

# 非線型モデルにおけるパラメータの推定と予測

## ——条件式の線型化と、改訂最小二乗法にもとづく逐次近似方式——

仮 谷 太 一

最小二乗法によるパラメータの推定と将来値の予測については、観測値の調整も含めて、1946年に W. E. Deming が [1] においてすでに、その一般的な取扱い方を示している。観測データの変換に伴って、それらの重みが変化することを明らかにし、計算値（調整値）が従うべき一般の条件式を線型化して、重みつき残差平方和を最小にするための計算を容易にしているが、このことは面倒な計算をほとんどコンピュータに負う今日でも、いぜんとして必要な処置たるを失わない。

さらに、条件式の線型化による残差平方和の最小値からのずれを、反復計算のつど補正して進むことは、理論的にも、計算の効率化のためにも大切であるが、このことについては、1961年 H. O. Hartley [2] によって工夫がなされた。なお、推定すべきパラメータの初期値についても、予測の実際に当っては、予測プログラムの中に組み込まれていることが望ましい。

筆者はこの問題に関連して、一部をそれぞれ1966年5月の日本オペレーションズ・リサーチ学会 [4]、同年9月の日本統計学会 [5] で発表したが、ここでまとめて報告する。具体的に計算結果を呈示するため、非線型なモデル一般についてではなくて、動植物人口の増殖現象とか、各種の流行現象および、ある地域における耐久消費財の普及率など、いろいろの生長現象の予測にしばしば用いられるモデルについて考察する。

この、いわゆる Logistic Curve のあてはめについては、従来各種の方法が工夫され、実際に用いられてきたが、前記の研究があるにも拘らず、厳密な数学的な取り扱いがなされておらず、同一のデータにもとづく推定値であっても、人によって大いに異なり、信頼性に欠けるうらみがあった。そこでこうした問題に対し、観測データの誤差に適当な仮定をおいて、データの構造モデルを構成し、それぞれのモデルに対して最適な推定値を得ようとするものである。

具体的な問題においては、一般論の場合とはまた異った意味で面倒な問題があり、プログラミングにもいろいろと創意工夫が必要である。なお、実際の数値例としては、昭和40年12月以降44年4月までの、月別カラー・テレビの国内出荷台数を用いた。

- § 1. 経済事象などにおけるデータの対数変換の意義.
- § 2. 条件式線型化の補正を含むループを用いて行う、非線型パラメータの最小二乗推定と予測.
  - (I) 直接法.
  - (II) 逆数変換法.
- § 3. 季節変動項を含む Logistic Curve のパラメータ推定と予測.
- § 4. 合成 Logistic Curve のパラメータ推定と予測.

### § 1. 経済事象などにおけるデータの対数変換の意義.

「観測して得られるデータをそのまま用いるよりも、対数変換をほどこしてから分析を行うほうがよい。計算的にも簡便であり、予測の精度も高くなる場合が多い」という説が従来一般に流布されており、事実多くの適用例が見出される。特に変化量が現在量に比例するような経済的事象では、ほとんどこの線に沿うて分析が行われ、かなりな成功をおさめてきたように思われる。しかしこのことは、時系列データが指數曲線にはほぼマッチしており、観測誤差が現在量に比例するような場合に、たまたまそうなのであって、経済事象に限ってみても、必ずしも常に妥当性をもつわけではない。

それぞれの観測データの統計的な重みづけを考える新しい最小二乗法の立場では、データの変換を行えば、変換されたデータの重みが変化することになり、結果として得られる推定値や予測の精度には本質的な差異はない。このことを簡単な例について証明しておこう。

データの構造モデルが、つきのような場合について考える。

$$Y_i = \alpha e^{-\beta x_i} + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

ここに、 $\alpha, \beta$  は未知の定数、 $\varepsilon_i$  は

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad V(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = (\sigma \cdot \gamma_i)^2, \quad \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (2)$$

を満足する確率変数とし、

$\eta_i = \alpha e^{-\beta x_i}$ 、 $\sigma$  は適当な正の定数とする。

また、 $Y_i$  は観測値、 $x_i$  は誤差を含まない確定変数であるとする。

$$\text{このとき} \quad E(Y_i) = \eta_i, \quad V(Y_i) = V(\varepsilon_i) = (\sigma \cdot \gamma_i)^2 \quad (3)$$

(1) を  $\varepsilon_i$  について解けば

$$\varepsilon_i = Y_i - \alpha e^{-\beta x_i} = Y_i - \eta_i \quad (4)$$

となる。この誤差  $\varepsilon_i$  は、 $\alpha, \beta$  が未知の定数であるから知るよしもないが、 $\alpha, \beta$  をその推定値  $a, b$  でおきかえたものは計算できる。これを残差 ( $e_i$ ) とよんで、誤差  $\varepsilon_i$  と区別する。

$$e_i = Y_i - ae^{-bx_i} = Y_i - y_i \quad (\text{ただし } y_i = ae^{-bx_i}) \quad (5)$$

さて観測値  $Y_i$  の重み ( $w_i$ ) を

$$W_i = \sigma_i^2 / \sigma_i^2 = 1 / \gamma_i^2 = 1 / y_i^2 = w_i \quad (6)$$

によって定義すると、新しい最小二乗法は

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i e_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{Y_i - y_i}{y_i} \right)^2 \quad (7)$$

