

回転液体の自由表面 (I)

大 亀 衛

The Free Surface of a Rotating Viscous Liquid. (I)

M. OHKAME

摘 要

回転速度の等しい同軸二円筒間に生ずる液体自由表面上の流速が、空気などの影響を受けて $\sqrt{k}r\Omega$ で表わされるとする。ここで、 r は円筒軸上垂直上向きに z 軸をとり底面上に原点をもつ円筒座標、 Ω は二円筒の角速度の大きさ、 k は空気などの影響の強弱を示す定数である。

このとき、自由表面での運動方程式と連続の式は

$$\frac{d(z-H)}{d\psi} = \frac{T \sin \psi}{\rho g(z-H) - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \frac{\rho \Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4} + \rho g(H-H_0) - \frac{\rho \Omega^2}{2} (1-k)(r^2 - R_c^2) - \frac{T \sin \psi}{r}},$$
$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{T \cos \psi}{\rho g(z-H) - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \frac{\rho \Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4} + \rho g(H-H_0) - \frac{\rho \Omega^2}{2} (1-k)(r^2 - R_c^2) - \frac{T \sin \psi}{r}},$$

$$\int_{R_1}^{R_2} (z-H) r dr = 0,$$

である。ここで ψ は自由表面の接線で z 軸と交るものが r 軸となす角度、 R_1 は内円筒の外半径、 R_2 は外円筒の内半径、 T は表面張力の大きさ、 ρ は液体の密度、 g は重力の加速度の大きさ、 H は液体が静止し表面張力が表われないと仮定したときの液深、 H_0 は回転液体の基礎流の式で近似して求めた圧力が液体表面の気圧に等しい曲面を自由表面としたときの H 、 R_c は回転液体の基礎流の式で近似して求めた圧力が液体表面の気圧に等しい曲面上の z の値が H_0 に等しくなる r の値である。

$H-H_0$ と k に種々の値を与えこれらの関係式から求めた自由表面の形の中には、有限の長さの二円筒を用い測定針で実測して求めた自由表面の形と、かなりよく一致するものがある。

§ 1 ま え が き

回転速度の等しい同軸二円筒間に生ずる液体の自由表面の形を、基礎流に表面張力の影響を考慮して計算で求めたものと測定針で実測して求めたものとを比較すると、外円筒壁附近に於て異なった様相を表わす¹⁾²⁾³⁾。

ここでは、空気などの影響をも考慮して求めた計算値と、上記の実測値とを比較する。

§ 2 基 礎 式

今の場合、自由表面での運動方程式と連続の式は、流速の θ 成分だけを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{d\psi} &= \frac{T \sin \psi}{-p + p' - \frac{T \sin \psi}{r}}, \\ 0 &= \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \tan \psi - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \\ \frac{dr}{d\psi} &= \frac{T \cos \psi}{-p + p' - \frac{T \sin \psi}{r}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} (z - H) r dr = 0, \quad (2.2)$$

となる。ここで z と r は円筒軸上垂直上向きに z 軸をとり底面上に原点をもつ円筒座標、 ψ は自由表面の接線で z 軸と交るものが r 軸となす角度、 v_θ は流速の θ 成分、 p は自由表面での液圧、 p' は気圧、 T は表面張力の大きさ、 R_1 は内円筒の外半径、 R_2 は外円筒の内半径、 H は液体が静止し表面張力が表われないと仮定したときの液深である。

ここでは流速 v_θ が空気などの影響を受けて $\sqrt{k} r \Omega$ で表わされるとし式 (2.1) の第二式のかわりに

$$v_\theta = \sqrt{k} r \Omega, \quad (2.3)$$

を使用する。ここで Ω は二つの円筒の角速度の大きさ、 k は空気などの影響の強弱を示す定数である。

次に自由表面による圧力差 $-p + p'$ を求める。流体内の圧力が気圧に等しい面上の任意点 (r, z') における流速と液圧を v_θ', p' とし、自由表面上の液体内の一点 (r, z) における流速と液圧をそれぞれ v_θ, p とすると、

$$-p + p' = \frac{\rho}{2} (v_\theta^2 - v_\theta'^2) + \rho g (z - z') + C, \quad (2.4)$$

