岡山理科大学紀要　第56号 A pp. 11-20（2020）

ある非線形非正規形 3 項間漸化式の一般解について

山崎　洋一
岡山理科大学理学部基礎理学科

(2020年11月2日受付、2020年12月11日受理)

フィボナッチ数列（漸化式 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ で定義される数列）に対して，

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 \;=\; (-1)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つことは,「カッシーニ・シムソンの定理」としてよく知られているが，この関係式自体を漸化式とみなして一般化した漸化式

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; Cq^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

を考え，これを「**カッシーニ・シムソン型漸化式**」と呼ぶことにする．ただし，C および $q(\neq 0)$ は，与えられた（実数または複素数の）定数である．特に $C = 0$ の場合，これは等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ に対して成り立つ関係式 $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2$ になる．

カッシーニ・シムソン型漸化式の“一般解”について論じることが本論文の目的である．これは非線形かつ非正規形であるため，初期条件 a_0, a_1 を定めても解は一意的には定まらないが，その背後に線形漸化式があることを利用して，一般解を解析することができる．

この形の漸化式を一般的に考えるという問題を私費頒布冊子 [1] で示唆された河野真氏に解析結果を知らせた際，漸化式を特定の形に簡素化できることをご指摘いただいたことを感謝します．

1．カッシーニ・シムソン型漸化式に付随する線形漸化式

カッシーニ・シムソン型漸化式を解析する準備として，与えられた C, q および初期条件 a_0, a_1 に対応した線形漸化式が定まり，その解がカッシーニ・シムソン型漸化式の解にもなることを示す．

補題 1　定数係数線形漸化式

$$a_{n+1} - pa_n + qa_{n-1} \;=\; 0 \quad (q \neq 0) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

の解 $\{a_n\}$ は，カッシーニ・シムソン型漸化式

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; Cq^{n-1} \quad (q \neq 0) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たす．ただし，C は a_0, a_1 から

$$C \;=\; -({a_1}^2 - pa_1a_0 + q{a_0}^2)$$

によって定まる．

証明．線形漸化式を用いて $a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ を変形すると，$n = 2, 3, \ldots$ に対し

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; (pa_n - qa_{n-1})a_{n-1} - a_n(pa_{n-1} - qa_{n-2}) \;=\; q \cdot (a_na_{n-2} - {a_{n-1}}^2)$$

となる．この式は $a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ が公比 q の等比数列であることを意味するから，

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; (a_2a_0 - {a_1}^2) \cdot q^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

である．よって $C = a_2a_0 - {a_1}^2$ とおけば，$n = 1, 2, \ldots$ に対し，右辺が Cq^{n-1} であるカッシーニ・シムソン型漸化式が満たされる．

ここで，$a_2 = pa_1 - qa_0$ だから，C を a_0, a_1 だけで表せば，

$$C \;=\; a_2a_0 - {a_1}^2 \;=\; (pa_1 - qa_0)a_0 - {a_1}^2 \;=\; -({a_1}^2 - pa_0a_1 + q{a_0}^2)$$

と書ける．　□

フィボナッチ数列を定める線形漸化式は，補題 1 で $p=1,\,q=-1,\ a_0=0,\,a_1=1$ の場合だから，その解が満たすカッシーニ・シムソン型漸化式の右辺は $C=-1,\,q=-1$ すなわち $(-1)^n$ となり，カッシーニ・シムソンの定理となる．

また，初項 a，公比 r の等比数列 $a_n=ar^{n-1}$ は，補題 1 で $p=2r,\,q=r^2,\ a_0=a,\,a_1=ar$ の場合とみなせるので，その場合のカッシーニ・シムソン型漸化式の右辺は $C=0,\,q=r^2$ となり，等比数列のよく知られた性質 $a_{n+1}a_{n-1}={a_n}^2$ に帰着する．

補題 1 の線形漸化式の一般解は，よく知られているように，特性方程式 $t^2-pt+q=0$ の根（特性根）を α,β とするとき（$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$），

$$\begin{aligned} \alpha\neq\beta \text{ の場合} &\quad:\quad a_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n \\ \alpha=\beta \text{ の場合} &\quad:\quad a_n=(C_1+C_2n)\alpha^n \end{aligned}$$

のようになる．ここで任意定数 C_1,C_2 は初期条件 $a_0,\,a_1$ を与えれば一意的に定まり，$n=0$ とした式と $n=1$ とした式を $C_1,\,C_2$ について解くことにより，

$$\begin{aligned} \alpha\neq\beta \text{ のとき} &\quad:\quad C_1=\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta},\quad C_2=-\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta} \\ \alpha=\beta(\neq 0) \text{ のとき} &\quad:\quad C_1=a_0,\qquad\quad C_2=\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha} \end{aligned}$$