を最小にするように、 $a, b$  を定めることである。

つぎに上記の構造をもつデータに対数変換を行ってみよう。

$$\begin{aligned} \log Y_i &= \log \left\{ \alpha e^{-\beta x_i} \left( 1 + \frac{\varepsilon_i}{\alpha e^{-\beta x_i}} \right) \right\} \\ &= \log \alpha - \beta x_i + \log \left( 1 + \varepsilon_i / \alpha e^{-\beta x_i} \right) \\ &= \log \alpha - \beta x_i + \varepsilon_i / \gamma_i + o((\varepsilon_i / \gamma_i)^2) \end{aligned}$$

従って対数変換されたデータの構造モデルは

$$\log Y_i = \log \alpha - \beta x_i + \varepsilon_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)^*$$

(ただし  $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i / \gamma_i$ ,  $O((\varepsilon_i / \gamma_i)^2)$  は無視する)

$$E(\varepsilon_i^*) = 0, \quad V(\varepsilon_i^*) = \sigma^2, \quad Cov(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*) = 0 \quad (i \neq j) \quad (2)^*$$

となる。

$$\text{このとき} \quad E(\log Y_i) = \log \gamma_i, \quad V(\log Y_i) = \sigma^2 \quad (3)^*$$

$$\text{また,} \quad \varepsilon_i^* = \log Y_i - \log \alpha - \beta x_i \quad (4)^*$$

$\log \alpha, \beta$  の推定値をそれぞれ  $\log a, b$  とすると, 残差 ( $e_i^*$ ) は

$$e_i^* = \log Y_i - \log a - bx_i \quad (5)^*$$

対数変換されたデータ  $\log Y_i$  の重みを  $w_i^*$  とすると

$$W_i^* = \sigma^2 / \sigma^2 = 1 = w_i^* \quad (6)^*$$

従って重みつきの残差平方和  $Q^*$  は

$$\begin{aligned} Q^* &= \sum_{i=1}^n w_i^* (e_i^*)^2 = \sum (\log Y_i - \log a - bx_i)^2 \\ &= \sum \left( \log \frac{Y_i}{y_i} \right)^2 \\ &= \sum \left\{ \log \left( 1 + \frac{Y_i - y_i}{y_i} \right) \right\}^2 \end{aligned}$$

ここで  $\left| \frac{Y_i - y_i}{y_i} \right| \ll 1$  であることを用いると

$$Q^* = \sum_{i=1}^n \left( \frac{Y_i - y_i}{y_i} \right)^2 \quad (7)^*$$

となり (7) の  $Q$  に一致する。

故に,  $Q^*$  を最小にする  $\alpha, \beta$  の推定値は

$Q$  を最小にする  $\alpha, \beta$  の推定値に一致することがわかる。

以上によって, データの構造モデルとして, (1) (2) が妥当であるような場合には, データを対数変換すれば, (1)\* (2)\* となり, 変換されたデータの重み  $w_i^*$  はすべて 1 に等しくなるから, 一見データの重みを考えに入れていないような初等的な最小二乗法に一致し, 計算は簡単で予測の精度も高いということになるわけである。

## § 2. 条件式線型化の補正を含むループを用いて行う, 非線型パラメータの最小二乗推定と予測.

具体的に計算結果を呈示するために, Logistic Curve をとりあげ, 観測データを変換しないで直接  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  を求める場合と, 観測データを逆数変換してから,  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  を求める場合とを比較して計算結果を示す。

観測データの構造モデルを

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma x_i}} + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

とする。ここに  $\alpha, \beta, r$  は未知の定数,  $x_i$  は誤差を含まない確定変数とし,  $\varepsilon_i$  は確率変数で

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad V(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \quad Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (9)$$

とする。

なお,  $\sigma_i^2$  については、いろいろの場合が考えられるが、それらを、それぞれに対応する  $w_i$  と並べて列挙するとつきのようになる。

$$\left. \begin{array}{ll} (\text{i}) & \sigma_i^2 = \sigma^2, \quad w_i = 1 \\ (\text{ii}) & \sigma_i^2 = \sigma^2 (A\eta_i)^2, \quad w_i = 1 / (A\eta_i)^2 \quad \text{ただし } A\eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i \\ (\text{iii}) & \sigma_i^2 = \sigma^2 (A\eta_i), \quad w_i = 1 / A\eta_i \\ (\text{iv}) & \sigma_i^2 = \sigma^2 \cdot \eta_i^2, \quad w_i = 1 / \eta_i^2 \\ (\text{v}) & \sigma_i^2 = \frac{\eta_i}{\alpha} \left(1 - \frac{\eta_i}{\alpha}\right) / n_i, \quad w_i = n_i \alpha^2 / \eta_i (1 - \eta_i) \end{array} \right\} \quad (10)$$

ただし  $n_i$  は標本調査の場合  $\eta_i$  を推定するための標本の大きさ。

ところで、観測データを逆数変換すると、データの構造モデルは次のようになる。

まず (8) 式より、

$$\frac{1}{Y_i} = \frac{1}{\eta_i} \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\eta_i}\right)^{-1} \doteq \frac{1}{\eta_i} - \frac{\varepsilon_i}{\eta_i^2}$$

$\varepsilon_i^* = -\varepsilon_i / \eta_i^2$  とおくと

$$\frac{1}{Y_i} = \frac{1}{\eta_i} + \varepsilon_i^* \quad (11)$$

$$E(\varepsilon_i^*) = 0, \quad V(\varepsilon_i^*) = \sigma_i^2 / \eta_i^4, \quad Cov(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*) = 0 \quad (i \neq j) \quad (12)$$

