

回転している粘性液体の液深による 自由表面の変形

大 亀 衛

The Free Surface of a Rotating Viscous Liquid,
Deformation owing to the Depth of Liquid

M. OHKAME

摘 要

底面が外円筒とともに動いている二つの回転同軸円筒間にある粘性液体の自由表面は、その液の深さをかえると変形する。

液深が大きくて底面の影響が小さいほど、自由表面は

$$z = \frac{A^2}{2g} r^2 + \frac{2AB}{g} \ln r - \frac{B^2}{2g} \frac{1}{r^2} + \frac{4B^2 (\ln R_2 - \ln R_1) - 4AB \{R_2^2 (2 \ln R_2 - 1) - R_1^2 (2 \ln R_1 - 1)\} - A^2 (R_2^4 - R_1^4)}{4g (R_2^2 - R_1^2)} + H,$$

$$A = \frac{\Omega_1 (1 - \mu R_2^2 / R_1^2)}{1 - R_2^2 / R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 \Omega_1 (1 - \mu)}{1 - R_1^2 / R_2^2}, \quad \mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

で表わされる形に近づき、液深が小さくて底面の影響が大きいほど、自由表面は

$$z = \frac{\Omega_2^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega_2^2 (R_2^2 + R_1^2)}{4g} + H$$

で表わされる形に近づく。ここで、 r, z は円筒軸を z 軸とし底面上に原点をもつ円筒座標である。 R_1, Ω_1 および R_2, Ω_2 はそれぞれ内円筒および外円筒の半径と回転速度の大きさを表わし、 H, g は円筒が静止しているときの液深と重力の加速度の大きさを表わす。

R_1, R_2, Ω_2, g の使用値はそれぞれ 2.010 cm, 4.000 cm, $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ であり、 Ω_1 の使用値は $0 \frac{1}{\text{sec}}$, $5.8 \frac{1}{\text{sec}}$, $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $23.0 \frac{1}{\text{sec}}$, $34.6 \frac{1}{\text{sec}}$, $47.1 \frac{1}{\text{sec}}$, $60.7 \frac{1}{\text{sec}}$ である。 H の値は約 28 cm から約 4 cm までのものを用いている。

§ 1 ま え が き

同軸回転円筒間にある粘性液体の自由表面の形は、円筒の回転によって生ずる一次流のみ考慮すると、次の式で表わすことができる¹⁾。

$$z = \frac{A^2}{2g} r^2 + \frac{2AB}{g} \ln r - \frac{B^2}{2g} \frac{1}{r^2} + \frac{4B^2 (\ln R_2 - \ln R_1) - 4AB \{R_2^2 (2 \ln R_2 - 1) - R_1^2 (2 \ln R_1 - 1)\} - A^2 (R_2^4 - R_1^4)}{4g (R_2^2 - R_1^2)} + H, \quad (1)$$

$$A = \frac{\Omega_1 (1 - \mu R_2^2 / R_1^2)}{1 - R_2^2 / R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 \Omega_1 (1 - \mu)}{1 - R_1^2 / R_2^2}, \quad \mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}.$$

ここで、 r, z は円筒軸を z 軸とし底面上に原点をもつ円筒座標であり、 R_1, Ω_1 および R_2, Ω_2 はそれぞれ内円筒および外円筒の半径と回転速度の大きさを表わす。 H, g は円筒が静止しているときの液深と重力の加速度の大きさである。

特に、 $\Omega_1 = \Omega_2$ のとき生ずる自由表面の形は、式 (1) から次のもので表わすことができる。

$$z = \frac{\Omega_2^2}{2g} r^2 - \frac{\Omega_2^2 (R_2^2 + R_1^2)}{4g} + H. \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) の近似を高めるためには、円筒底面による二次流、液体の不安定性による二次流、表面張力の影響等²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾ のうち、関係あるものを考慮してゆかなければならない。

