

表面張力の静的効果を考慮した 回転液体の自由表面

大 亀 衛

The Free Surface of a Rotating Viscous Liquid.
Static Effect of the Surface Tension

M. OHKAME

摘 要

回転速度の等しい同軸二円筒間にある粘性液体の自由表面の形は、円筒軸上垂直上向きに z 軸をとり底面上に原点をもつ円筒座標 r, z を用いて、基礎流による自由表面を表わす式

$$z_1 - H = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega^2 (R_2^2 + R_1^2)}{4g}$$

から求められる $z_1 - H$ と、表面張力の静的効果を表わす微分方程式

$$\frac{d(z_2 - H)}{d\Psi} = \frac{T \sin \Psi}{\rho g (z_2 - H) + \rho g (H - H_0) - \frac{T \sin \Psi}{r}},$$

$$\frac{dr}{d\Psi} = \frac{T \cos \Psi}{\rho g (z_2 - H) + \rho g (H - H_0) - \frac{T \sin \Psi}{r}}$$

から計算される $z_2 - H$ とを加算したものをを用いても、外円筒壁の付近をのぞいてかなりよく実測したものと一致する。ここで、 z_1 は基礎流のみによって生ずる自由表面の z 座標、 z_2 は表面張力を考えた静止液体表面の z 座標、 Ω は二つの円筒の回転速度の大きさ、 g は重力の加速度の大きさ、 R_1 は内円筒の外半径、 R_2 は外円筒の内半径、 T は表面張力の大きさ、 ρ は液体の密度、 Ψ は静止液面の接線で z 軸と交るものが r 軸となす角度、 H は液体が静止し表面張力が表われないと仮定したときの液深、 H_0 は液体内の圧力が液体表面の気圧に等しいところの液深である。

この微分方程式を数値計算するための初期値と $H - H_0$ の値は、次のものを使用する。先ず、 r と Ψ の初期値に $\sqrt{(R_1^2 + R_2^2)/2}$ と 0 を用い、この点での $z_2 - H$ と $H - H_0$ の値は

$$\int_{R_1}^{R_2} (z_2 - H) r dr = 0$$

$$\left[(H - H_0) - \frac{2T (R_2 \sin \Psi_2 - R_1 \sin \Psi_1)}{\rho g (R_2^2 - R_1^2)} = 0 \right]$$

を満たすものをえらぶ。ここで、 Ψ_1, Ψ_2 は r が R_1, R_2 における Ψ の値である。

$R_1, R_2, \Omega, T, \rho, g$ がそれぞれ 2.010 cm, 4.000 cm, 108 $\frac{\text{回}}{\text{分}}$, 73.40 $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, 0.9990 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,

979.71 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ の場合において、計算値と実測値を比較すると、 z の初期値と $H - H_0$ の値が -0.025 cm , 0.030 cm のときの計算値は実測値にかなり近い。なお、実測中の平均室温は 15.6°C である。

§ 1 ま え が き

二つの同軸円筒の回転速度が等しい場合、この二円筒間に生ずる液体の自由表面は底面の影響による二次流も液体の不安定性による二次流¹⁾²⁾³⁾も生じないから、基礎流によって生ずる自由表面に表面張力の二次的な影響を考慮すればよい。

ここでは、基礎流によって生ずる自由表面⁴⁾に静止液体に生ずる表面張力の効果⁵⁾⁶⁾を加算して実測値と比較する。

§ 2 基礎流による自由表面

今の場合、表面張力の影響を考えない基礎流のみによって生ずる自由表面は、円筒座標 r, z を使用し原点を円筒の底面と共心軸の交点に z 軸の方向・向きを共心軸の方向・向き（上下方向上向き）にとると、

$$z_1 = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{4g} + H \quad (2.1)$$

で表わされる⁴⁾。ここで、 z_1 は自由表面上の z 座標、 Ω は円筒の回転速度の大きさ、 g は重力の加速度の大きさ、 R_1 は内円筒の外半径、 R_2 は外円筒の内半径、 H は液体が静止し、表面張力を失ったときの液深を表わす。