また (10) 式に対応するものは

$$\left. \begin{array}{ll} (\text{i}) & (\sigma_i^*)^2 = \sigma^2 / \eta_i^4, \quad w_i^* = \eta_i^4 \\ (\text{ii}) & (\sigma_i^*)^2 = \sigma^2 (A\eta_i)^2 / \eta_i^4, \quad w_i^* = \eta_i^4 / (A\eta_i)^2 \\ (\text{iii}) & (\sigma_i^*)^2 = \sigma^2 (A\eta_i) / \eta_i^4, \quad w_i^* = \eta_i^4 / A\eta_i \\ (\text{iv}) & (\sigma_i^*)^2 = \sigma^2 / \eta_i^2, \quad w_i^* = \eta_i^2 \\ (\text{v}) & (\sigma_i^*)^2 = \frac{\eta_i}{\alpha} \left(1 - \frac{\eta_i}{\alpha}\right) / n_i \eta_i^4, \quad w_i^* = n_i \alpha^2 \eta_i^3 / (1 - \eta_i) \end{array} \right\} \quad (13)$$

注:  $Y_i$  が大きさ  $n_i$  の標本から算定された標本比率（例えばある耐久消費財の普及率）であるような場合は、(10), (13) の (v) に該当するわけであるが、このときはさらに  $\varepsilon_i \sim N(0, \eta_i(1 - \eta_i)/n_i)$  とすることも可能であり、 $\varepsilon_i$  についての検定も可能になる。

つぎに、これらの場合について一般的に最小二乗法を考察しよう。

$x_i$  は確定変数で誤差を含まないものとする。

観測値:	$Z_1$	$Z_2$	$\cdots$	$Z_n$	$a_0$	$b_0$	$c_0$	(初期値)
計算値:	$z_1$	$z_2$	$\cdots$	$z_n$	$a$	$b$	$c$	
重み:	$w_1$	$w_2$	$\cdots$	$w_n$	1	1	1	
真の値:	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\cdots$	$\zeta_n$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
残差:	$\Delta z_1$	$\Delta z_2$	$\cdots$	$\Delta z_n$	$\Delta a$	$\Delta b$	$\Delta c$	

(観測誤差の間には、相関はないものとする。)

$$\Delta z_i = Z_i - z_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \Delta a = a_0 - a, \quad \Delta b = b_0 - b, \quad \Delta c = c_0 - c$$

問題を整理すると、

計算値  $x_i, z_i$  の間に、 $f$  の関数型を既知として、 $n$  個の条件式

$$F_i = z_i - f(x_i; a, b, c) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

が与えられているとき、この条件の下で

重みつきの残差平方和

$$Q(a, b, c) = \sum w_i (\Delta z_i)^2 \quad (16)$$

を最小にするようなパラメータ  $a, b, c$  を求めよ。

この問題は、Lagrange の乗数法によって解くことができるはずであるが、しかし条件式が  $a, b, c$  に関して線型でないときには、簡単には解けない。そこで条件式を線型化する工夫をし、逐次に近似の度を高めて解を求めるこことを考える。

### 《条件式の線型化》

条件式 (15)において、 $z_i = Z_i - \Delta z_i$  とし、 $f$  を  $a_0, b_0, c_0$  でテーラー展開し、残差の 2 次以上の項を無視して整理すると、

$$F_0^i = \Delta z_i - f_a^i \cdot \Delta a - f_b^i \cdot \Delta b - f_c^i \cdot \Delta c \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

となる。ここに  $F_0^i = Z_i - f(x_i; a_0, b_0, c_0)$  および、 $f_a^i = f_a(x_i; a_0, b_0, c_0)$  などとする。

これらの式は  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  に関して 1 次の式である。

従って問題はひとまず

$$n \text{ 個の条件式 } F_0^i = \Delta z_i - f_a^i \cdot \Delta a - f_b^i \cdot \Delta b - f_c^i \cdot \Delta c \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

の下で、重みつきの残差平方和

$$Q(a_0 - \Delta a, b_0 - \Delta b, c_0 - \Delta c) = \sum w_i (\Delta z_i)^2 \quad (18)$$

を最小にするような  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  を求めよ。

となる。

これは Lagrange の乗数法によって簡単に解くことができる。

さて、そのときの  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  に関する正規方程式は次のようになる。

[ ] は  $i$  について、1 から  $n$  までの和をとることを意味する。

$\Delta a$	$\Delta b$	$\Delta c$	=	1
$[w_i f_a^i f_a^i]$	$[w_i f_a^i f_b^i]$	$[w_i f_a^i f_c^i]$	$- [w_i f_a^i F_0^i]$	
$[w_i f_b^i f_a^i]$	$[w_i f_b^i f_b^i]$	$[w_i f_b^i f_c^i]$	$- [w_i f_b^i F_0^i]$	(19)
$[w_i f_c^i f_a^i]$	$[w_i f_c^i f_b^i]$	$[w_i f_c^i f_c^i]$	$- [w_i f_c^i F_0^i]$	