となる。ここで ρ は液体の密度、 g は重力の加速度の大きさ、 C は一般に r と z の関数である。

流体内の圧力が気圧に等しい面を表はす式として、液面の影響が及ばない部分の基礎流による等圧力面を表わす式

$$z' = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4g} + H_0, \quad (2.5)$$

を用いる。ここで H_0 は液体が静止したときの z' である。

また

$$v_{\theta}^2 = r^2 \Omega^2, \quad (2.6)$$

とする。

式 (2.3) と式 (2.4) と式 (2.5) と式 (2.6) から、

$$\left. \begin{aligned} -p + p' &= \rho g(z - H) - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \frac{\rho \Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4} \\ &+ \rho g(H - H_0) - \frac{\rho(1-k)}{2} r^2 \Omega^2 + C, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。

r が R_c の付近では、 $-p + p'$ として式 (2.7) の右辺で前から四つの項のみを用いても、それで計算された自由表面の形と実測されたものがよく一致するから、

$$C = \frac{\rho(1-k)}{2} R_c^2 \Omega^2. \quad (2.8)$$

ここで R_c は式 (2.5) で $z' - H_0 = 0$ となる r の値である。

式 (2.7) と式 (2.8) から

$$\left. \begin{aligned} -p + p' &= \rho g(z - H) - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \frac{\rho \Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4} \\ &+ \rho g(H - H_0) - \frac{\rho(1-k)\Omega^2}{2} (r^2 - R_c^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

を得る。

§ 3 計算値と実測値

式 (2.1) と式 (2.2) と式 (2.9) から液体の自由表面を表わす関係式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \tan \Psi, \\ \frac{d\Psi}{dr} &= \frac{\rho g S - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \frac{\rho \Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4} + \rho g E - \frac{\rho \Omega^2 (1-k)}{2} (r^2 - R_c^2) - \frac{T \sin \Psi}{r}}{T \cos \Psi}, \\ \int_{R_1}^{R_2} S r dr &= 0, \\ S &= z - H, \\ E &= H - H_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

となる。

次に r , Ψ , S の初期値を R_c , Ψ_c , S_c として、Runge-Kutta-Gill の方法を用い、式 (3.1) から r と S の関係を求める。 R_c は式 (2.5) で z' が H_0 となる r の値であるが、 Ψ_c は dz'/dr の R_c での値で近似する。一つの k の値に対して式 (3.1) を満足させる S_c と E の値が幾組も求ま

るから、 k と E と S_c の値は計算で求めた自由表面の形と実測して求めたものとを比較して決める。

$R_1, R_2, \Omega, T, \rho, g$ がそれぞれ $2.010 \text{ cm}, 4.000 \text{ cm}, 108 \frac{\text{回}}{\text{分}}, 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のとき R_c と ψ_c は $3.165 \text{ cm}, 0.3919$ となる。

