

パラメータと非線形関数の統計量 ～古地磁気方位データの平均～

Statistics values of parameters and non-linear functions
— mean of paleomagnetic direction data —

畠山 唯達

(岡山理科大学情報処理センター)

Tadahiro Hatakeyama

(Information Processing Center, Okayama University of Science, Okayama 700-0005, Japan)

Abstract

There is a disagreement between the statistics values (mean, variance, ...) of a nonlinear function and its fluctuating parameters. As an example of the mismatch we show here a problem in the averaged paleomagnetic direction and the mean of the Gauss coefficients representing the field characteristics. It is thought that the mean inclination is corresponding to the paleolatitude often used for the plate tectonics, paleoclimatology, study on the hot spots, and so on. The usual application of the paleomagnetic direction dataset to those studies through the mean inclination is not exactly correct because the GAD hypothesis which is implicitly assumed in those procedures is wrong and the nonlinear effect above mentioned is not so small as to be ignored. We also indicate a simple formulation for the correction of the paleolatitude. It shows a good estimation of the true paleolatitude from the mean inclination.

1 はじめに: 非線形な観測値の統計量

自然界では、観測される量がその本質的なパラメータ群の非線形な関数である現象が多い。そして、観測値はあらゆる場面で統計的に扱われ、いろいろな考察に使用されている。パラメータとその結果である自然現象がある分布を持っていれば、現象の平均をとることで何か特徴的な事象を抜き出すことができるし、しばしば、そこから逆問題的手法を用いて、元となるパラメータ群の統計量を求めることも行われている。しかし、ことはそう単純ではない。パラメータの統計量から求められる現象の値は、必ずしも現象の統計量とは一致しないのだ。

たとえば、たくさんおはじきをいろいろな強さでへ投げて、どこまで転がったか観測してみる。投げ出す角度や方向を固定しても、投げた後、放物線を描いて落ちていく間に受ける空気抵抗や、地面で跳ねたりする影響で、最終的に到達する場所は初速の線形的な関数にならない。たとえこの関数を知っていたとしても、到達した

場所の平均から初速の平均を直接割り出すことはできないのだ。

次にこの事実を一般化してみよう。観測値を A (ここでは、 A はスカラー=1つの観測とする)、パラメータ群を1階テンソル $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_j, \dots\}$ で表す。観測値は、

$$A = f(\mathbf{m}) \quad (1)$$

のような物理法則に従っているものとする。(1)を変動するパラメータ \mathbf{m} の平均 $\boldsymbol{\mu}$ (重心) の周りでテイラー展開してみると、

$$A = A_0 + \sum_j A_j \Delta m_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} \Delta m_j \Delta m_k + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l} A_{jkl} \Delta m_j \Delta m_k \Delta m_l + \dots \quad (2)$$

のようになる。ここで、 $A_0 = f(\boldsymbol{\mu})$ はパラメータ平均 $\boldsymbol{\mu}$ による観測値、 $\Delta m_j (j = 1, 2, \dots)$ はパラメータ \mathbf{m} の $\boldsymbol{\mu}$ からのずれ $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \boldsymbol{\mu}$ の j 成分、 $A_j, A_{jk}, A_{jkl} \dots$ は(1)をパラメータ m_j, m_k, \dots で微分した導関数

$$A_j = \frac{\partial f(\mathbf{m})}{\partial m_j}, \quad A_{jk} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{m})}{\partial m_j \partial m_k}, \quad A_{jkl} = \frac{\partial^3 f(\mathbf{m})}{\partial m_j \partial m_k \partial m_l}, \dots \quad (3)$$

を表す。(2)の両辺の期待値と分散は、

$$E[A] = A_0 + \sum_j A_j E[\Delta m_j] + \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} E[\Delta m_j \Delta m_k] + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l} A_{jkl} E[\Delta m_j \Delta m_k \Delta m_l] + \dots, \quad (4)$$

$$V[A] = E[A^2] - (E[A])^2 = \sum_{j,k} A_j A_k E[\Delta m_j \Delta m_k] + \frac{1}{3} \sum_{j,k,l,n} A_j A_{klm} E[\Delta m_j \Delta m_k \Delta m_l \Delta m_n] + \dots \quad (5)$$

のようになる。(4)の左辺は観測値 A を平均したもの(観測平均)を表している一方、パラメータの平均 $\boldsymbol{\mu}$ で与え

られる観測値の平均は右辺第一項の $A_0 = f(\boldsymbol{\mu})$ で、これが本来知りたい「真の平均」である。右辺第二項以降があるため、後述する (6) 式のような釣り合いはとれていない。今は平均パラメータの周りで展開しているので、(4) の第二項の $E[\Delta m_j]$ は 0 であるが、第三項以降は通常 0 にはならない。これらは平均より高次の統計量に起因していて、たとえば、第三項の $E[\Delta m_j \Delta m_k]$ はパラメータの共分散 $\text{Cov}[\Delta m_j, \Delta m_k]$ である。つまり、この第三項以降の大きさが大きいほど、観測平均 $E[A]$ と物理パラメータの平均から導かれる観測値 $f(\boldsymbol{\mu})$ の差が大きくなるため、観測平均から物理パラメータの平均を導こうとすると困難になる。この影響は事象によってケースバイケースで、ちゃんと見積もらなければならない。

ちなみに、もし式 (1) が線形関数であれば、2 階以上の導関数は 0 なので、

$$E[A] = A_0 = f(\boldsymbol{\mu}) \quad (6)$$

$$V[A] = \sum_{j,k} A_j A_k \text{Cov}[\Delta m_j, \Delta m_k] \quad (7)$$

となって、

$$\text{観測値の平均} \iff \text{物理パラメータの平均}$$

$$\text{観測値の平均} \iff \text{物理パラメータの分散}$$

という対応付けが可能になり (Kono *et al.*, 2000; Hatakeyama and Kono, 2001)、物理パラメータの統計量を求める問題は単純な逆問題に帰着する。