### 《条件式の線型化によるずれの補正》

正規方程式 (19) を解いて得られる  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  を用い、初期値  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  の近似の度を高めて、次の反復計算に移るのであるが、このさい、直ちに

$$a_1 = a_0 - \Delta a, \quad b_1 = b_0 - \Delta b, \quad c_1 = c_0 - \Delta c$$

とはしない。条件式の線型化によるずれを補正するために

$$Q(v) = Q(a_0 - v\Delta a, b_0 - v\Delta b, c_0 - v\Delta c) \quad (20)$$

を計算し、 $Q(v)=$ 最小をみたす  $v$  の値  $v'$  を求める。

この  $v'$  を用いて

$$a_1 = a_0 - v' \cdot \Delta a, \quad b_1 = b_0 - v' \cdot \Delta b, \quad c_1 = c_0 - v' \cdot \Delta c \quad (21)$$

とすれば、これらは  $v=1$  とした場合よりも、 $a$ ,  $b$ ,  $c$  のよりよい（悪くない）近似値となっている。

なお、実際の計算では、 $v=0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 2, \dots, 10$  とした。また、 $v=0$  のとき  $Q(v)$  が最小となる場合には  $v'=0.5$  として反復計算を強制した。

これらの  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  の値を、 $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  の代りに用いて、上の計算を繰返えし、収束するまで反復すれば、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  の最小二乗推定値  $a$ ,  $b$ ,  $c$  が得られる。

### 《初期値の計算》

ここではつぎの2つのうち、いずれかによることとした。

選点法： $n$  個のデータ  $(x_i, Y_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) のうち、 $x_i$  の小さいもの、中位のもの、大きいものをそれぞれ若干個ずつ選んで  $(\bar{x}_L, \bar{Y}_L)$ ,  $(\bar{x}_M, \bar{Y}_M)$ ,  $(\bar{x}_U, \bar{Y}_U)$  を算定し、 $Y=\alpha/(1+\beta e^{-\gamma x})$  に代入して、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  を求め、 $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  とする。

退化法：本質的には線型なモデル  $1/Y_i = \frac{\beta}{\alpha} e^{-\gamma x_i} + \varepsilon'_i$  を  $(x_i, 1/Y_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) にあてはめて、 $(\hat{\beta}/\hat{\alpha})$ ,  $\hat{\gamma}$  を求めそれぞれ  $b'_0$ ,  $c_0$  とする。 $(1/\hat{\alpha})$  の初期値としては、

例えは  $a'_0 = b'_0 e^{-c_0 x_n}$  とする。

これから  $a_0 = 1/a'_0$ ,  $b_0 = b'_0 \cdot a_0$ ,  $c_0$  を得る。

### 《数値例》

昭和40年12月から昭和44年4月までにいたる、カラーテレビ国内出荷台数累計の月別データを用いた。（単位 万台）

誤差分散仮説 (i) の直接法による場合、誤差分散仮説 (ii) の逆数変換法による場合の反復計算の実際を例示すると次のとおりである。

直接法 ( $V(\varepsilon_i) = \sigma^2, w_i = 1$ )

CYC	A	B	C	Q(O)	DA	DB	DC	V
0	.13246 E +04	.17529 E +02	.10155 E +00	.24685 E +04	.7930 E +03	.1193 E +02	-.8099 E -02	0.3
1	.10866 E +04	.13949 E +02	.10398 E +00	.18986 E +04	.3118 E +03	.4711 E +01	-.5876 E -02	0.6
2	.89958 E +03	.11122 E +02	.10751 E +00	.13730 E +04	.4304 E +02	.6683 E +00	-.2413 E -02	1.0
3	.85654 E +03	.10454 E +02	.10992 E +00	.10720 E +04	-.4619 E +01	-.6513 E -01	.4916 E -04	1.0
4	.86116 E +03	.10519 E +02	.10987 E +00	.10709 E +04	-.1133 E +00	-.1497 E -02	.3335 E -05	0.9
5	.86126 E +03	.10520 E +02	.10987 E +00	.10709 E +04	-.1205 E -01	-.1612 E -03	.3441 E -06	0.6
6	.86127 E +03	.10520 E +02	.10987 E +00	.10709 E +04	-.4875 E -02	-.6536 E -04	.1386 E -06	
	$\hat{\alpha} = .86127 E +03$							
	$\hat{\beta} = .10520 E +02$							
	$\hat{\gamma} = .10987 E +00$							

逆数変換法 ( $V(\varepsilon_i^*) = \sigma^2 (\Delta y_i)^2 / y_i^4, w_i^* = y_i^4 / (\Delta y_i)^2$ )

CYC	A*	B*	C	Q(O)	DA*	DB*	DC	V
0	.75497 E -03	.13234 E -01	.10155 E +00	.13775 E +02	-.2629 E -03	.6630 E -03	-.5434 E -02	1.0
1	.10179 E -02	.12571 E -01	.10699 E +00	.88231 E +01	.2924 E -05	.2308 E -04	-.3023 E -03	1.0
2	.10150 E -02	.12548 E -01	.10729 E +00	.87297 E +01	-.1032 E -05	.2171 E -05	-.1695 E -04	※ .5
3	.10155 E -02	.12547 E -01	.10730 E +00	.87298 E +01	-.5466 E -06	.1147 E -05	-.8958 E -05	※ .5
4	.10158 E -02	.12546 E -01	.10730 E +00	.87299 E +01	-.2894 E -06	.6064 E -06	-.4734 E -05	※ .5
5	.10159 E -02	.12546 E -01	.10731 E +00	.87299 E +01	-.1533 E -06	.3205 E -06	-.2502 E -05	※ .5
6	.10160 E -02	.12545 E -01	.10731 E +00	.87300 E +01	-.8115 E -07	.1694 E -06	-.1322 E -05	
	$\hat{\alpha} = .98425 E +03$							
	$\hat{\beta} = .12348 E +02$							
	$\hat{\gamma} = .10731 E +00$							