図1は五つの k の値に対する E と S_c の関係を示す。

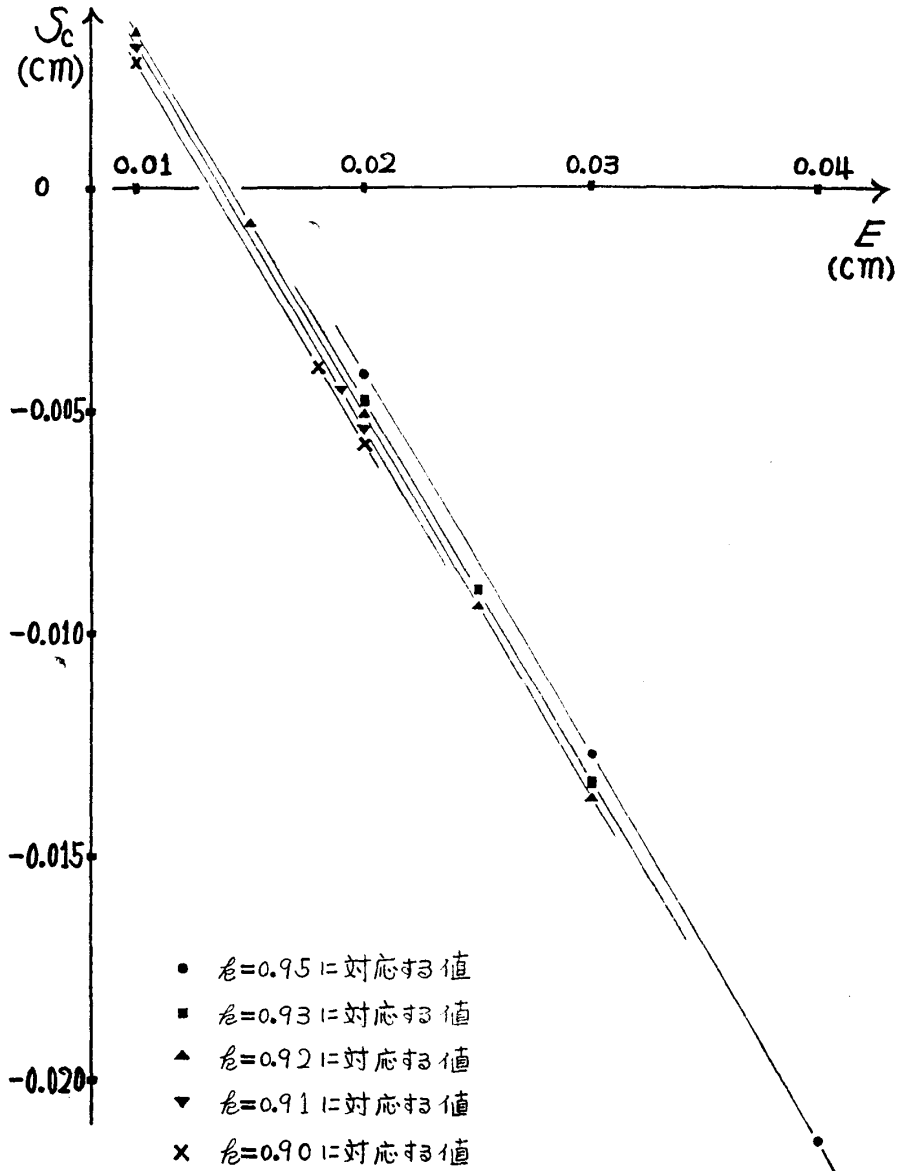


図 1: $R_1=2.010 \text{ cm}, R_2=4.000 \text{ cm}, \Omega=108 \frac{\text{回}}{\text{分}}, T=73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \rho=0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g=979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のときの S_c と E の関係 (計算値)。