2 パラメータに線形な観測量と非線形な観測量の例: ガウス係数と地磁気データ

本節以降では、観測される「パラメータの非線形関数」の平均が「パラメータの平均」から推測される真の平均とは異なっている例として、古地磁気方位データを考えてみよう。古地磁気学では、この方位データの平均があたかも変動する地球磁場の時間平均であるかのように扱われてきた。しかし、最近になってそれが誤りであること、(4) のような非線形効果の影響は厳密な議論を必要とするときにも無視できるほど小さくないことがわかってきた。古地磁気学によってデータを採取することの方法や意味については、畠山 (2004) をご覧頂きたい。

地球磁場は地球のコア (地表より 2900km 以深) で生成され、地表や上空で観測される。通常、コアの外部にあるマントルや地殻、大気などはコアに比べて電気伝導度がきわめて低いため、絶縁体と見なしてよい。そのことによって、コア-マントル境界 (CMB) よりも外側では地球磁場ベクトルは 1 つのスカラーポテンシャルで表

すことができる。地球中心を原点、回転軸の北極方向を $+z$ 軸とする球座標系で地磁気ポテンシャル $W(r, \theta, \phi)$ は

$$W(r, \theta, \phi) = a \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \{g_{\ell}^m \cos m\phi + h_{\ell}^m \sin m\phi\} P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (8)$$

と球面調和関数展開された形式で表される。ここで a は地球の半径、 $P_{\ell}^m(x)$ は Schmidt 式に正規化された Legendre 陪多項式である (Merrill *et al.*, 1997)。 $W(r, \theta, \phi)$ は g_{ℓ}^m, h_{ℓ}^m という地球磁場の形と大きさの特徴づけるパラメータの線形関数になっている。 g_{ℓ}^m, h_{ℓ}^m をガウス係数と呼ぶ。磁気単極子が存在しないことから、 $\ell = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, \ell$ である。地球電磁気学では慣例として、球面調和関数の位数 (order) を $-\ell \leq m \leq \ell$ と数えずに正負で係数の文字 g, h を分ける。よって、軸対称成分 $m = 0$ に対して h_{ℓ}^0 は存在しない。

地表のある地点 ($r = a, \theta, \phi$) で観測される磁場の、地表ローカル座標系での水平北向き、水平東向き、および鉛直下向き (地球中心方向) の成分 (X, Y, Z) は、ポテンシャル W の空間微分として、

$$\begin{aligned} X &= -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{dP_{\ell}^m(\cos \theta)}{d\theta} (\cos m\phi) \cdot \begin{pmatrix} g_{\ell}^m \\ h_{\ell}^m \end{pmatrix} \\ Y &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi}\right)_{r=a} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{m P_{\ell}^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin m\phi \\ -\cos m\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\ell}^m \\ h_{\ell}^m \end{pmatrix} \\ Z &= -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=a} = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} (\ell+1) P_{\ell}^m(\cos \theta) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\ell}^m \\ h_{\ell}^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

と表されるが、これらもガウス係数の線形な観測量である。

現在の地球磁場からは、地表の各地点で機械的に X, Y, Z を測定し、ガウス係数を算出することが可能である。しかし、畠山 (2004) にもあるように、岩石に残された残留磁化を測定して、古い地球磁場を復元する学問である古地磁気学では、古地磁気の強度を測定することが技術的・試料的にとっても難しい。そのため実際に岩石の残留磁化を測定して得られる観測データの大部分は X, Y, Z ではなく、強度成分のない方位成分である。方位とは、各方向余弦

$$x = \frac{X}{F}, \quad y = \frac{Y}{F}, \quad z = \frac{Z}{F} \quad (10)$$

や、伏角 (I) と偏角 (D)

$$I = \sin^{-1}\left(\frac{Z}{F}\right), \quad D = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (11)$$

と呼ばれる方位角などを指す。ここで $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ は磁場強度である。磁場強度とは言うものの、実際には磁束密度の方を使用するので、単位はもっぱらマイクロテスラ [μT]、ナノテスラ [nT]、或いはガンマ (=ナノテ

スラ)を用いる。ガウス係数の単位も [μT] または [nT] になる。

当然これらの量はモデルパラメータ $m = \{m_1, m_2, \dots, m_j, \dots\} = \{g_1^0, g_1^1, h_1^1, g_2^0, g_2^1, \dots\}$ に対して非線形であるので、前節のような事態が起きてしまう可能性がある。ただし、それが実際にどれくらい影響があるかは見積もって見ないとわからない。影響が小さければ、測定誤差の中に入ってしまい事実上無視して構わない。

3 古地磁気方位とその平均

古地磁気学的手法で得られる過去の地磁気方位データはとても重要な観測量である。古く Wegener (1912) によって提唱され彼の死後一度は途絶えた大陸移動説が、1950年代に復活し後にプレートテクトニクスとして成熟していく仮定で、大変重要な証拠の1つとして古地磁気方位データが採用された。また、その後も地球表層のテクトニクスに関する研究や、古気候などの研究で利用され続けている。昔の地磁気ベクトルから当時の大陸などの相対的な位置や緯度(これを**古緯度**と呼ぶ)を知ることができるからだ。

古い岩石がその当時の地球磁場を正しく記録していて、それが真北つまり回転極方向を向いていると仮定すると、岩石の持つ古地磁気方位からその当時の北極の位置がわかる(これを**仮想地磁気極: Virtual Geomagnetic Pole = VGP**という)。実際には北極自身は動いておらず回転軸はマントルに固定していると考えられるので、動いたのは岩石、すなわちその岩石が乗っている地塊(大陸)の方である。地塊から見た時代ごとのVGPの移りゆくさまを**極移動曲線 (Apparent Polar Wander Path = APWP)**という。そこから、当時の地塊がどのように北極(北磁極)に対して相対運動したかがだいたいわかる。

これを利用して、古い大陸配置の復元などを行っているのである。また、もっとずっと狭い(ローカルな)範囲でも、VGPや古緯度(岩石が磁化した当時の磁気緯度)を利用してテクトニクスや古気候(当時の気温や植生、緯度の関係など)の研究を行う。とくに、古緯度 λ と地磁気伏角 I は次のような関係を持つ。

$$2 \tan I = \tan \lambda \quad (12)$$

しかし、たとえ初生的な(後で変質していない)古地磁気データを得ることができたとしても、古地磁気方位からを式(12)を用いて応用することはそんなに簡単ではない。なぜなら、地球磁場は絶えず変動していて常に磁石が真北を向いているわけではないからである。

