k-1}})\}$ を与える非負整数である．

したがって，われわれは (6.10) をみたす非負整数 z とモヅル・ベクトル $\underline{M}$ を求めることに対応する．したがって，$z=0$ で $\sum_{i=0}^{N-1} M_i = n$ の条件のもとで $\max_{i=0}^{N-1} \sum_{\substack{j \equiv i + e_l (\mathrm{mod}\ N) \\ l = 0, 1, \cdots, k-1}} M_j$ を最小にする生成行列 F を求めればよい．$n = qN + r$，$0 \leqq r \leqq N-1$ とするとき，r の値すなわち，n を N で割ったときの剰余 r の値によって分類する．

（i）$r=0$ のとき (6.10) より $M_i = q\ (i = 0, 1, \cdots, N-1)$ が maxi-min weight を与える一意的な解である．このとき maxi-min weight d は

$$(6.11)\qquad d = (N-k)q = s^{p-1}q$$

で与えられる．この解を与える生行列は $\left(\frac{s^p-1}{s-1},\ p\right)$ Equi-distant 線形符号の生成行列 $L\left(p \times \frac{s^p-1}{s-1}\right)$ を q 回重複して用いることにより s^{n-p} 計画の生成行列 F は

$$(6.12)\qquad F = (\underbrace{L, L, \cdots, L}_{q})$$

で与えられる.

(ii) $r \neq 0$ のとき (6.10) から M_i のかわりに $M_i - q (i=0, 1, \cdots, N-1)$ とおくことにより, $1 \leqq n \leqq N-1$ の場合だけを考えればよい. $F(p \times n)$ が生成行列であることより $n \geqq p$ である. $p \leqq n \leqq N-1$ のとき maximin weight d_0 をもつ $s^{n-p}(F)$ 計画を考える. s, p を固定したとき d_0 を n の関数として $d_0 = d_p(n, s)$ で表わすことにする. 一般に $n = qN + r$, $0 \leqq r \leqq N-1$ のとき, $s^{n-p}(F)$ 計画における maxi-min weight $d_p(n, s)$ は (6.11) 式から

$$(6.13) \qquad d_p(n, s) = s^{p-1}q + d_p(r, s)$$

で与えられる. ここに $d_p(r, s) = 0$; $r = 0, 1, \cdots, p-1$ である.

$d_p(n, s) = 2t+1$ のとき $s^{n-p}(F)$ 計画において任意の t 因子交互作用が他のすべての t 因子交互作用以下の交互作用と別名にならないので, 推定可能な自由度を考慮すれば, s^{n-p} の下限を与えるよく知られた不等式 (Bose [2])

$$(6.14) \qquad s^{n-p} \geqq 1 + \binom{n}{1}(s-1) + \cdots + \binom{n}{t}(s-1)^t$$

が成立する. この不等式は $s=2$ のとき符合理論における Hamming bound として知られている. $d_p(n, s) = 2t$ のとき同様な不等式 (Bose [2])

$$(6.14') \qquad s^{n-p} \geqq 1 + \binom{n}{1}(s-1) + \cdots + \binom{n}{t-1}(s-1)^{t-1} + \binom{n-1}{t-1}(s-1)^t$$

が成立する. また $s=2$ のとき, $2^{n-p}(F)$ 計画の要因分解能 d_0 の限界を与えるつぎの補題が成立する.

補題 6.1 (Griesmer bound [10]) 要因分解能が d_0 である $2^{n-p}(F)$ 計画が存在するならば d_0 の上限は

$$(6.15) \qquad n \geqq d_0 + d_1 + \cdots + d_{p-1}$$

をみたす整数でなければならない. ここに d_i

$$(6.16) \qquad d_i = \left\lceil \frac{d_{i-1}+1}{2} \right\rceil \quad i = 1, 2, \cdots, p-1$$

で与えられる.

§ 7. 最適な $s^{n-3}(F)$ 計画の例

s^{n-3} 計画における maximin weight $d_3(n, s)$ についてしらべる. (6.13) から $3 \leqq n < N = s^2+s+1$ の場合についてしらべればよい.