図2は k が 0.95 のとき三つの E の値に対応する計算で求められた自由表面を示し、図3は k が 0.92 のときのものを示す。

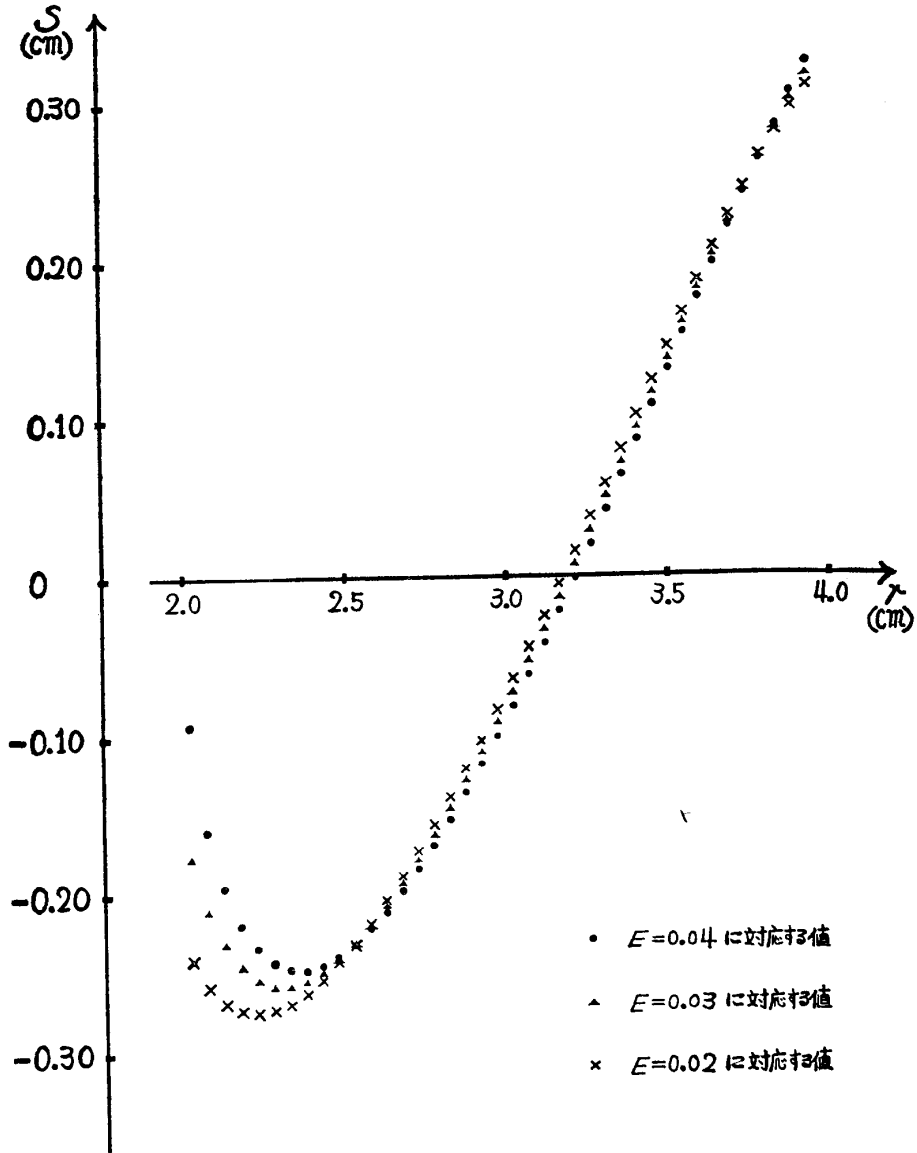


図 2 : $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega=108\frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T=73.40\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho=0.9990\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
 $g=979.71\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, $k=0.95$ のときの自由表面 (計算値).