注: ※ .5 は  $Q(v) = \text{最小}$  を満足する  $v$  が 0 に等しい場合、 $v' = 0.5$  として強制したこと示す。

$$A^* = 1/A, B^* = B/A$$

なお、誤差分散仮説 (i), (ii) のとき、直接法と逆数変換法による推定結果を比較対照すると次表のとおりである。月別変動係数として示したものは、月別変動項を考慮しないで単純に Logistic Curve をあてはめたのち、 $(Y_i - y_i) / \Delta y_i$  を月別に平均して得たものである。この月別変動を加味することによって、 $Q$  の値はずっと小さくなっている。

	$V(Y_i) = \sigma^2(\text{一定})$		$V(Y_i) = \sigma^2(\Delta y_i)^2$	
	直 接 法	逆 数 变 换 法	直 接 法	逆 数 变 换 法
反復回数	6	6	13	6
$\hat{\alpha}$	.86127 E +03	.86574 E +03	.97330 E +03	.98425 E +03
$\hat{\beta}$	.10520 E +02	.10615 E +02	.12160 E +02	.12348 E +02
$\hat{\gamma}$	.10987 E +00	.10985 E +00	.10745 E +00	.10731 E +00
$Q_{min}$	1070.9	1039.2	9.3321	8.7300

月別変動係数	1月	0.431	0.456	0.399	0.418
	2月	0.214	0.238	0.181	0.199
	3月	0.125	0.148	0.088	0.105
	4月	0.055	0.077	0.011	0.028
	5月	-0.035	-0.007	-0.016	0.008
	6月	-0.159	-0.132	-0.132	-0.108
	7月	-0.294	-0.267	-0.259	-0.236
	8月	-0.462	-0.435	-0.421	-0.397
	9月	-0.470	-0.444	-0.424	-0.401
	10月	-0.398	-0.373	-0.351	-0.327
	11月	-0.053	-0.028	-0.005	0.019
	12月	0.559	0.585	0.527	0.547
$Q'min$		283.45	299.48	5.7284	5.8106

注：反復回数は、選点法によって求めた同一の初期値から出発したときのものである。また収束判定については、すべての推定値の有効数字の上5桁が一致したとき、収束したものとした。

### § 3. 季節変動項を含む Logistic Curve のパラメータ推定と予測、

観測データの構造モデルは

$$Y_i = f(x_i; \alpha, \beta, \gamma) + \rho_j \cdot \Delta f^i + \varepsilon_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

ここで、 $j=i-\left[\frac{i-1}{12}\right] \times 12$ ，[ ] はガウスの記号，

$\Delta f^i = f(x_{i+1}; \alpha, \beta, \gamma) - f(x_i; \alpha, \beta, \gamma)$  とする。

$$\varepsilon_{ij} \text{ は } E(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad V(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2, \quad Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}) = 0 \quad (i \neq k) \quad (23)$$

を満足する確率変数で、 $x_i$  は誤差を含まない確定変数とする。

観測値：	$Y_1$	$Y_2$	…	$Y_n$	$a_0$	$b_0$	$c_0$	$r_1^0$	$r_2^0$	…	$r_{12}^0$	(初期値)
計算値：	$y_1$	$y_2$	…	$y_n$	$a$	$b$	$c$	$r_1$	$r_2$	…	$r_{12}$	
重み：	$w_1$	$w_2$	…	$w_n$	1	1	1	1	1	…	1	
真の値：	$\eta_1$	$\eta_2$	…	$\eta_n$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho_1$	$\rho_2$	…	$\rho_{12}$	
残差：	$\Delta y_1$	$\Delta y_2$	…	$\Delta y_n$	$\Delta a$	$\Delta b$	$\Delta c$	$\Delta r_1$	$\Delta r_2$	…	$\Delta r_{12}$	

(観測誤差の間には、相関はないものとする)

$$y_i = f(x_i; a, b, c) + r_j \Delta f^i, \quad \Delta f^i = f(x_{i+1}; a, b, c) - f(x_i; a, b, c) \quad (\text{ただし } \Delta x_i = 1 \text{ とする})$$

$$\Delta y_i = Y_i - y_i; \quad \Delta a = a_0 - a, \quad \Delta b = b_0 - b, \quad \Delta c = c_0 - c; \quad \Delta r_j = r_j^0 - r_j$$

$\sigma_i^2$  とそれに対応して定まる  $w_i$  については、(10) の場合を考える。

ただし  $\Delta \eta_i$  の代りに  $\Delta f^i$  を用いる。

問題を整理すると、つきのようになる。

$$F_i = y_i - f(x_i; a, b, c) - f(x_{i+1}; a, b, c) r_j = 0 \quad (24)$$

$$(i=1, 2, \dots, n), \quad (j=i-\left[\frac{i-1}{12}\right] \times 12)$$

なる条件の下で、重みつきの残差平方和

$$Q(a, b, c; r_1, r_2, \dots, r_{12}) = \sum w_i (\Delta y_i)^2 \quad (25)$$

を最小にするようなパラメータ  $a, b, c; r_1, r_2, \dots, r_{12}$  を求めよ。

条件式 (24) において、 $y_i = Y_i - \Delta y_i$ ,  $r_j = r_j^0 - \Delta r_j$  とし、 $f, f_x$  を  $a_0, b_0, c_0, r_j^0$  でテーラー展開し、残差の2次以上の項を無視すると、

$$F_0^i = \Delta y_i - (f_a^i + r_j^0 f_{xa}^i) \Delta a - (f_b^i + r_j^0 f_{xb}^i) \Delta b - (f_c^i + r_j^0 f_{xc}^i) \Delta c - f_x^i \Delta r_j$$