と表される．

注. 実は，補題 1 の線形漸化式の解を 2×2 のコンパニオン行列で表した

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & p \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

において，両辺の行列式をとったものがカッシーニ・シムソン型漸化式である．

2．カッシーニ・シムソン型漸化式の解の存在と非一意性

2－1　右辺が 0 の場合

カッシーニ・シムソン型漸化式の右辺が 0 の場合，その解は等比数列になる：

定理 1　数列 $\{a_n\}$ が，右辺が 0 であるカッシーニ・シムソン型漸化式

$$a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2 \;=\; 0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

の解であるならば，$\{a_n\}$ は等比数列である．

証明.　(i) $a_1\neq 0$ の場合

漸化式より $a_2a_0={a_1}^2$ だから，$a_1\neq 0$ ならば $a_0\neq 0$ かつ $a_2\neq 0$ である．数学的帰納法により，すべての番号 n について $a_n\neq 0$ となる．そこで漸化式の両辺を $a_{n-1}a_n$ で割ると

$$a_{n+1}/a_n \;=\; a_n/a_{n-1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

となる．これは a_n/a_{n-1} $(n=1,2,\ldots)$ が 0 でない定数であることを意味するから，それを r とおくと，$\{a_n\}$ は公比 $r(\neq 0)$ の等比数列である．

(ii) $a_1=0$ の場合

漸化式より $a_3a_1={a_2}^2$ だから，$a_1=0$ ならば $a_2=0$．数学的帰納法により，$a_n=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ となる．これは公比 0 の等比数列とみなすことができる（なお初項 a_0 は任意に指定できる）．　□

定理 1 により，右辺が 0 であるカッシーニ・シムソン型漸化式の解は，存在すれば一意的であり，初期条件 $a_0,\,a_1$ を与えたとき，

(1) $a_0 \neq 0$ である場合 $\cdots\cdots$ 解は初項 a_0，公比 a_1/a_0 の等比数列

(2) $a_0 = 0$ である場合 $\cdots\cdots$ $a_1 = 0$ であれば解は 0 数列（初項 0，公比 0 の等比数列とみなしてもよい），$a_1 \neq 0$ であれば解は存在しない

ということになる．

結局，右辺が 0 の場合，解は（初項を除いて）恒等的に 0 であるか，または決して 0 にならない．

２－２　右辺が 0 でない場合

この場合，解の存在は初期条件に依存する．

定理 2　右辺が 0 でないカッシーニ・シムソン型漸化式

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; Cq^{n-1} \quad (C \neq 0,\ q \neq 0) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

の解が存在するための必要十分条件は，初期条件 a_0, a_1 が次の 3 つのいずれかを満たすことである：

(1) $a_0 \neq 0$ かつ $a_1 \neq 0$

(2) $a_0 = 0$ かつ $a_1 = \pm\sqrt{-C}$

(3) $a_0 = \pm\sqrt{-C/q}$ かつ $a_1 = 0$

証明．(1) の場合，

$$p \;=\; \frac{C + q{a_0}^2 + {a_1}^2}{a_0 a_1}$$

とおく．この p と与えられた q により，補題 1 の線形漸化式を考えると，その解 $\{a_n\}$ は（与えられた a_0, a_1 に対して一意的に）存在する．補題 1 により，この $\{a_n\}$ は右辺が Cq^{n-1} であるカッシーニ・シムソン型漸化式を満たし，この C は p の定め方から与えられた C に一致する．したがってこの $\{a_n\}$ は与えられたカッシーニ・シムソン型漸化式の解である．

(2) の場合，p を任意に定める．この p と与えられた q により，補題 1 の線形漸化式を考えると，その解 $\{a_n\}$ は（与えられた a_0, a_1 に対して一意的に）存在する．補題 1 により，この $\{a_n\}$ は右辺が Cq^{n-1} であるカッシーニ・シムソン型漸化式を満たし，この C は $-({a_1}^2 + pa_0a_1 + q{a_0}^2) = -{a_1}^2$ だから，仮定によりこれは与えられた C に一致する．したがってこの $\{a_n\}$ は与えられたカッシーニ・シムソン型漸化式の解である．

(3) の場合も同様である．

(1)〜(3) のどれでもない場合は，「$a_0 = 0$ かつ $a_1 \neq \pm\sqrt{-C}$」であるか，「$a_0 \neq \pm\sqrt{-C/q}$ かつ $a_1 = 0$」であるかのいずれかである．いずれの場合も，与えられたカッシーニ・シムソン型漸化式の $n = 1$ および $n = 2$ の式

$$a_2\, a_0 - {a_1}^2 = C, \qquad a_3\, a_1 - {a_2}^2 = Cq$$

に矛盾する．　□

ただし，解が存在するとき，初期条件 a_0, a_1 に対する解の一意性は成り立たない．

例 1　$C = -1, q = -1$ であるカッシーニ・シムソン型漸化式

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \;=\; (-1)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