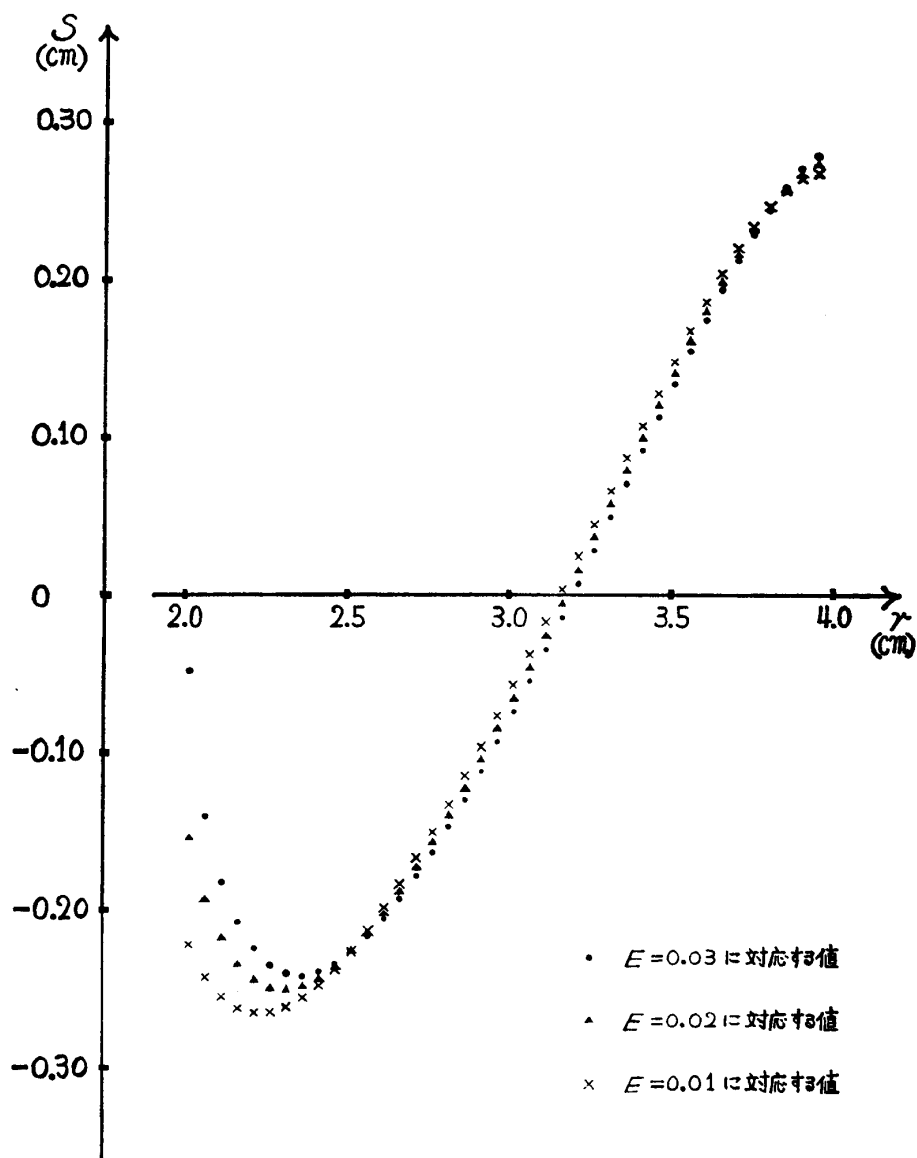


図 3 : $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega = 108 \frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
 $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, $k = 0.92$ のときの自由表面 (計算値).

表 1 は k が 0.93 で E が 0.025 cm のときの自由表面を表わす計算値である.

r の 値 (cm)	S の 値 (計算値, cm)	r の 値 (cm)	S の 値 (計算値, cm)
2.015	-0.148	3.015	-0.069
2.065	-0.190	3.065	-0.050
2.115	-0.216	3.115	-0.030
2.165	-0.233	3.165	-0.009
2.215	-0.243	3.215	0.012
2.265	-0.249	3.265	0.033
2.315	-0.250	3.315	0.054
2.365	-0.249	3.365	0.075
2.415	-0.244	3.415	0.097
2.465	-0.237	3.465	0.118
2.515	-0.228	3.515	0.139
2.565	-0.217	3.565	0.160
2.615	-0.204	3.615	0.180
2.665	-0.191	3.665	0.199
2.715	-0.176	3.715	0.218
2.765	-0.160	3.765	0.236
2.815	-0.143	3.815	0.252
2.865	-0.126	3.865	0.266
2.915	-0.107	3.915	0.278
2.965	-0.089	3.965	0.288

表 1: $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega=108\frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T=73.40\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho=0.9990\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
 $g=979.71\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, $k=0.93$, $E=0.025$ cm のときの S と r の関係 (計算値).

表 2 は有限な二円筒間に生ずる液体自由表面を測定針で実測し, r が 3.165cm で S が -0.009 cm となるように表 1 に対して補正した値である.

r の 値 (cm)	S の 値 (実測値, cm)	r の 値 (cm)	S の 値 (実測値, cm)
2.060	-0.195	3.110	-0.030
2.110	-0.220	3.200	0.003
2.210	-0.240	3.300	0.043
2.310	-0.240	3.400	0.078
2.410	-0.230	3.500	0.128
2.510	-0.220	3.600	0.163
2.610	-0.195	3.700	0.203
2.710	-0.170	3.800	0.238
2.810	-0.140	3.900	0.268
2.910	-0.105	3.950	0.278
3.010	-0.070		

表 2: $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega=108\frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T=73.40\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho=0.9990\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g=979.71\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ (室温 15.6°C)
 のとき $k=0.93$, $E=0.025$ cm の場合の計算値に対して補正した S と r の関係 (実測値).