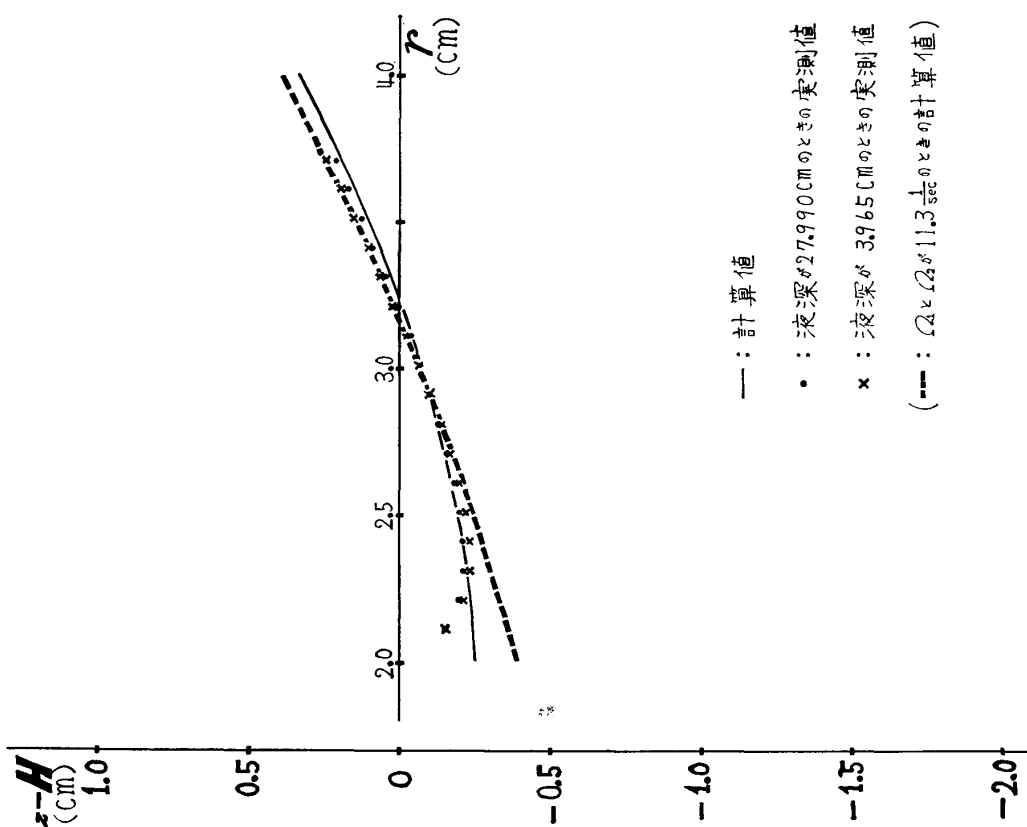
この論文は、液の深さをかえて自由表面の形を実測し、式 (1)、式 (2) で表わされるものと比較して、液深と円筒底面が自由表面に及ぼす影響を調べたものである。

§ 2 実測と計算

装置の両円筒間の底面は外円筒とともに回転するようになっている。自由表面を測定する針の上下移動にはカセットメーターを用い、水平移動にはマイクロメーターの歩みを利用している。液体には水を使用し、液深 H の範囲は約 4 cm から約 28 cm までである。内円筒の外半径 R_1 は 2.010 cm であり、外円筒の内半径 R_2 は 4.000 cm である。内円筒の回転速度の大きさ Ω_1 は $0 \frac{1}{\text{sec}}$, $5.8 \frac{1}{\text{sec}}$, $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $23.0 \frac{1}{\text{sec}}$, $34.6 \frac{1}{\text{sec}}$, $47.1 \frac{1}{\text{sec}}$, $60.7 \frac{1}{\text{sec}}$ と変化させているが、外円筒の回転速度の大きさ Ω_2 は常に $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$ を保っている。

Ω_1 が $47.1 \frac{1}{\text{sec}}$ の場合則ち図 6 のとき Taylor の渦が最も明瞭に表われる。従って、 Ω_1 がこれよりかなり大きい値 $60.7 \frac{1}{\text{sec}}$ の場合則ち図 7 のとき Taylor の渦は消えて乱れた状態であり、 Ω_1 がそれより小さい値 $0 \frac{1}{\text{sec}}$, $5.8 \frac{1}{\text{sec}}$, $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $23.0 \frac{1}{\text{sec}}$, $34.6 \frac{1}{\text{sec}}$ の場合則ち図 1, 図 2, 図 3, 図 4, 図 5 のとき Taylor の渦は表われていない。