地球磁場変動は非常に複雑で、いろいろな時間スケールの変動がある。殆どは地球磁場を生成しているコア内

部の電磁流体力学的な活動に起因する変動である。そのうち最も大胆な地球磁場変動は磁極自身の逆転である。逆転はとても急激に起こっていて(開始から終了まで1万年以下)、その間隔は数十万年である。逆転していない期間のうち、現在と同じように地球中心の巨大な棒磁石のS極が北を向いている(地表で磁針のN極が北を指す)時を**正磁極期**、その反対の時期を**逆磁極期**と呼ぶ。

逆転がない正磁極期、逆磁極期には安定な極性があり磁極の南北ははっきりしているものの、地球磁場自身は細かくかつ急激に変動している。そこで、正磁極期もしくは逆磁極期の数十万年分以上の地層や溶岩から古地磁気データを集めて、それを平均する。これは変動分をキャンセルした「平均的な地球磁場の方向」を示すと考えられてきた。そしてその平均方位からVGPや古緯度を計算し、テクトニクスなどの研究に利用しているのだ。とくに古緯度については、式(12)の代わりに

$$2 \tan \bar{I} = \tan \lambda \quad (13)$$

を用いていると考えればよい(\bar{I} は平均伏角、平均の求め方は後の図3)。

しかし、(13)式を使うためには、2つの重大な前提条件を満たしていなければならない(畠山, 渋谷, 2005)。1つは、平均的な地球磁場を地球中心に位置する棒磁石で説明でき、かつ北磁極が北極と一致することである。これを**地心軸双極子 (Geocentric Axial Dipole: GAD) 仮説**という。もう1つの条件は、すでに1,2節で触れている通り、(10), (11)のようなガウス係数に関する非線形関数について、(4)の影響(これを**Nonlinear Effect due to Fluctuating Field: NEFF**と呼ぶ)が無視できるほど小さいことである。

4 「古地磁気平均方位→古緯度」の妥当性

4.1 GAD 仮説の破れ

逆転していない期間の**時間平均地球磁場 (Time-Averaged Field = TAF)**をGAD(ガウス係数で表すと g_1^0 成分のみの磁場)と見なして良いかどうかは昔から議論になってきた。Wilson (1970, 1971) はプレート運動よりも短い期間(だが、変動を相殺できるほどの長さの地質時間)に噴出した溶岩などから様々な古地磁気平均方位データを集めて緯度ごとに並べた結果、(13)式のグラフよりも北側にシフトしていることを示した(図1a)。Wilsonはこの現象TAFがGADではなく、地球中心から少し北側へずれた双極子(offset dipole)で説明した(図1b)。この磁場を球面調和関数で表すと、ガウス係数の g_1^0

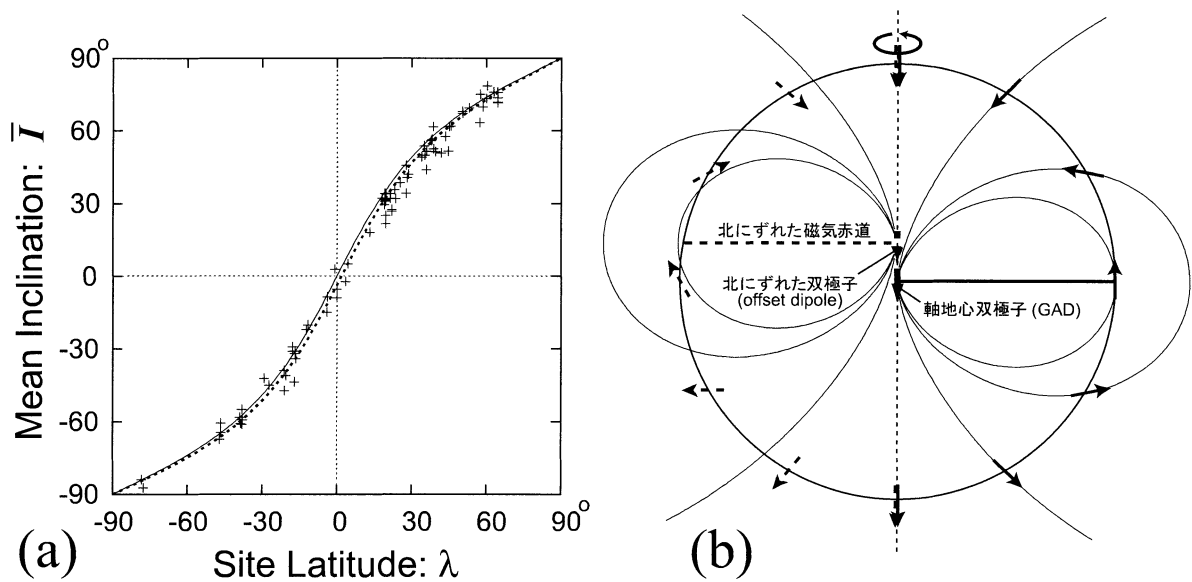


図 1: (a) 緯度ごとに集められた過去 500 万年間の正磁極期における古地磁気平均伏角 (\bar{I})。データは、Johnson and Constable (1996) による。実線は GAD による各緯度での伏角 (12)、破線は実データを北へずれた双極子 (\approx GAD + GAQ) でフィットしたもの。(b) 地球を地軸を含む面で輪切りした磁力線の様子。右半分は地心軸双極子 (GAD) によるもの。左半分は地心よりも北へずれた双極子 (offset dipole) によるもの。(a), (b) ともに畠山, 渋谷 (2005) より。