図4は計算で求めた自由表面と実測した自由表面とを比較したものである。●は表1で示す計算値であり、×は表2で示す実測値である。

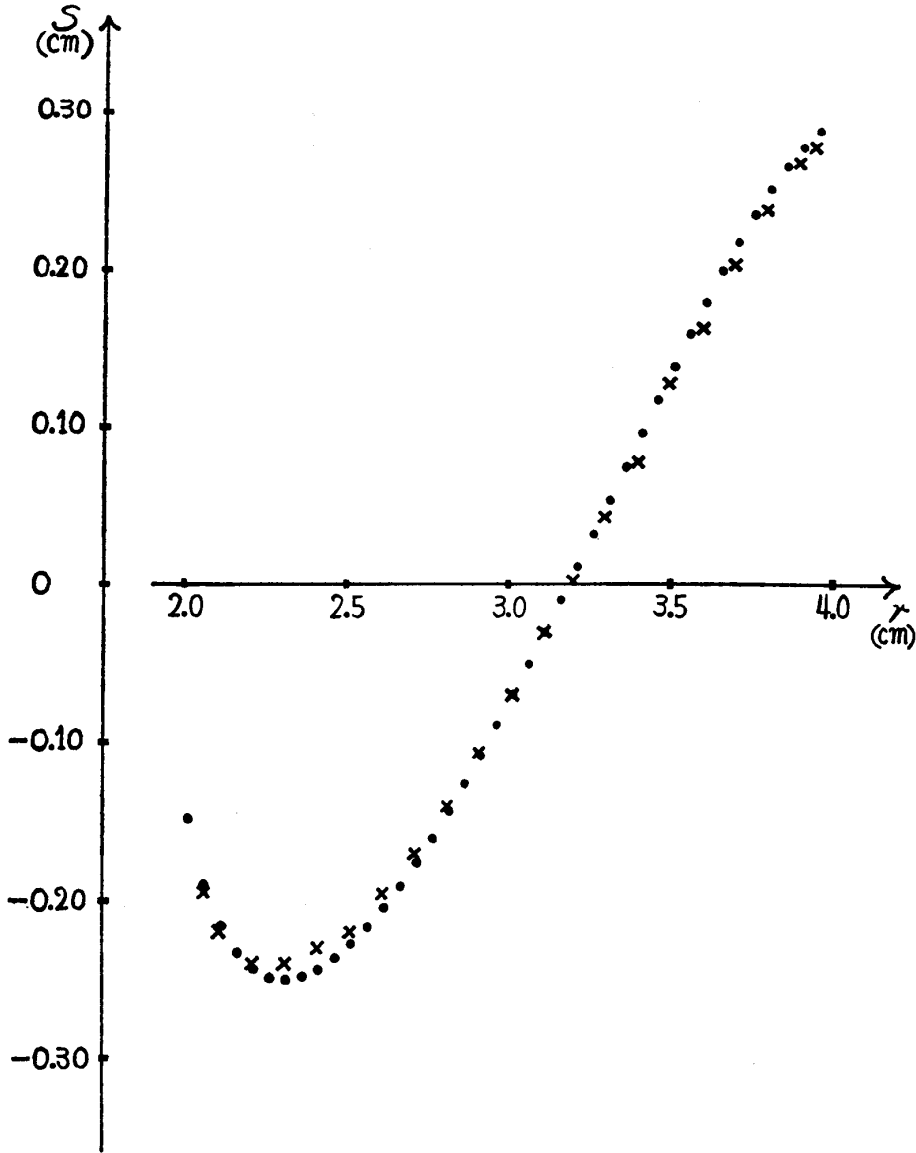


図4: $R_1=2.010$ cm, $R_2=4.000$ cm, $\Omega=108\frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T=73.40\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho=0.9990\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
 $g=979.71\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ (室温 15.6°C) の場合の自由表面。●は $k=0.93$, $E=0.025$
 cm のときの計算値, ×はこれに対して補正した実測値。

§ 4 む す び

回転速度の等しい同軸二円筒間に生ずる液体自由表面の形を、自由表面上の流速が空気などの影響を受けて $\sqrt{k r^2 \Omega^2}$ で表わされるとし、基礎流に表面張力と空気などの影響を考慮して計算で求めたものの中には、有限の長さの二円筒を用い測定針で実測した自由表面の形とかなりよく一致するものがある。

しかしここで得られた k や E の値は表面張力によって生ずる二次流があればその影響や近似計算による誤差の影響などを受けているかも知れない。

次には式 (2.1) と式 (2.2) を直接に解くことと、表面張力による二次流の有無とあればその影響などをしらべてみたい。

最後にこの研究に対し絶えざるご指導を賜った広島大学教授前川 力博士に厚く感謝する。

文 献

- 1) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第 3 号 (1967) 15.
- 2) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第 4 号 (1968) 23.
- 3) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第 4 号 (1968) 29.