図中の実線で示す曲線は式 (1) から求められる計算された自由表面であり、破線で示す曲線は式 (2) から求められる計算された自由表面である。従って図 3 で二つの曲線は一致している。× ▲ ■ ● は水深 H がそれぞれ約 4 cm, 約 8 cm, 約 12 cm, 約 28 cm のときに実測された自由表面を示し、実線と破線で示される計算された自由表面の交線を通るように補正されている。



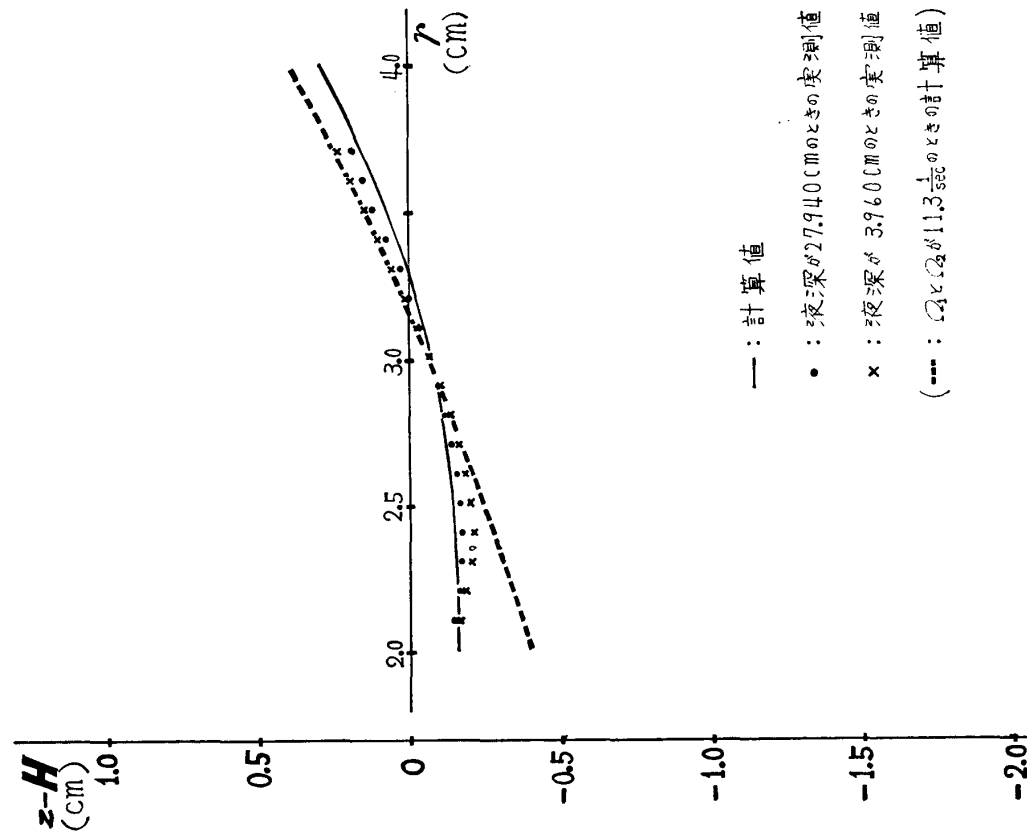
— : 計算値

• : 液深が2.940cmのときの実測値

x : 液深が3.960cmのときの実測値

(--- : Ω_1 と Ω_2 が $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$ のときの計算値)

図1 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega_1 = 0$
 $\frac{1}{\text{sec}}$, $\Omega_2 = 11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$,
 (室温14.8°C)のときの自由表面.



— : 計算値

• : 液深が2.990cmのときの実測値

x : 液深が3.965cmのときの実測値

(--- : Ω_1 と Ω_2 が $11.3 \frac{1}{\text{sec}}$ のときの計算値)

図2 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega_1 = 5.8$
 $\frac{1}{\text{sec}}$, $\Omega_2 = 11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$,
 (室温14.6°C)のときの自由表面.