場合 7.1 $s=2$ (Robillard [13]). GF(2) 上の原始多項式を x^3+x^2+1 とし $GF(2^3)$ の一つの原始根を π とするとき巾表現を用いて

$$PG(2.2) = \{ (1), (\pi), (\pi^2), (\pi^3 = \pi^2+1), (\pi^4 = \pi^2+\pi+1), (\pi^5 = \pi+1), (\pi^6 = \pi^2+\pi) \}$$

で表わされる．したがって（initial）1-flat を

$$V_1(0)=\{(1),(\pi),(\pi^5)\}$$

とすることが出来る．(4.9)，(4.9′) からモヅル関数と重み関数の間に

$$(7.1)\qquad \begin{cases} W(x)\equiv(n-z)\dfrac{x^7-1}{x-1}-(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5})M(x) \\ M(x)\equiv\dfrac{1}{2^2}W\dfrac{x^7-1}{x-1}-\dfrac{1}{2}(1+x+x^5)W(x) \end{cases} \mod (x^7-1)$$

で与えられる．maxi-min weight $d_3(n,2)$ は場合 6.2 と同様にして求めることが出来る．結果はつぎの様になる．いずれも補題 6.1 の d_0 の上限を与えている．

表 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7
$d_3(n,2)$	0	0	1	2	2	3	4

例 (7.1)　2^{6-3}(F) 計画

$$(E.7.1)\qquad F=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(7.1) 式は $W(x)=4+3x+3x^2+3x^3+3x^4+4x^5+4x^6$ となる．したがって一般平均に別名になる一般交互作用の重み分布がわかる．このときつぎの交互作用が一般平均と別名になる．

$A_1A_4A_5A_6$,　$A_2A_4A_6$,　$A_3A_4A_5$,　$A_1A_2A_5$,　$A_1A_3A_6$,　$A_2A_3A_5A_6$,　$A_1A_2A_3A_4$

になる．定義対比は $I=A_1A_4A_5A_6=A_2A_4A_6=A_3A_4A_5$ で要因分解能が最大である 2^{6-3} 計画である．

場合 7.2　s=3 のとき，表 6.1 より結果だけ書けば

表 7.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$d_3(n,3)$	0	0	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9

この表で，$n\leqq7$ の場合は (6.14)，(6.14′) の s^{n-p} の下限を与えるので最大の要因分解能をもつ計画である．$n\geqq8$ のとき例 (6.2) および (E.4.2) から生成行列 (E.6.2) で使用されている点，P_3, P_5, P_6, P_7, P_{11}, P_{12} は生成グラフ (E.6.3) 上の三点と共線になるから，どの点を使用しても四点が共線となる生成グラフ上の直線がすくなくとも 1 個存在する．したがって $n=8$

のとき $d_3(n,3)=5$ となる．PG(2, 3) 上の直線上には4点しかないから $n=9$ のとき表の結果になる．

場合 7.3 $s=4$ のとき，$GF(4^3)$ は GF(4) の原始根 α を用いて，GF(4) 上の原始多項式 $x^3+\alpha^2x^2+\alpha x+\alpha$ の一つの根 π によって生成される．PG(2.4) は原始根 π の巾表現を用いて

$$PG(2,4)=\{(\pi^i)\ ;i=0,\ 1,\ \cdots,\ 20\},\quad \pi^{21}=\alpha$$

で表わされる．(initial) 1-flat $V_1(0)$ として

$$V_1(0)=\{(1),\ (\pi),\ (\pi^4=\pi+\alpha),\ \{\pi^{14}=\pi+\alpha^2),\ (\pi^{16}=\pi+1)\}$$

とすることが出来る．4^{n-3}(F) 計画における $d_3(n,4)$ の結果を表にすればつぎの様になる．

表 7.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d_3(n,4)$	0	0	1	2	3	4	4	5	6	6	7

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$d_3(n,4)$	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16

生成グラフ $\mathfrak{G}$(F) 上の点として最初まず共線上にない6個の点 P_0, P_1, P_2, P_{18}, P_9, P_{20} をえらぶことにより生成行列

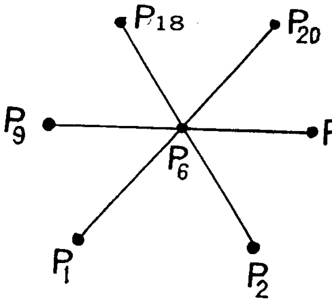
$$\text{(E. 7.2)}\qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$$

を得る．PG(2, s) 上の点で，どの3点も共線上にない点の最大個数 $m_3(p=3,s)$ は Bose[2] により

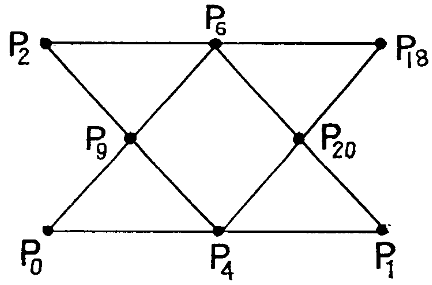
$$\text{(7.2)}\qquad m_3(3,s)=\begin{cases} s+2\ ,\ s=2^q & \text{のとき} \\ s+1\ ;\ s=p^q\ ;\ p & \text{が奇数のとき,} \end{cases}$$