(GAD) に加えて、若干の g_2^0 (地心軸四重極子: **Geocentric Axial Quadrupole = GAQ**) 成分を含むものとほぼ等価である。その後も、他の軸対称成分についての研究 (e.g. McElhinny *et al.*, 1996) や非軸対称成分を含む TAF の研究 (e.g. Gubbins and Kelly, 1993; Kelly and Gubbins, 1997; Johnson and Constable, 1995, 1997; Hatakeyama and Kono, 2002) などもある。現在では、これらの研究から TAF は、

$$\text{TAF} = \text{GAD} + \text{GAQ} + \text{その他の成分} \quad (14)$$

と見なせ、その他の軸対称・非軸対称成分は GAD, GAQ と比べて小さいと考えられている (畠山, 渋谷, 2005)。

では、TAF に占める $\text{GAQ} = g_2^0$ の影響はどれくらいであろうか? これまでの様々な研究から、 $\text{GAQ}/\text{GAD} = |g_2^0|/|g_1^0|$ の大きさは 5% 程度で、 g_2^0 と g_1^0 は同符号 (正磁極期はともに負) であることが知られている。その値から計算される、経度方向を平均した緯度ごとの伏角異常 ($\Delta I = \bar{I}_{\text{obs}} - I_{\text{GAD}}$) は、緯度に依存せずほぼ負になり、赤道で最大約 -4 度になる (図 2 の (i))。これは無視できない大きさである。

4.2 NEFF

観測値の非線形性と変動に伴って平均方位に現れる見かけの効果 (Kono Effect) は Kono (1997), Kono *et al.* (2000) によって理論的に存在を予言され、Hatakeyama

and Kono (2001) で実用的な定式化がなされた。

NEFF が具体的にどれくらいあるのかは、変動のスナップショットである現在の地球磁場を見ているだけではわからない。Hatakeyama and Kono (2002) は、NEFF を考慮したインバージョン解析を行い、過去 5 百万年間の古地磁気データから正磁極期・逆磁極期の TAF と変動の分散 (古地磁気永年変化: **Paleosecular Variation = PSV**) を求めた。その結果、NEFF の平均伏角への寄与は、「見かけの伏角異常 (ΔI_{NEFF}) が南半球で正、北半球で負という南北反対称な形」になり、「その大きさは緯度が ± 20 度付近で最大 1.5 度ほど」であることがわかった (図 2)。

NEFF は理論的には式 (4) で示したようなものであるが、定性的に考えると図 3 のようになる。観測点における地磁気ベクトルは、永年変化でさまざまな方向・強度に変化する。この平均を取るときに、図 3a のように強度を考えて (ガウス係数と線形な) 平均を取る場合と、図 3b のように、単位球面上に投影した方位の平均を取る場合では、平均ベクトルの方向が異なる。古地磁気方位は通常後者の方法で平均化される。

場所 (観測点) によらず一般的に、地球磁場ベクトルは伏角が深いときの方が長い傾向にあるようだ。これは現在の地球磁場 (図 4) を見てもそう読みとれる。その結果、強度を含む地球磁場変化の真の平均に比べて、方位成分だけから計算した見かけの平均は伏角が浅くなる (絶対値が小さくなる) と考えられる (図 2 の (B))。

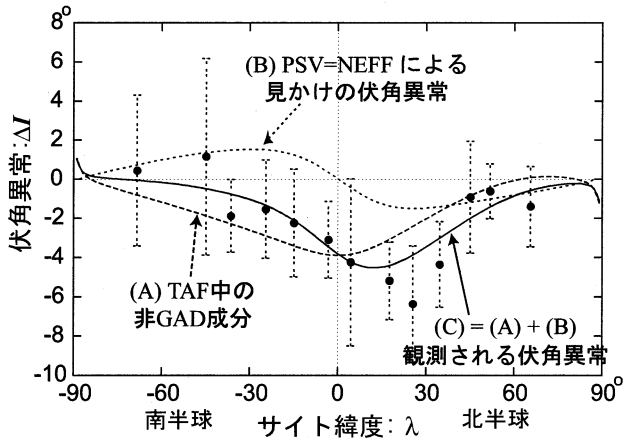


図 2: 各緯度バンドごとの古地磁気データにおける平均伏角の GAD が作る伏角からのずれ (伏角異常) と、Hatakeyama and Kono (2002) の TAF+PSV 統合モデルによる、TAF 中の非 GAD 成分による伏角異常 (太い破線) および NEFF による見かけの伏角異常 (細い点線)。その合計が実線になり、データをそれなりに説明できている。エラーバーつきの点は McElhinny *et al.* (1996) が解析した古地磁気データセット。

NEFF はあくまで古地磁気方位データを平均する時に現れる「見かけの効果」であって、もし、仮に全てのデータが強度を持っていれば、このようなことは無く、各点でのベクトル (強度つき) の平均を取れば、それは平均磁場ベクトルとして表して良くなる (6)。残念なことに、実際には古地磁気強度データは方位データと比べて圧倒的に数が少なく、またその質もずっと悪いので、うまく利用できないのである (Tanaka *et al.* 1995; Kono *et al.*, 2000; Selkin and Tauxe, 2000; Perrin and Schenepf, 2004)。

5 伏角と古緯度から非線形性の影響を補正する

以上のように、単純に GAD 仮説を利用して平均方位から古緯度を求める従来の方法は、平均磁場が GAD だけでないこと、および、平均化に伴う非線形効果が無視できないことの両面から、正しくないことがわかる。

そこで以下、本研究では上で示した「平均伏角と古緯度を対応付けるための (13) 式からの平均伏角のずれ」を簡単に補正することを試みる。ただし、実際のデータは用いないでモデル計算にとどめる。

作業の手順は以下の通りである。まず、既存の TAF, PSV モデルから各緯度における (A) TAF 中の非 GAD 成分が作り出す伏角異常 (ΔI_{nonGAD}) と (B) NEFF が作り出す見かけの伏角異常 (ΔI_{NEFF}) を含んだ伏角の観測平均