となる。ここに  $F_0^i = Y_i - f(x_i; a_0, b_0, c_0) - f_x(x_i; a_0, b_0, c_0) r_j^0$ , および  $f_x^i, f_a^i, f_{xa}^i$  などはすべて  $(x_i; a_0, b_0, c_0)$  における値である。

従って問題は前節と同様、ひとまずつぎの問題を解くことになる。

$$F_0^i = \Delta y_i - (f_a^i + r_j^0 f_{xa}^i) \Delta a - (f_b^i + r_j^0 f_{xb}^i) \Delta b - (f_c^i + r_j^0 f_{xc}^i) \Delta c - f_x^i \Delta r_j \quad (26)$$

なる条件の下で、重みつきの残差平方和

$$Q(a_0 - \Delta a, \dots; r_j^0 - \Delta r_j) = \sum w_i (\Delta y_i)^2 \quad (27)$$

を最小にするようなパラメータ  $\Delta a, \Delta b, \Delta c; \Delta r_1, \dots, \Delta r_{12}$  を求めよ。

さてこのとき、 $\Delta a, \Delta b, \Delta c; \Delta r_j$  に関する正規方程式は

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta r_1 & \Delta r_2 & \cdots & \Delta r_{12} & \Delta a & \Delta b & \Delta c & = & 1 \\ \hline [wf_x f_x]_1 & 0 & \cdots & 0 & [wH_a f_x]_1 & [wH_b f_x]_1 & [wH_c f_x]_1 & -[wF_0 f_x]_1 \\ 0 & [wf_x f_x]_2 & & 0 & [wH_a f_x]_2 & [wH_b f_x]_2 & [wH_c f_x]_2 & -[wF_0 f_x]_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [wf_x f_x]_{12} & [wH_a f_x]_{12} & [wH_b f_x]_{12} & [wH_c f_x]_{12} & -[wF_0 f_x]_{12} \\ [wH_a f_x]_1 & [wH_a f_x]_2 & \cdots & [wH_a f_x]_{12} & [wH_a H_a] & [wH_a H_b] & [wH_a H_c] & -[wF_0 H_a] \\ [wH_b f_x]_1 & [wH_b f_x]_2 & \cdots & [wH_b f_x]_{12} & [wH_b H_a] & [wH_b H_b] & [wH_b H_c] & -[wF_0 H_b] \\ [wH_c f_x]_1 & [wH_c f_x]_2 & \cdots & [wH_c f_x]_{12} & [wH_c H_a] & [wH_c H_b] & [wH_c H_c] & -[wF_0 H_c] \end{array}$$

ここに、 $H_a^i = f_a^i + r_j^0 f_{xa}^i$ ,  $H_b^i = f_b^i + r_j^0 f_{xb}^i$ ,  $H_c^i = f_c^i + r_j^0 f_{xc}^i$

$[ ]$  は  $\sum_{i=1}^n$  を表わし、 $[ ]_k$  は  $k$  月のデータについての和をあらわす。

上記正規方程式を解いて得られる  $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta r_j$  から、前節同様条件式の線型化によるそれを補正して、次の近似値を算定し、収束するまで反復すれば  $\alpha, \beta, \gamma$  および  $\rho_j$  の最小二乗推定値が得られる。

また、初期値  $a_0, b_0, c_0$  は、季節変動項を考慮しない前節のモデルによる推定値を用い、 $r_j^0$  は  $(Y_i - y_i)/\Delta y_i$  の月別平均値を計算して用いる。

### 《数値例》

誤差分散仮説 (i), すなわち  $V(Y_i) = \sigma^2$  (一定) 従って  $w_i = 1$  の場合について、前記カーラー

レビのデータにもとづく予測値をかける。

予測値甲は、季節変動項を含まないモデル(8)による予測値に、月別変動を加味した予測値。

予測値乙は、季節変動項を含むモデル(22)による予測値である。

なお、予測値甲の場合、 $Q=283.45$

予測値乙の場合、 $Q=121.82$ で、予測値乙の方が精度が高くなっている。

カラーテレビの国内出荷台数累計の推移とその予測値 (単位万台)

年 月	デ タ	予測値甲	予測値乙	年 月	デ タ	予測値甲	予測値乙
40 : 12	9,890	9,547	8,920	43 : 1	133,810	126,706	130,090
41 : 1	10,850	10,502	9,933	2	142,460	136,358	140,324
2	11,910	11,442	10,897	3	152,680	148,254	152,527
3	13,290	12,631	12,081	4	164,460	161,226	166,369
4	14,730	13,969	13,477	5	178,050	174,738	177,250
5	15,850	15,412	14,642	6	190,650	188,512	189,987
6	17,450	16,935	16,052	7	202,600	202,849	202,584
7	19,010	18,581	17,513	8	214,800	217,321	215,396
8	20,710	20,304	19,066	9	232,510	235,496	233,339
9	22,830	22,578	21,345	10	254,900	256,215	255,450
10	25,180	25,327	24,354	11	282,660	283,668	283,451
11	28,520	29,251	28,496	12	317,050	318,203	317,939
12	32,130	34,633	34,115	42 : 1	345,910	337,712	337,407
42 : 2	34,710	37,987	37,838	2	38,000	41,267	41,345
3	41,267	41,345	41,345	3	42,280	45,388	45,623
4	47,080	49,991	50,623	4	52,200	54,912	54,734
5	57,520	60,064	59,669	5	64,250	65,577	64,721
6	71,000	71,297	70,031	7	79,210	78,750	77,727
8	88,670	87,619	87,706	9	102,780	100,026	101,131
10	121,160	116,640	118,858	10	121,160	116,640	118,858
11	—	—	—	11	—	—	—
12	—	—	—	12	—	—	—