この場合は $s=4$ であるから，どの3個の点も共線上にない点の最大個数は6であることより，$n\leqq 6$ のとき表の結果を得る．任意の他の点を生成グラフに添加すれば，すくなくとも一つの直線上に3個の点があるから．$n=7$ のとき表の結果を得る，7番目の点は P_0, P_1, P_2, P_{18}, P_9, P_{20} 以外のどの点を選んでも，生成グラフは同じ構造をもつ．例えば P_6 をえらべは (E. 7.3) となる．生成グラフ (E. 7.3) に8番目の点として残りの点のうち3点のみが共線となるのは P_4, P_8, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{17} のみである．このうちどの点を選んで生成グラフ (E. 7.3) に添加しても同じ構造をもつ．たとえば8番目の点として P_4 を選べば生成グラフは (E. 7.4)

(E. 7.3)

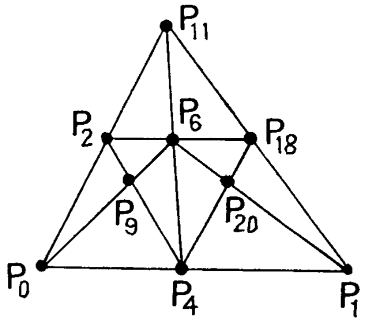


(E. 7.4)



になる．したがって $n=8$ のとき表の結果を得る．生成グラフ (E. 7.4) 以外の点で直線上に高々 3 点であるものは P_{11}, P_{12}, P_{15}, P_{17} である．この 4 点のうち点 P_{11} を添加してできる生成グラフは

(E. 7.5)



となる．したがって $n=9$ のとき表の結果を得る．$n=10$ のとき生成グラフ (E. 7.4) に点 P_{11}, P_{12}. P_{15}, P_{17} のどの 2 点を添加しても，すくなくとも一つの直線上に 4 点がある．したがって $n=10$ のとき表の結果を得る．$n=16$ のとき (E. 7.4) に P_3, P_5, P_7, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{17} を添加して出来る生成グラフは直線に高々 4 個の点を有する．したがって $n=16$ のとき表の結果を得る．$n=11$ から 15 までは一点づつ添加していけばよいから表の結果になる．最後に PG(2.4) 上の直線上には 5 個の点があり，どの点を通る直線も 5 個であるから 4 個の点のみですべての直線上にあるようにすることができない．したがって $n=17$ のとき生成グラフ上のすくなくとも一つの直線上に 5 個の点がある．したがって $n=17$ のとき表の結果を得る．$n>18$ のときは残りの点を 1 点づつ添加すればよい．

例 (7.2)　4^{8-3}(F) 計画生成行列として

$$\text{(E. 7.6)} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

とするとき，重み関数はつぎの様になる．モヅル関数が $M(x)=1+x+x^2+x^4+x^6+x^9+x^{18}+x^{20}$ であるから (4.9) より

$$\text{(E. 7.7)} \quad W(x)=5+6x+5x^2+7x^3+5x^4+5x^5+5x^6+6x^7+6x^8+5x^9+8x^{10}+6x^{11}$$
$$+8x^{12}+7x^{13}+6x^{14}+8x^{15}+6x^{16}+6x^{17}+6x^{18}+6x^{19}+x^{20}$$