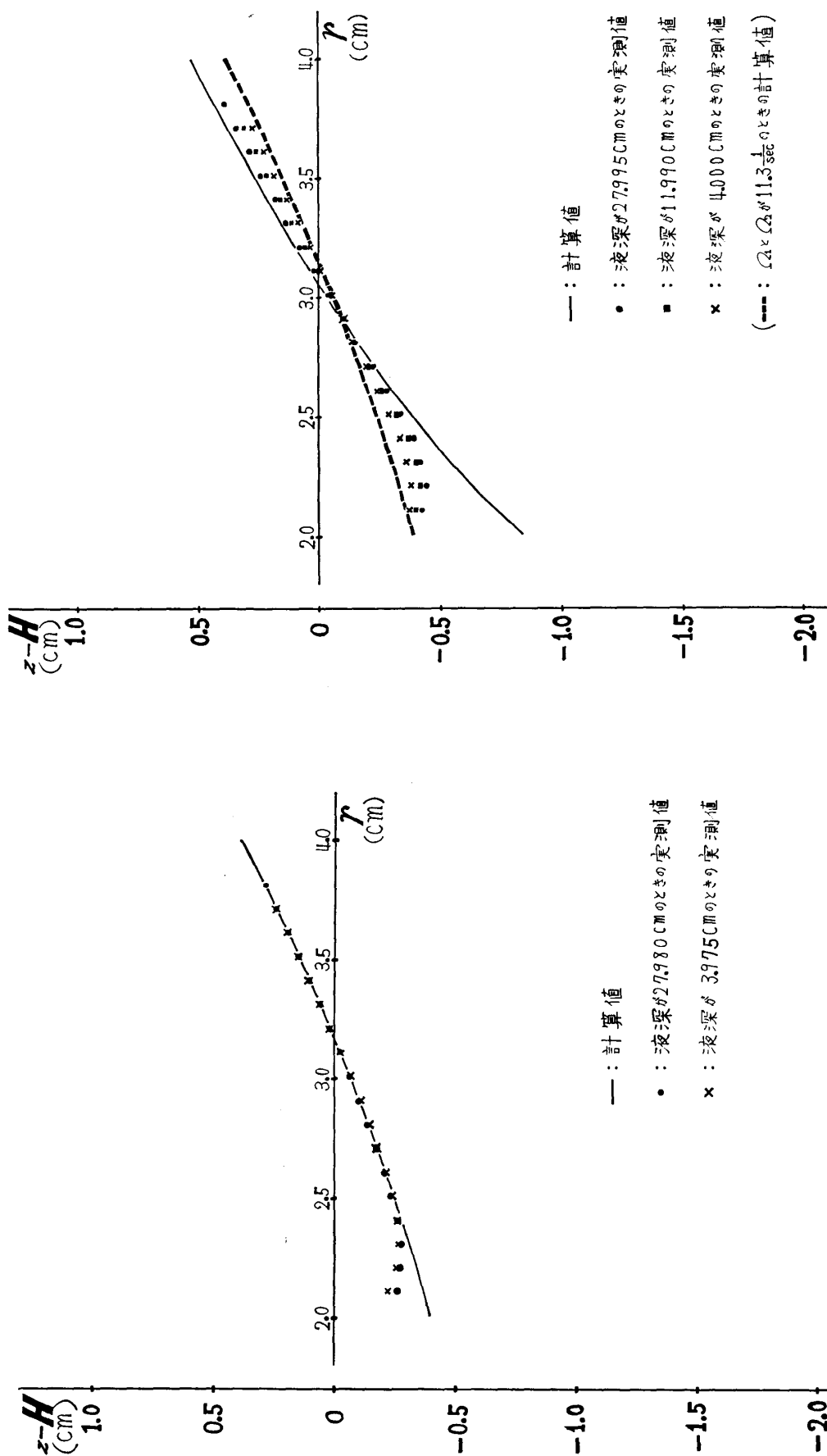


図3 $R_1 = 2.010$ cm, $R_2 = 4.000$ cm, $Q_1 = 11.3$ $\frac{1}{\text{sec}}$, $Q_2 = 11.3$ $\frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71$ $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, (室温 15.6°C) のときの自由表面.

図4 $R_1 = 2.010$ cm, $R_2 = 4.000$ cm, $Q_1 = 23.0$ $\frac{1}{\text{sec}}$, $Q_2 = 11.3$ $\frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71$ $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, (室温 13.8°C) のときの自由表面.