注：このさいの収束判定については、 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  では有効数字の上 5 衡、 $\hat{\rho}_j$  では有効数字の上 3 衡が一致したとき収束したものとした。

#### § 4. 合成 Logistic Curve のパラメータ推定と予測

観測データの構造モデルを

$$Y_i = \sum_{h=1}^k f_h(x_i; \alpha_h, \beta_h, \gamma_h) + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

とする。ここに  $\varepsilon_i$  は

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad V(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \quad Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (29)$$

をみたす確率変数で、 $x_i$  は誤差を含まない確定変数とする。

観測値:	$Y_1$	$Y_2$	$\cdots$	$Y_n$	$a_{10}$	$b_{10}$	$c_{10}$	$\cdots$	$a_{k0}$	$b_{k0}$	$c_{k0}$	(初期値)
計算値:	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$\cdots$	$a_k$	$b_k$	$c_k$	
重み:	$w_1$	$w_2$	$\cdots$	$w_n$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	
真の値:	$\eta_1$	$\eta_2$	$\cdots$	$\eta_n$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\cdots$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\gamma_k$	
残差:	$\Delta y_1$	$\Delta y_2$	$\cdots$	$\Delta y_n$	$\Delta a_1$	$\Delta b_1$	$\Delta c_1$	$\cdots$	$\Delta a_k$	$\Delta b_k$	$\Delta c_k$	

(観測誤差の間には、相関はないものとする)

$$y_i = \sum_{h=1}^k f_h(x_i; a_h, b_h, c_h), \quad \Delta y_i = Y_i - y_i,$$

$$\Delta a_h = a_{h0} - a_h, \quad \Delta b_h = b_{h0} - b_h, \quad \Delta c_h = c_{h0} - c_h$$

$\sigma_i^2$  とそれに対応して定まる  $w_i$  については、(10) のような場合が考えられる。

問題を整理すると、つぎのようになる。

$$F_i = y_i - \sum f_h(x_i; a_h, b_h, c_h) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

なる条件の下で、重みつきの残差平方和

$$Q(a_1, b_1, c_1; \dots; a_k, b_k, c_k) = \sum w_i (\Delta y_i)^2 \quad (31)$$

を最小にするようなパラメータ  $a_1, b_1, c_1; \dots; a_k, b_k, c_k$  を求めよ。

また前節同様、条件式の線型化を行うと、問題はひとまずつぎのようになる。

$$F_0^i = \Delta y_i - \sum_{h=1}^k (f_{ha}^i \cdot \Delta a + f_{hb}^i \cdot \Delta b + f_{hc}^i \cdot \Delta c) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

なる条件の下で、重みつきの残差平方和

$$Q(\Delta a_1, \Delta b_1, \dots, \Delta c_k) = \sum w_i (\Delta y_i)^2 \quad (33)$$

を最小にするようなパラメータ  $\Delta a_1, \Delta b_1, \Delta c_1; \dots; \Delta a_k, \Delta b_k, \Delta c_k$  を求めよ。

さて、このとき  $\Delta a_1, \dots, \Delta c_k$  に関する正規方程式は

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta a_1 & \Delta b_1 & \Delta c_1 & \Delta a_2 & \cdots & \Delta c_k & = & 1 \\ \left[ wf_{1a} f_{1a} \right] & \left[ wf_{1a} f_{1b} \right] & \left[ wf_{1a} f_{1c} \right] & \left[ wf_{1a} f_{2a} \right] & \cdots & \left[ wf_{1a} f_{kc} \right] & - & \left[ wf_{1a} F_0 \right] \\ \left[ wf_{1b} f_{1a} \right] & \left[ wf_{1b} f_{1b} \right] & \left[ wf_{1b} f_{1c} \right] & \left[ wf_{1b} f_{2a} \right] & \cdots & \left[ wf_{1b} f_{kc} \right] & - & \left[ wf_{1b} F_0 \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \left[ wf_{kc} f_{1a} \right] & \left[ wf_{kc} f_{1b} \right] & \left[ wf_{kc} f_{1c} \right] & \left[ wf_{kc} f_{2a} \right] & \cdots & \left[ wf_{kc} f_{kc} \right] & - & \left[ wf_{kc} F_0 \right] \end{array}$$

となる。ここに  $[ ]$  は  $\sum_{i=1}^n$  を表わす。

また、 $F_0^i = Y_i - \sum f_h(x_i; a_{10}, b_{10}, \dots, c_{k0})$ ,

$f_{ha}^i$  などは、 $\left( \frac{\partial}{\partial a} f_h \right)$  の  $(x_i; a_{10}, b_{10}, \dots, c_{k0})$  における値を表わす。

以下の計算要領は、前節までと全く同様である。

## &lt;&lt;数値例&gt;&gt;

$k=2$ , 誤差分散仮説 (i) すなわち  $V(\epsilon_i) = \sigma^2$ , ( $w_i=1$ ) の場合について, データとそれにもとづくパラメータの推定値および予測値を示す.