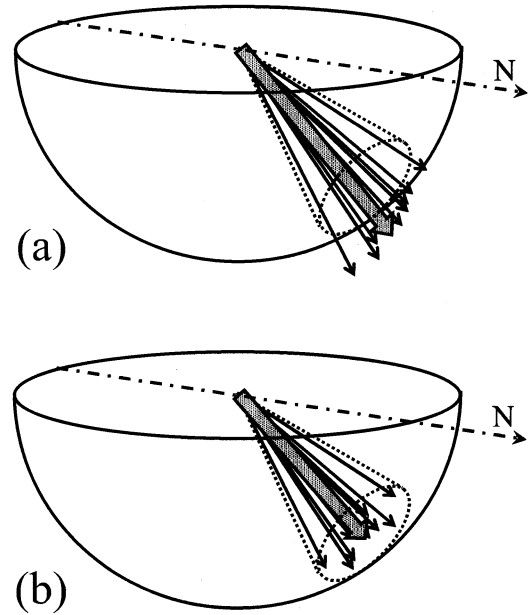


図 3: 古地磁気学で平均方向を取る方法。(a) は強度を含むデータを得ているとき。全てのベクトルの線形和を取るの、強度が強い方位の傾向があれば、そちらの方に偏る。この平均はガウス係数の平均を反映した「真の平均」である。(b) は強度を含まないデータで平均を取る時。Fisher (1953) の手法に従い、各単位ベクトルの和を計算する。単位球面上にベクトルを投影した分布の中心に平均方位が位置する。

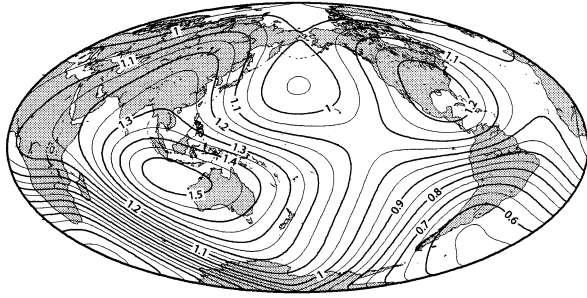
(\bar{I}) をモンテカルロ法シミュレーションを用いて数値的に算出し、GAD 仮説を信じて (13) 式より「読み違えた古緯度 (λ')」を計算する。

一方、(A), (B) に関して GAD 場の周りで近似式を作り、この式を用いて古緯度のミスフィット ($\lambda' - \lambda$) を求める。

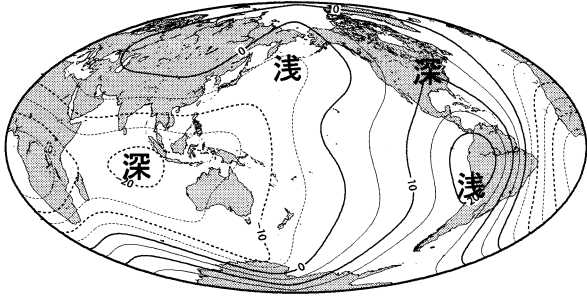
ΔI および λ' について、数値的な計算結果と近似式による結果を比較して、近似式の妥当性を検証する。また、この式を用いて「観測される平均伏角」から「伏角の補正值」を計算する式を導出し、実際に補正して λ を復元できるかを確かめる。

計算に使用したモデルは、Hatakeyama and Kono (2002) の TAF-PSV 統合モデルのうち、緯度にも依存する軸対称な成分についてのみの TAF および PSV モデルで以下のようなものである。

- (A) **TAF(平均):** TAF の非 GAD 成分は $GAQ(g_2^0)$ のみを考えた。他の非軸対称成分を含む非 GAD 成分は、GAD, GAQ に比べてずっと小さいので省いた。
- (B) **PSV(変動):** NEFF の原因となる変動は以下のような 2 成分に分解する。



(a) $r_F = F / F_{GAD}$



(b) $\Delta I = I - I_{GAD}$

図 4: 現在の地球磁場 (時間変化のスナップショット) の様子。(a) 全磁力/GAD 磁力: $r_F = F / F_{GAD}$ この値が大きいところほど、非 GAD 成分の磁場の影響で地磁気の強度が増して、1 より小さい場所では逆に小さくなっている。(b) GAD 伏角からのずれ: $\Delta I = I - I_{GAD}$ 。一般に北半球では $I > 0$ (下向き磁場ベクトル)、南半球では $I < 0$ (上向き磁場ベクトル) になる。北半球では $\Delta I > 0$ で GAD 磁場よりも伏角 (の絶対値) が深く、 $\Delta I < 0$ で浅くなる。南半球では逆になる。伏角の絶対値の様子はそれぞれ「深」のマークが示す場所と (a) の $r_F > 1$ の目玉が重なり、「浅」のマークが示す場所と (a) の $r_F < 1$ の目玉が重なっている。つまり、現在の磁場は、図 3(a) が示すような「磁場がその場所の GAD が作る磁場よりも強いときの方が伏角の絶対値が大きく (深く) なる」ことを示していると言える。IGRF 10th model (IGRF 2005) <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> を利用。

(B1) 均質成分

Constable and Parker (1988) で導入されたガウス係数の変動への仮定 — (i) 各ガウス係数は独立に変動していて (相関がない)、(ii) それぞれの変動の分布は正規分布になる — を踏襲する。また、変動の分散 $\sigma_{\ell,m}$ は変動のエネルギーがコア表面で白色ノイズになるよう、

$$\sigma_{\ell,m}^2 = \frac{r_c^{2\ell}}{(\ell+1)(2\ell+1)} \alpha^2 \quad (15)$$

の式で与える。ここで、 r_c はコアと地球の半径比 (約 0.547) である。 α は PSV の振幅を表し、Hatakeyama and Kono (2002) によると、過去 5 百万年間の正磁極期で $\alpha = 13.0[\mu T]$ である。

(B2) 特定成分

ただし、 $\sigma_{2,1}$ は他の $\ell = 2$ 成分 ($\sigma_{2,0}, \sigma_{2,2}$) に比べて大きい (Kono and Tanaka, 1995; Hulot and Gallet, 1996; Constable and Johnson, 1999)。Hatakeyama and Kono (2002) の過去 5 百万年分の PSV モデルの場合、(15) 式での $\ell = 2$ の値 $\sigma_2 / |g_1^0| = 3.3\%$ に対して、 $\sigma_{2,1} / |g_1^0| = 12.7\%$ となる。

仮定 (i), (ii) について古地磁気データを用いて検証するのは難しいが、最近の数値ダイナモシミュレーションの結果では、いくつかの成分をのぞいておおよそ成り立っていると推測される (Kono and Roberts, 2002; Hulot and Bouligand, 2005)。それ以外にも、Hatakeyama and Kono (2002) の PSV では「比較的小さな g_1^0 の変動」が指摘されているが、この成分は GAD 平均場の周りで展開できず、また、結果的に伏角異常に及ぼす影響が小さいので省く。