§ 3 表面張力の影響

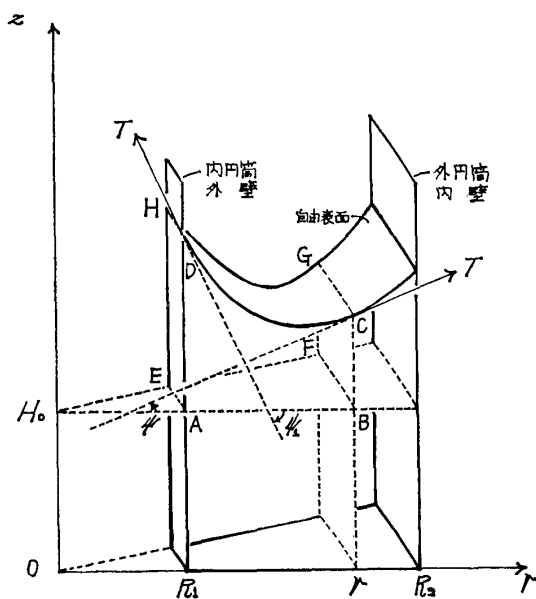


図 1

二円筒間にある静止液体の自由表面は、表面張力の影響を受けて曲面をつくっているが、先ずこの曲面を表わす微分方程式を求める。図 1 において、流体塊 ABCDEFGH の釣合を考えると

$$r \sin \Psi - R_1 \sin \Psi_1 = \frac{\rho g}{T} \int_{R_1}^r r (z_2 - H_0) dr$$

となり、これを微分して

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{\rho g (z_2 - H_0) - T \sin \Psi / r}{T \cos \Psi}$$

を得る。ここで、 Ψ は自由表面の接線で z 軸と交るものが r 軸となす角、 Ψ_1 は R_1 における Ψ 、 T は表面張力の大きさ、 z_2 は自由表面上の z 座標、 H_0 は表面張力の作用が及ばなくなるところの液深である。一方、明らかに

$$\frac{dz_2}{dr} = \tan \Psi$$

であるから、表面張力を考慮した静止液体の自由表面を表わす微分方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(z_2 - H)}{dr} &= \tan \Psi, \\ \frac{d\Psi}{dr} &= \frac{\rho g(z_2 - H) + \rho g(H - H_0) - \frac{T \sin \Psi}{r}}{T \cos \Psi}. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

式(3.1)を数値計算するための r, z_2, Ψ の初期値 R_c, Z_c, Ψ_c と $H - H_0$ は次のものを用いる。まず、 R_c が $\sqrt{(R_1^2 + R_2^2)}/2$ において Ψ_c が 0 であるとする。次に、 $Z_c - H$ の値と $H - H_0$ の値は

$$\left. \begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} (z_2 - H) r dr &= 0 \\ \left[(H - H_0) - \frac{2 T (R_2 \sin \Psi_2 - R_1 \sin \Psi_1)}{\rho g (R_2^2 - R_1^2)} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (3.2)$$

を満たすものからえらぶ。式(3.1)から $Z_c - H$ と $H - H_0$ の絶対値はほとんど同じ数値であることが想像されるが、図2は R_1, R_2, T, ρ, g に $2.010 \text{ cm}, 4.000 \text{ cm}, 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ を用いた場合、(3.2)を満たす $Z_c - H$ と $H - H_0$ の関係を示す。

図3はいくつかの $H - H_0$ に対応する表面張力の静的効果を示す。

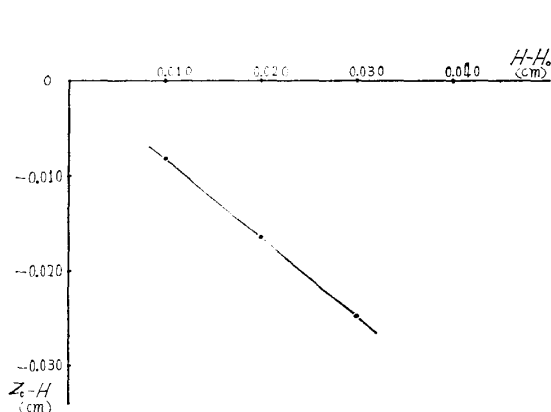


図2 $R_1 = 2.010 \text{ cm}, R_2 = 4.000 \text{ cm}, T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のときの $Z_c - H$ と $H - H_0$ の関係 (計算値).

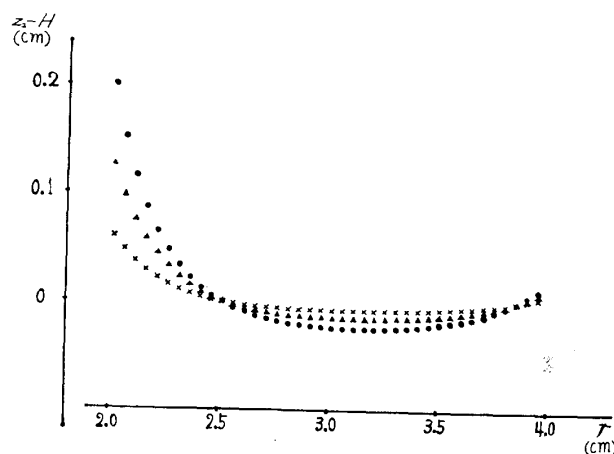


図3 $R_1 = 2.010 \text{ cm}, R_2 = 4.000 \text{ cm}, T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のときの表面張力の影響 (計算値). $\times \blacktriangle \bullet$ はそれぞれ $H - H_0$ が $0.010 \text{ cm}, 0.020 \text{ cm}, 0.030 \text{ cm}$ に対応するものである。