となる．この計画においてはつぎの21個の一般交互作用が一般平均と別名になる．

$A_1\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7$	$A_1\ A_3^{\alpha}\ A_4^{\alpha^2}\ A_6^{\alpha}\ A_7^{\alpha}\ A_8^{\alpha^2}$	$A_1\ A_2\ A_3^{\alpha^2}\ A_4^{\alpha^2}\ A_5\ A_6^{\alpha^2}\ A_7$
$A_2\ A_4\ A_5^{\alpha}\ A_6^{\alpha^2}\ A_7^{\alpha}\ A_8$	$A_1\ A_3^{\alpha^2}\ A_4^{\alpha}\ A_5^{\alpha^2}\ A_8$	$A_1\ A_2^{\alpha}\ A_3\ A_4^{\alpha}\ A_5\ A_6^{\alpha}$
$A_3\ A_4\ A_5^{\alpha^2}\ A_6^{\alpha}\ A_7^{\alpha}\ A_8^{\alpha}$	$A_2\ A_3\ A_5\ A_6\ A_8^{\alpha^2}$	$A_1\ A_2^{\alpha}\ A_3^{\alpha}\ A_4\ A_5^{\alpha^2}\ A_6^{\alpha^2}\ A_7\ A_8$
$A_1\ A_2\ A_5^{\alpha^2}\ A_6^{\alpha}\ A_7^{\alpha^2}\ A_8$	$A_2\ A_3^{\alpha}\ A_4^{2}\ A_5^{2}\ A_7\ A_8^{\alpha}$	$A_1\ A_2^{\alpha}\ A_3^{\alpha^2}\ A_6\ A_7^{\alpha^2}\ A_8^{\alpha^2}$
$A_1\ A_2^{\alpha}\ A_4^{\alpha^2}\ A_5^{\alpha}\ A_7^{\alpha}\ A_8^{\alpha}$	$A_2\ A_3^{\alpha^2}\ A_4^{\alpha}\ A_6^{\alpha}\ A_7^{\alpha^2}$	$A_1\ A_2^{\alpha^2}\ A_3\ A_4^{\alpha^2}\ A_5^{\alpha^2}\ A_6\ A_7^{\alpha}\cdot A_8$
$A_1\ A_2^{\alpha^2}\ A_4^{\alpha}\ A_6^{\alpha^2}\ A_8^{\alpha^2}$	$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_7\ A_8^{\alpha^2}$	$A_1\ A_2^{\alpha^2}\ A_3^{\alpha}\ A_5\ A_7^{\alpha^2}$
$A_1\ A_3\ A_5^{\alpha}\ A_6^{\alpha^2}\ A_7^{\alpha^2}\ A_8^{\alpha}$	$A_1\ A_2\ A_3^{\alpha}\ A_4^{\alpha}\ A_5^{\alpha}\ A_6\ A_8^{\alpha}$	$A_1\ A_2^{\alpha^2}\ A_3^{\alpha^2}\ A_4\ A_5^{\alpha}\ A_6^{\alpha}\ A_7\ A_8^{\alpha}$

この 4^{8-3} 計画の要因分解能は5で最適な計画となる．

参　考　文　献

[1] Alanen, J. D. and knuth, D. E. (1964) Table of finite fields. *Sankhyā Ser. A, Vol. 26.*

[2] Bose, R. C. (1947) Mathematical theory of the symmetrical factorial design. *Sankhyā Vol. 8.*

[3] Bose, R. C. and Bush, K. A. (1952) Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. Math. Statist. Vol. 23.*

[4] Bose, R. C. and Shimamoto, T. (1952) Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. *J. Amer. Statist. Assoc. Vol. 47.*

[5] Bose, R.C. and Srivastava, J. N. (1964) On a bound useful in the theory of factorial designs and error correcting codes. *Ann. Math. Statist., Vol. 23.*

[6] Box, G. E. P. and Hunter, J. S. (1961) The 2^{k-p}-fractional factorial designs. *Part I and Part II. Technometrics Vol. 3, No. 3, No. 4,*

[7] Fisher, R. A. (1942) The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of groups. *Ann. Eugen. London 11.*

[8] Fisher, R. A. (1945) A systen of confounding for factors with more than two alternatives given completely orthogonal Cubes and higher powers. *Ann. Eugen. London 12.*

[9] Fujii, Y. (1967) Geometrical association schemes and fractional factorial designs. *J. Sci, Hiroshima Univ. Ser. A-I, Vol. 31.*

[10] Griesmer, J. H. (1960) A bound for error corecting code. *IBM J. Res. Develop. 4, No. 5.*

[11] Kempthorne, O. (1952) *The design and analysis of experiments.* New York, John Wiley & Sons, Inc.

[12] Ogawa, J. (1959) *The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block design.* Inst. Statist. mimeo. Ser. 224, Chapel Hill, N. C.

[13] Robillard, P. (1968) *Combinatorial problems in the theory of factorial designs and error correcting codes.* Inst. Statist. mimeo. Ser. no. 594 Chapel Hill, N. C.

[14] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963) Analysis of partially balanced incomplete block designs. *J. Sci Hiroshima Univ.* Ser. A—I, *Vol. 27.*

[15] Slepian, D(1956) A class of binary signaling alphabets. *Bell Seystem Technical Jour. Vol. 45.*

[16] Yamamoto, S., Fuiii, Y. and Hamada, N. (1965) Composition of some series of association algebras. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I, Vol. 29, No. 2.*

[17] Yamamoto, S., Fukuda T. and Hamada, N. (1966) On finite geometries and cyclically generated inc-

omplete block designs. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I, Vol. 30.*

[18] Weyl, H. (1939) *The classical groups their invariants and representations.* Lond. Princton Univ. Press.