以下、5.1 で ΔI_{GAQ} 、5.2 で ΔI_{NEFF} について近似式を求め、数値計算による結果と比較する。

5.1 TAF 中の GAQ による伏角異常

地球磁場が GAD だけでなく少量の GAQ を含む場合、各緯度で観測される伏角 I は

$$\begin{aligned} I &= \tan^{-1} \left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin \lambda \cdot g_1^0 + \frac{3}{2} (3 \sin^2 \lambda - 1) \cdot g_2^0}{\cos \lambda \cdot g_1^0 + 3 \sin \cos \lambda \cdot g_2^0} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

と書けるが、これと I_{GAD} との差について g_2^0 / g_1^0 の 1 次までの展開式で表すと、

$$\Delta \bar{I}_{GAQ} \approx -\frac{3 \cos \lambda (2 - \cos^2 \lambda)}{2(4 - 3 \cos^2 \lambda)} \cdot \frac{g_2^0}{g_1^0} \quad (17)$$

となる。これをプロットすると (図 5) のようになる。Hatakeyama and Kono (2002) で導き出された正磁極期の $g_2^0 / g_1^0 = 4.3\%$ という値では、この 2 つの曲線はほぼ重なって (17) の近似式は良いことがわかる。

5.2 NEFF による見かけの伏角異常

使用する PSV モデルの 2 種類の要素 (B1), (B2) について NEFF によって発生する伏角のずれの近似式を求め、 $\Delta I_{NEFF} = \Delta I_{NEFF1} + \Delta I_{NEFF2}$ と考える。PSV について上で述べたような (i), (ii) の仮定があるとき、 $E[\Delta m_j \Delta m_k] = \delta_{jk} \sigma_j^2$ なので式 (4) は、

$$\bar{I} = I_0 + \frac{1}{2} \sum_j I_{jj} \sigma_j^2 + \dots, \quad (18)$$

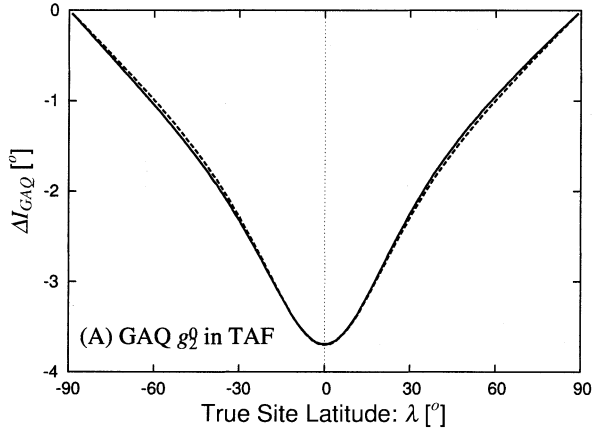


図 5: 平均場中の地心軸四重極子 (GAQ) 磁場による伏角異常 (ΔI_{GAQ})。横軸は観測緯度 (λ)。実線はモンテカルロ法による数値計算結果、波線は g_2^0/g_1^0 の 1 次までの近似式による計算結果。

となる。伏角の平均を単純平均 ($\sum I_i/N$) でなく、4.2 節で述べたような単位ベクトルの平均で計算する場合、分散の 1 次の項に出てくる導関数 I_{jj} は、

$$I_{jj} = \frac{XX_j + YY_j + ZZ_j}{F^4 (X^2 + Y^2)^{1/2}} \left[Z (XX_j + YY_j) - (X^2 + Y^2) Z_j \right] \quad (19)$$

と表すことができる (Hatakeyama and Kono, 2001)。ただし、 X_j, Y_j, Z_j は式 (9) の X, Y, Z それぞれの j 番目のガウス係数に関する偏微分係数である。

均質成分

(B1) に起因する NEFF による平均伏角のずれは、平均場=GAD の周りで PSV(15) を (18) の分散の 1 次 (σ_j^2) 項まで展開すると、

$$\Delta I_{NEFF1} \approx -C_{Hom} \left(\frac{\alpha}{g_1^0} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^{k-1}(k-1)!} \sin 2k\lambda \quad (20)$$

という無限級数で表すことができる。ただし、 C_{Hom} は定数で、 $C_{Hom} \approx 0.0436[\text{rad}] \approx 2.5[\text{度}]$ である。残念ながらこの無限級数は収束が速くないので、ある程度の次数まで展開する必要がある。モンテカルロ法による数値計算と、上式による ΔI_{NEFF1} は図 6a になる。

不均質成分

(B2) に起因する NEFF での伏角のずれも同様に TAF=GAD の周りで (σ_j^2) まで展開し、 $\sigma_{2,1}/|g_1^0|$ の 1 次まで取ると、

$$\Delta I_{NEFF2} \approx -3 \sin \lambda \cos \lambda \frac{(1 + \sin^2 \lambda)(1 + 4 \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^2} \cdot \frac{\sigma_{2,1}}{|g_1^0|} \quad (21)$$