§ 4 自由表面の計算値

式 (2.1) から求められる $z_1 - H$ に, 微分方程式 (3.1) から求められる $z_2 - H$ を加算したもので, 自由表面の形 $z - H$ を近似する. 図 4 は R_1, R_2, T, ρ, g が $2.010 \text{ cm}, 4.000 \text{ cm}, 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ の場合におけるいくつかの $H - H_0$ に対応する自由表面の形 $z - H$ を表わし, 表 1 は $H - H_0$ が 0.030 cm 従って $Z_0 - H$ が -0.025 cm の場合の自由表面の形を表わす計算値である. 表 1 の自由表面は, 後に実測値と比較される.

r の値 (cm)	$z - H$ の値 (計算値, cm)	r の値 (cm)	$z - H$ の値 (計算値, cm)
2.015	-0.181	3.015	-0.085
2.065	-0.223	3.065	-0.065
2.115	-0.247	3.115	-0.045
2.165	-0.261	3.165	-0.025
2.215	-0.268	3.215	-0.004
2.265	-0.271	3.265	+0.017
2.315	-0.270	3.315	+0.039
2.365	-0.266	3.365	+0.062
2.415	-0.260	3.415	+0.085
2.465	-0.252	3.465	+0.108
2.515	-0.242	3.515	+0.132
2.565	-0.230	3.565	+0.157
2.615	-0.217	3.615	+0.182
2.665	-0.203	3.665	+0.209
2.715	-0.189	3.715	+0.236
2.765	-0.173	3.765	+0.263
2.815	-0.157	3.815	+0.292
2.865	-0.140	3.865	+0.322
2.915	-0.122	3.915	+0.354
2.965	-0.104	3.965	+0.387

表 1 $R_1 = 2.010 \text{ cm}, R_2 = 4.000 \text{ cm}, \Omega = 108 \frac{\text{回}}{\text{分}}, T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}, H - H_0 = 0.030 \text{ cm}$ のときの $z - H$ と r の関係 (計算値).