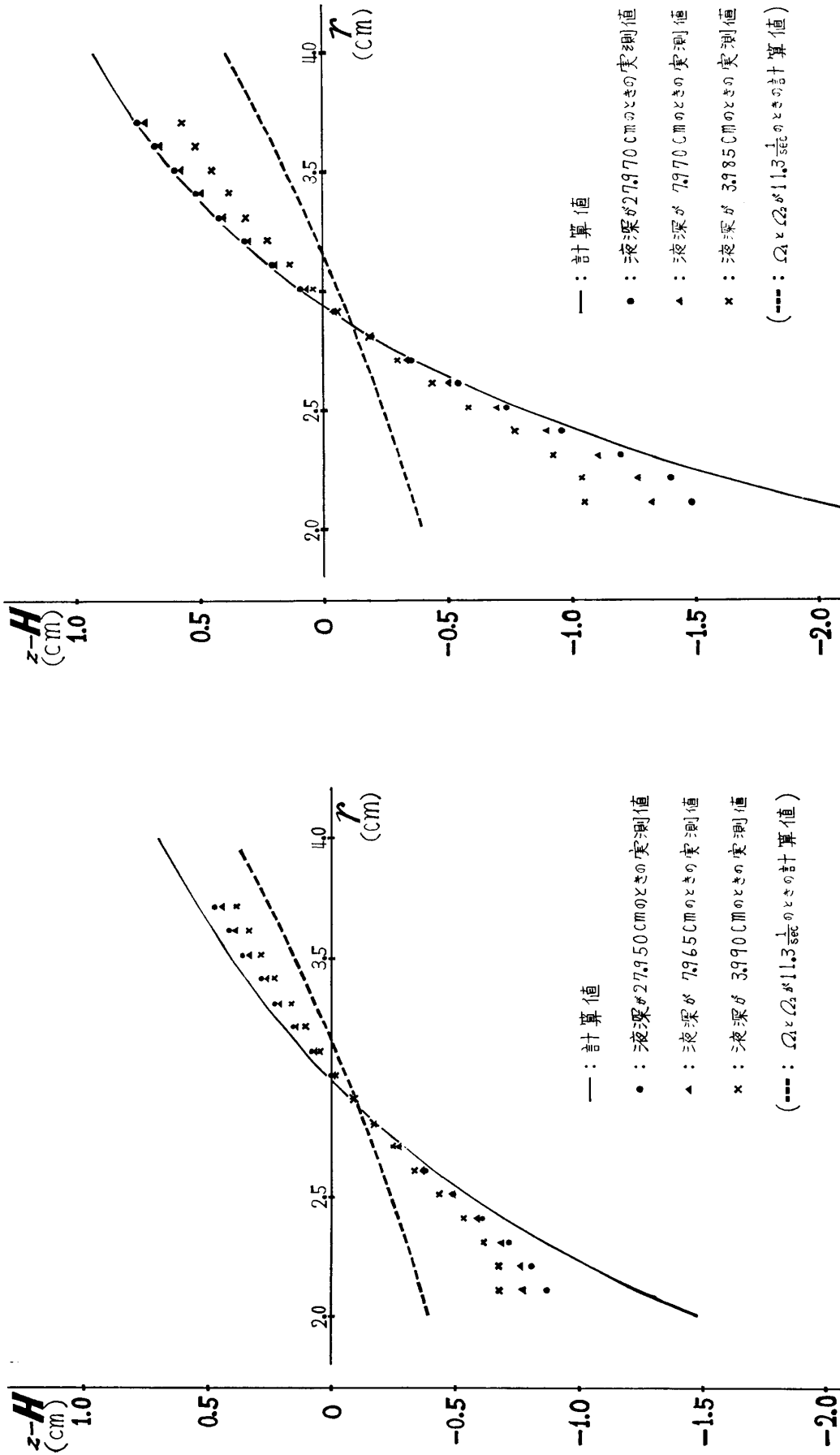


図5 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega_1 = 34.6 \frac{1}{\text{sec}}$, $\Omega_2 = 11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, (室温 15.9°C) のときの自由表面.

図6 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega_1 = 47.1 \frac{1}{\text{sec}}$, $\Omega_2 = 11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, (室温 13.2°C) のときの自由表面.