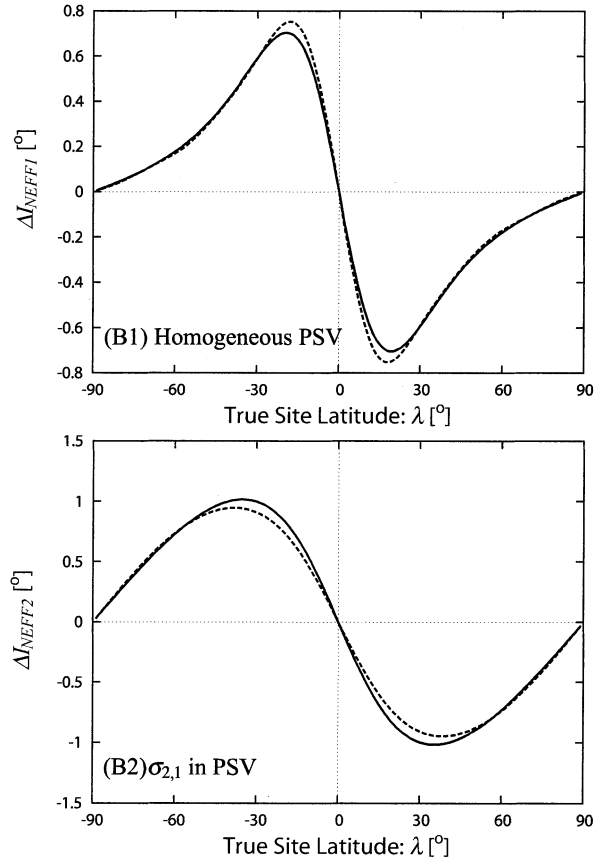


図 6: NEFF による見かけの伏角異常 ΔI_{NEFF} 。上が (B1) の均質 PSV に起因する見かけの伏角異常のずれ (ΔI_{NEFF1})、下が (B1) の ($\ell = 2, m = 1$) 成分の変動に起因する見かけの伏角異常のずれ (ΔI_{NEFF2})。実線、点線は図 5 と同じ。

となる。モンテカルロ法による数値計算と、上式による ΔI_{NEFF2} の様子は図 6b になる。

式 (17), (20), および (21) によって導かれた計算した $\Delta I_{GAQ}, \Delta I_{NEFF1}, \Delta I_{NEFF2}$ の近似値の合計

$$\bar{I}_{obs} = I_{GAD}(\lambda) + \Delta I_{GAQ}(\lambda) + \Delta I_{NEFF}(\lambda) \quad (22)$$

とモンテカルロ法による数値的な ΔI の比較が図 7 である。勿論、各項が線形的に加算できるとは限らず、モンテカルロ法による数値計算では相互作用を含んでいるが、結果を見る限りその影響はさほど大きくなく、単純な足し算をして構わないだろう。

5.3 GAD を仮定した古緯度からの補正

非 GAD 成分の平均場や変動に起因する NEFF によって発生する平均伏角の異常 (ΔI) があるため、GAD 仮説を信じて単純に古緯度 λ を

$$\lambda' = \tan^{-1}(0.5 \tan \bar{I}_{obs}) \quad (23)$$

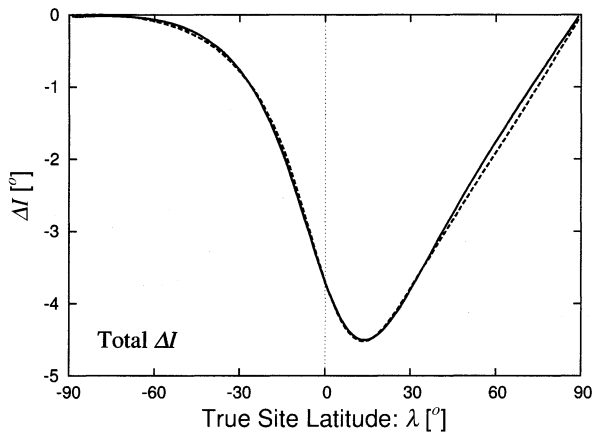


図7: 図5, 6における ΔI_{GAQ} , ΔI_{NEFF1} , ΔI_{NEFF2} の和。実線はモンテカルロ法による数値計算解。これにはそれぞれの相互作用も全て含んでいる。破線は各項の単純和。

で求めると、真の古緯度 λ とは違うものになってしまう。Hatakeyama and Kono (2002) の TAF-PSV モデルから数値的に、 λ' を λ に補正する値を緯度ごとに求めると、図8のような曲線になる。古緯度の読み間違いは北半球中緯度域 — つまり最も大陸が密集していて最も古地磁気学の研究が盛んな地域 — で3度強、古緯度を低く見積もっているわけだ。

この図を利用して見かけの古緯度から真の古緯度を補正することができる。しかしここでは、5.1 および 5.2 で得られた近似式 (17), (20), (21) を利用して、解析的に補正式を求めてみよう。

真の古緯度を示す伏角 I_{GAD} は (22) より、

$$I_{GAD}(\lambda) = \bar{I}_{obs} - \Delta I_{GAQ}(\lambda) - \Delta I_{NEFF}(\lambda) \quad (24)$$

とすれば求めることができる。しかし、右辺の ΔI_{GAQ} と ΔI_{NEFF} はいずれも真の古緯度 λ の関数で、測定値である見かけの古緯度に関連した量は第一項だけで、この方程式は解析的に解くことができない。そこで λ と λ' が近いことを利用して、

$$I_{GAD}(\lambda) = \bar{I}_{obs} - (\Delta I_{GAQ}(\lambda') + \Delta I_{NEFF}(\lambda')) \quad (25)$$

と置き換えて、ここから λ を求めることにする (古地磁気屋は単純ななるべく単純な公式でない、このような解析結果を実際には利用してくれないのだ!) その結果、図8の曲線になり、古緯度の読み間違いが補正できていることがわかった。

6 まとめ

変動するパラメータについて非線形な関数の統計量 (平均, 分散, ...) は、パラメータの統計量と 1 対 1 対応し

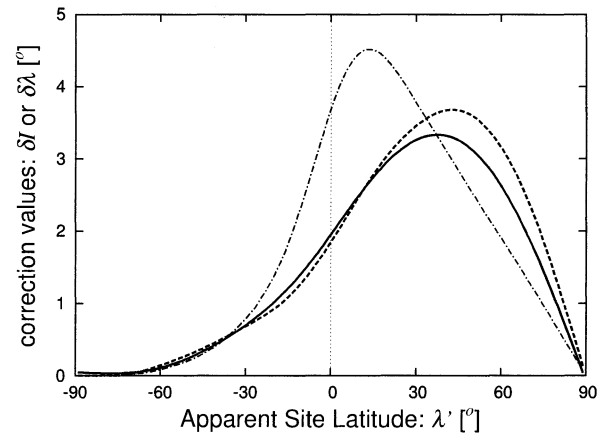


図8: 実線と破線: GAD 仮説から計算した見かけの古緯度 (λ') と真の古緯度 (λ) との差 ($=\lambda - \lambda'$)。つまり、この値を見かけの古緯度に加えれば、真の古緯度になる。実線は、モンテカルロ法による数値計算の結果。破線は、(25) を使用した解析値。一点鎖線: GAD 仮説に当てはめた場合の伏角の補正值 = (25) 右辺の第二項 = $-(\Delta I_{GAQ}(\lambda') + \Delta I_{NEFF}(\lambda'))$ 。この値を平均緯度 \bar{I}_{obs} に加えてそこから (12) を用いて λ を求めると破線になる。