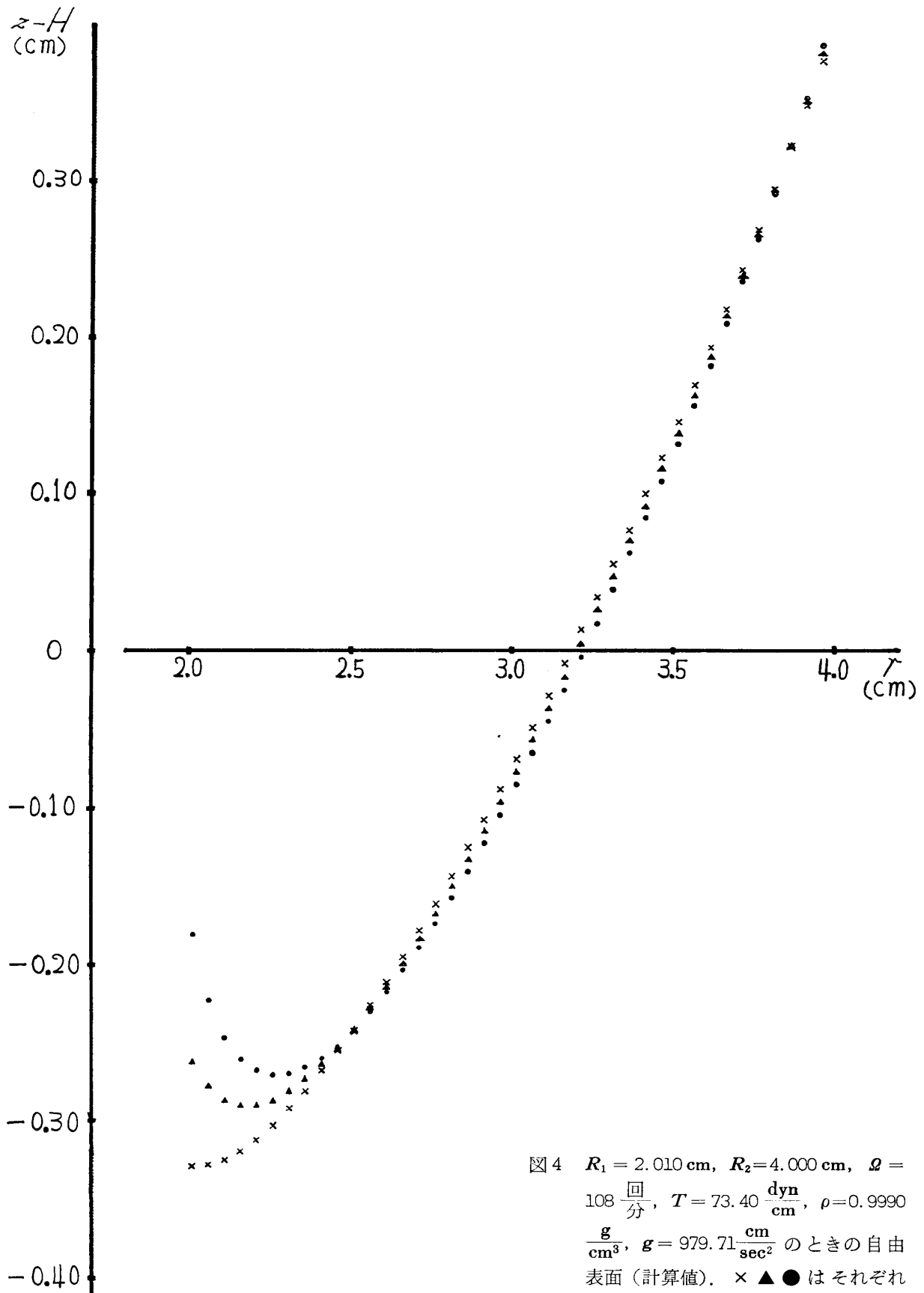


図4 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega = 108 \frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のときの自由表面 (計算値). \times \blacktriangle \bullet はそれぞれ $H-H_0$ が 0.010 cm , 0.020 cm , 0.030 cm に対応するものである.

§ 5 自由表面の実測値

表 2 は R_1, R_2, T, ρ, g が $2.010 \text{ cm}, 4.000 \text{ cm}, 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のとき実測された $z-H$ の値で, Z_C-H の値が計算値 -0.025 cm となるように補正されている.

r の 値 (cm)	$z-H$ の値 (実測値, cm)	r の 値 (cm)	$z-H$ の値 (実測値, cm)
2.060	-0.209	3.110	-0.044
2.110	-0.234	3.200	-0.011
2.210	-0.254	3.300	+0.029
2.310	-0.254	3.400	+0.064
2.410	-0.244	3.500	+0.114
2.510	-0.234	3.600	+0.149
2.610	-0.209	3.700	+0.189
2.710	-0.184	3.800	+0.224
2.810	-0.154	3.900	+0.254
2.910	-0.119	3.950	+0.264
3.010	-0.084		

表 2 $H-H_0=0.030 \text{ cm}$ の計算値に対して補正された $R_1=2.010 \text{ cm}, R_2=4.000 \text{ cm}, \Omega=108 \frac{\text{回}}{\text{分}}, T=73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \rho=0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g=979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ のときの $z-H$ と r の関係 (室温 15.6°C , 実測値).

§ 6 自由表面の計算値と実測値の比較

図 5 は $R_1, R_2, T, \rho, g, Z_C-H, H-H_0$ が $2.010 \text{ cm}, 4.000 \text{ cm}, 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}, -0.025 \text{ cm}, 0.030 \text{ cm}$ の場合において, 計算された自由表面と実測された自由表面とを比較したものである.

●は表面張力の効果を考えない式 (2.1) から求められた自由表面の第一近似値を示し, ▲は表面張力の静的効果を加算して求めた表 1 による自由表面の第二近似値を示す. ×は表 2 による自由表面の実測値である.