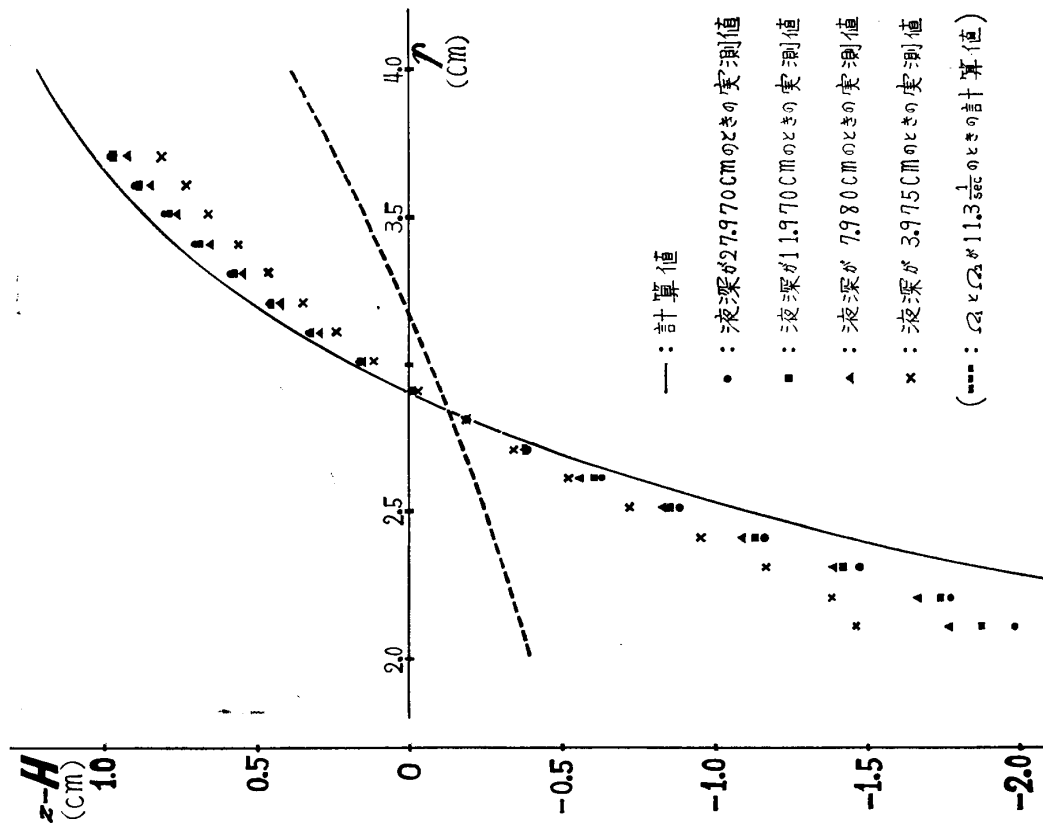


図7 $R_1 = 2.010 \text{ cm}$, $R_2 = 4.000 \text{ cm}$, $\Omega_1 = 60.7 \frac{1}{\text{sec}}$, $\Omega_2 = 11.3 \frac{1}{\text{sec}}$, $g = 979.71 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, (室温 13.5°C) のときの自由表面.

§3 む す び

十分予想されたように、 $\Omega_1 \neq \Omega_2$ の場合、液深が大きいほど自由表面は式 (1) で表わされる曲線に近づき、液深が小さいほど式 (2) で表わされる曲線に近づく傾向がある。また $\Omega_1 = \Omega_2$ の場合、底面の回転による影響は水深をかえても表われない。このとき Taylor 渦は生じていないから、両端での計算値と実測値の大きなちがいは主として表面張力の影響と思われる。

最後に、この研究に対し絶えざるご指導を賜った広島大学教授前川力博士に厚く感謝したい。

文 献

- 1) 大亀 衛：岡山理科大学紀要 第3号 (1967) 15.
- 2) P. Tong : AIAA J. 5 (1967) 1842.
- 3) G. I. Taylor : Phil. Trans A 223 (1923) 289.
- 4) C. C. Lin : *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge Univ., 1955).
- 5) D. Coles : J. Fluid Mech. 21 (1965) 385.
- 6) J. L. Synge : Proc. Roy. Soc. A 167 (1938) 250.
- 7) H. Lamb : *Statics* (Cambridge Univ., 1949).
- 8) M. Harada : Hiroshima Univ. A-II 32 (1968) 211.