ない。このことに関する具体的な例として、古地磁気方位データの平均伏角を紹介した。従来、古地磁気平均伏角は GAD 仮説を通して古緯度と対応づけられてきたが、仮説自身の疑問に加えて非線形効果 (NEFF) の影響も受けるため、データの平均を取って (12) を用い古緯度を求めるだけでは、図8のように、北半球の中緯度で約3度浅く読みとってしまうことがわかった。南半球では非 GAD な TAF (GAQ が占める) による伏角異常と NEFF による平均伏角の読み間違いが相殺するため、北半球と比べるとあまり影響がないようだ。

その古緯度の読み取り誤差について、平均地球磁場中の非 GAD 成分のおよび地磁気変動のモデルが与えられているときに、補正を行うために低次の展開までの解析関数を導出して、補正を行いそれが妥当なものであることがわかった。

最後に、本研究で指摘した古地磁気平均方位への影響はどのような時に考慮しなければいけないのかをはっきりさせておきたい。「古緯度」などを使った地塊やプレートの絶対座標を求めたり、古地磁気データを基に精密な True Polar Wander を取り扱う場合は考慮する必要がある。しかし、隣接する地塊間の相対運動やローカルテクトニクスに古地磁気データを用いる場合はほとんど影響しないと考えてよい。なぜなら、隣接する地塊など、緯度が近いものの比較では影響がある程度相殺するからである。

非 GAD な TAF の影響や NEFF を考慮して、古地磁気データのテクトニクス等への応用をより正確にするた

めに、我々はもっと地磁気の変動の様子を知る必要があるのである。

謝辞

本研究を遂行するにあたって、東京工業大学の河野長名誉教授、熊本大学理学部の渋谷秀敏教授、岡山理科大学総合情報学部の横山由紀子助教授に動機付けを頂いた。また、本研究は科学研究費補助金(課題番号: 16740258)の補助を受けて行われた。深く感謝いたします。

References

- Constable, C. G. and R. L. Parker, Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y., *J. Geophys. Res.*, **93**, 11569–11581, 1988
- Constable, C. G. and C. L. Johnson, Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **115**, 35–51, 1999
- Fisher, R. A., Dispersion on a sphere, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A217**, 295–305, 1953
- Gubbins, D. and P. Kelly, Persistent patterns in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr, *Nature*, **365**, 829–832, 1993
- 畠山唯達, 分布が疎で誤差の大きなデータから情報を読みとる～古地磁気方位データ～, 岡山理科大学情報処理センター研究報告, **25**, 3–11, 2004
- Hatakeyama, T. and M. Kono, Shift of the mean magnetic field values: Effect of scatter due to secular variation and errors, *Earth Planets Space*, **53**, 31–44, 2001
- Hatakeyama, T. and M. Kono, Geomagnetic field model for the last 5 My: time-averaged field and secular variation, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **134**, 181–215, 2002
- 畠山唯達, 渋谷秀敏, 地球磁場の形と変動—平均地球磁場と古地磁気永年変化—, 地学雑誌, **114**, 201–211, 2005a
- Hulot, G. and C. Bouligand, Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations, *Geophys. J. Int.*, **161**, 591–602 doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.02612.x, 2005
- Hulot, G. and Y. Gallet, On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **95**, 37–53, 1996.
- Johnson, C. L. and C. G. Constable, The time-averaged geomagnetic field as recorded by lava flows over the past 5 Myr, *Geophys. J. Int.*, **122**, 488–519, 1995
- Johnson, C. L. and C. G. Constable, Paleosecular variation recorded by lava flows over the last 5 Myr, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **354**, 89–141, 1996
- Johnson, C. L. and C. G. Constable, The time-averaged geomagnetic field: global and regional biases for 0-5 Ma, *Geophys. J. Int.*, **131**, 643–666, 1997
- Kelly, P. and D. Gubbins, The geomagnetic field over the past 5 Myr, *Geophys. J. Int.*, **128**, 315–330, 1997
- Kono, M., Paleosecular variation in field directions due to randomly varying Gauss coefficients, *J. Geomag. Geoelectr.*, **49**, 615–631, 1997
- Kono, M. and H. Tanaka, Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation, *J. Geomag. Geoelectr.*, **47**, 115–130, 1995
- Kono, M., Tanaka, H. and H. Tsunakawa, Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data: the case of linear mapping, *J. Geophys. Res.*, **105**, 5817–5833, 2000
- Kono, M. and P. H. Roberts, Recent Geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field, *Rev. Geophys.*, **40**, 1013, doi:10.1029/2000RG000102, 2002
- McElhinny, M. W., McFadden, P. L. and R. T. Merrill, The time-averaged paleomagnetic field 0-5 Ma, *J. Geophys. Res.*, **101**, 25007–25027, 1996
- Merrill R. T., McElhinny M. W. and P. L. McFadden, *The Magnetic Field of the Earth*, 529pp, Academic Press, San Diego, 1996
- Perrin M. and E. Schenëpp, IAGA paleointensity database: distribution and quality of the data set, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **147**, 255–267, 2004
- Selkin P. A. and L. Tauxe, Long-term variation in paleointensity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **358**, 1065–1088, 2000
- Tanaka, H., Kono, M. and H. Uchimura, Some global features of palaeointensity in geological time, *Geophys. J. Int.*, **120**, 97–102, 1995
- Wegener, A.L. Die Entstehung der Kontinente und Ozeane, Umgearbeitete Aufgabe, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1912
- Wilson, R. L., Permanent aspects of the Earth's non-dipole magnetic field over upper tertiary times, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **19**, 417–437, 1970
- Wilson, R. L., Dipole offset – The time average palaeomagnetic field over the past 25 million years, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **22**, 491–504, 1971