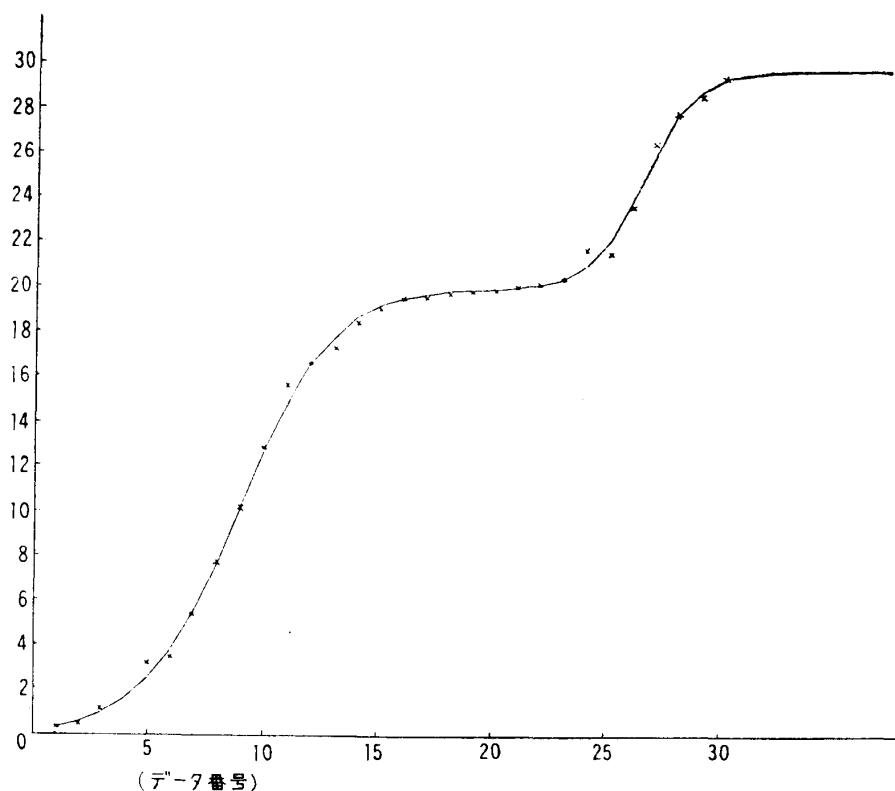
	初期 値	推 定 値		初期 値	推 定 值
$\hat{\alpha}_1$	.18000 E + 02	.20028 E + 02	$\hat{\alpha}_2$	.12000 E + 02	.98633 E + 01
$\hat{\beta}_1$	.15000 E + 00	.44572 E - 01	$\hat{\beta}_2$	.90000 E + 04	.21442 E + 05
$\hat{\gamma}_1$	.40000 E + 00	.50875 E + 00	$\hat{\gamma}_2$	.70000 E + 00	.87156 E + 00

$$Q(\text{初}) = .25672 \text{E} + 03, \quad Q_{\min} = .26237 \text{E} + 01, \quad \text{反復回数} 15 \text{回}$$

なお収束判定については、すべての推定値の有効数字の上 5 桁が一致したとき収束したものとした.

No.	x	デー タ	予測 値	No.	x	デー タ	予測 値
1	-14	0.291	0.356	21	6	20.122	20.071
2	-13	0.498	0.585	22	7	20.238	20.204
3	-12	1.092	0.955	23	8	20.557	20.481
4	-11	1.578	1.540	24	9	21.782	21.068
5	-10	3.083	2.437	25	10	21.663	22.207
6	-9	3.398	3.750	26	11	23.733	24.017
7	-8	5.261	5.548	27	12	26.612	26.132
8	-7	7.716	7.795	28	13	27.814	27.871
9	-6	10.216	10.305	29	14	28.731	28.932
10	-5	12.812	12.779	30	15	29.555	29.466
11	-4	15.639	14.935	31	16	—	29.709
12	-3	16.604	16.620	32	17	—	29.814
13	-2	17.347	17.830	33	18	—	29.859
14	-1	18.500	18.646	34	19	—	29.878
15	0	19.052	19.174	35	20	—	29.886
16	1	19.562	19.507	36	21	—	29.889
17	2	19.653	19.713	37	22	—	29.891
18	3	19.839	19.842	38	23	—	29.891
19	4	19.892	19.927	39	24	—	29.892
20	5	19.969	19.994	40	25	—	29.892

参考のため、このグラフを付図に示しておく。



## 参考文献

- [1] W. E. Deming: Statistical Adjustment of Data, John Wiley, 1946.
- [2] H. O. Hartley: The modified Gauss-Newton Method for the fitting of Non-linear Regression Functions by least Squares, Technometrics, 3, 1961.
- [3] Draper & Smith: Applied Regression Analysis, John Wiley, 1966.
- [4] T. Kariya: Non-linearなParametersを含む曲線のあてはめと、あてはまりのよさの検定, 5, 1969.  
日本OR学会春季研究アブストラクト集。
- [5] T. Kariya: 非線型最小二乗パラメータ推定とその応用, 9, 1969, 日本統計学会資料.