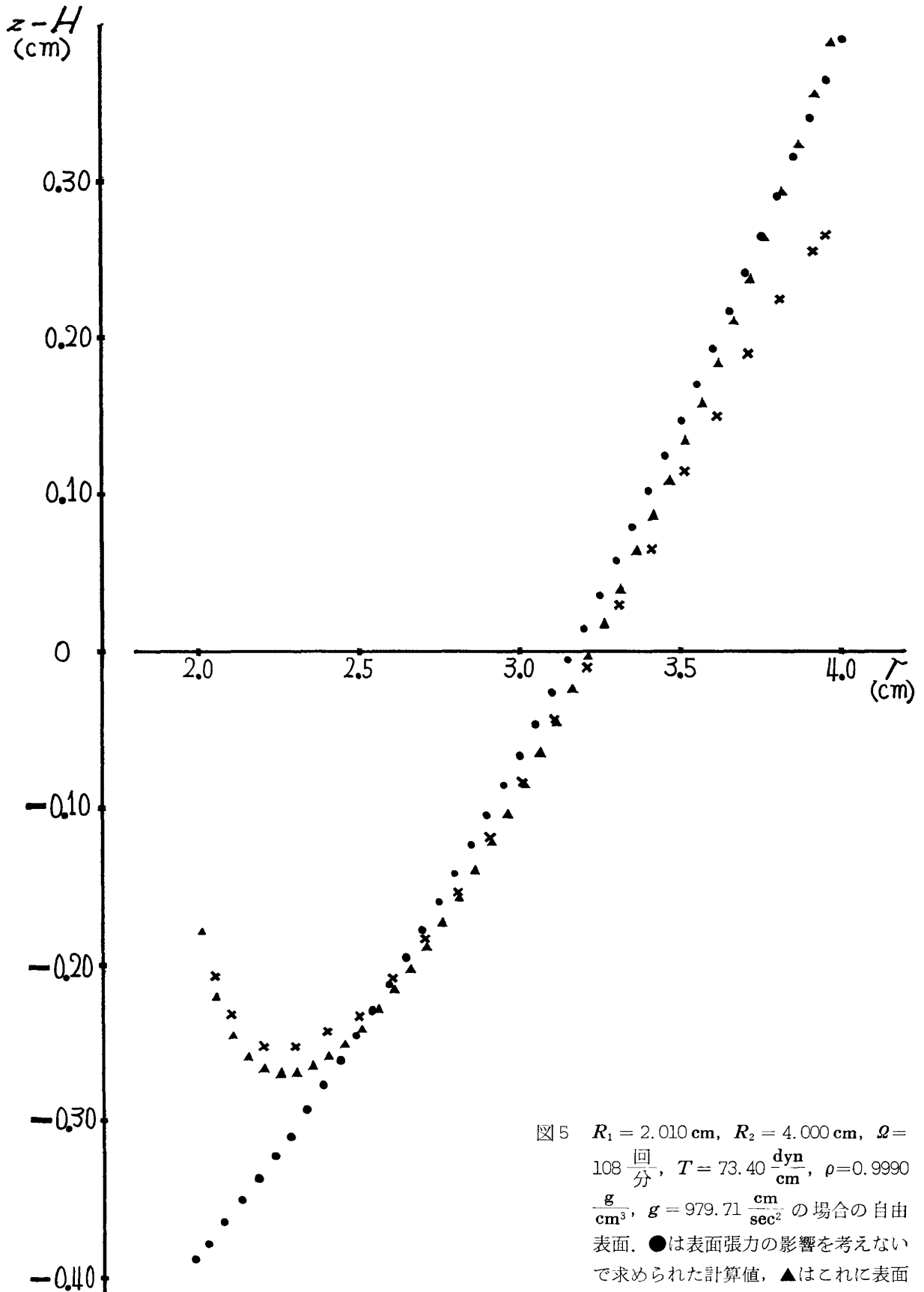


図5 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega = 108 \frac{\text{回}}{\text{分}}$, $T = 73.40 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$, $\rho = 0.9990 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ の場合の自由表面。
 ●は表面張力の影響を考えないで求められた計算値, ▲はこれに表面張力の静的効果を加算して求めた計算値, ×は実測値である。

§ 7 む す び

回転数の等しい同軸二円筒間にある粘性液体の自由表面の形は，基礎流のみによって生ずる自由表面の形に表面張力の静的効果を加算したもので，外円筒壁附近をのぞくとかなりよく近似される。

外円筒壁附近における計算値と実測値のずれの原因としては，表面張力によって生ずる二次流の影響，測定針による空気の乱れの影響，等が考えられるであろう。

最後に，この研究に対し絶えざるご指導を賜わった広島大学教授前川力博士に厚く感謝したい。また，電子計算機について初歩より指導いただいた本学の木村宏講師に謝意を表したい。

文 献

- 1) G. I. Taylor : *Phil. Trans A* 223 (1923) 289.
- 2) C. C. Lin : *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge Univ., 1955).
- 3) D. Coles : *J. Fluid Mech.* 21 (1965) 385.
- 4) 大亀 衛 : 岡山理科大学紀要第3号 (1967) 15.
- 5) M. Harada : *J. Sci. Hiroshima Univ. A-II* 32 (1968) 211.
- 6) H. Lamb : *Statics* (Cambridge Univ., 1949).