の解で，初期条件 $a_0 = 0, a_1 = 1$ を満たす数列は，たとえば次のようにいろいろある：

- フィボナッチ数列 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$．すなわち $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$（カッシーニ・シムソンの定理）．
- $a_n = \frac{1}{2}\{1 - (-1)^n\}$．すなわち $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
- $0, 1, \pm i, 0, \pm i, 1, \ldots$（以下 a_0〜a_5 の繰り返し）．ただし i は虚数単位．複号は同順にとる．
- $0, 1, \pm i, 0, \pm i, -1, 0, -1, \pm i, 0, \pm i, 1, \ldots$（以下 a_0〜a_{11} の繰り返し）．複号は（0 の両側で）同順にとる．
- $0, 1, \pm\sqrt{2}i, -1, 0, -1, \pm\sqrt{2}i, 1, \ldots$（以下 a_0〜a_7 の繰り返し）．各複号はそれぞれいずれでも可．

3．標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の切片

3－1　カッシーニ・シムソン型漸化式の標準形

右辺が Cq^{n-1} であるカッシーニ・シムソン型漸化式において，$C=0$ の場合の解は２．で見たように等比数列となり，トリビアルであることが分かったので，ここからは $C\neq 0$ の場合だけ考える．

ここで，特に $C=-1,\, q=1$ とした

$$a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2 \;=\; -1 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

を，**標準形**のカッシーニ・シムソン型漸化式と呼ぶことにする．数列 $\{a_n\}$ が標準形のカッシーニ・シムソン型漸化式を満たすならば，$\{\sqrt{-Cq^{n-1}}a_n\}$ は右辺が Cq^{n-1} であるカッシーニ・シムソン型漸化式を満たす（根号は複素数の範囲で２つある平方根を，$\sqrt{-Cq^n}\sqrt{-Cq^{n-2}}=-Cq^{n-1}$ が各 $n=1,2,\ldots$ で満たされるように選ぶ）．

逆に，与えられたカッシーニ・シムソン型漸化式に対し，初期条件 $a_0,\, a_1$ をそれぞれ $\sqrt{-C/q}$ および $\sqrt{-C}$ で割ったものを初期条件とした標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解が存在すれば，それを用いてもとのカッシーニ・シムソン型漸化式の解が構成できる．

すなわち，$C\neq 0$ の場合には，カッシーニ・シムソン型漸化式は標準形であるとして一般性を失わない．

そこで，以後は標準形で記述する．

3－2　標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の零点と切片の定義

カッシーニ・シムソン型漸化式は非線形の３項間関係式であるが，連続する２項 $a_{n-1},\, a_n$ から続く a_{n+1} を定めようとしたとき，もし a_{n-1} が 0 であると，a_{n+1} が定まらない（すなわち a_{n+1} を a_{n-1} と無関係に設定できる．ただし a_{n+2} 以降との関係があるため，まったく任意にとれるわけではない）．

したがって，カッシーニ・シムソン型漸化式の解においては，項が 0 であるか 0 でないかが決定的に重要である．そこで，数列 $\{a_n\}$ に対し，$a_n=0$ となる番号 n を，$\{a_n\}$ の**零点**と呼ぼう．

$a_{n+1}\,a_{n-1}-{a_n}^2=-1$ より，$a_{n-1}=0$ のときは ${a_n}^2=\pm 1$ となる．すなわち，ある番号 $n-1$ において $a_{n-1}=0$ ならば，$a_n\neq 0$ であるから，解 $\{a_n\}$ の零点が連続することはない．

このことをふまえて，標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解の**切片**を次のように定義する：

定義． ある番号 $n=N$ からある番号 $n=M\ (\geq N+2)$ までで定義された数列

$$\{a_n\}_{N\leq n\leq M} \;=\; [\,a_N,\, a_{N+1},\, \ldots,\, a_M\,]$$

が，

- 標準形カッシーニ・シムソン型漸化式を（$N+1\leq n\leq M-1$ に対して）満たし，
- $N,\, M$ が零点で，
- しかも間の番号 $n\ \ (N+1\leq n\leq M-1)$ は零点でないとき，

これを解の**切片**と呼び，

$$T(N,M) \;=\; [\,a_N,\, a_{N+1},\, \ldots,\, a_M\,]$$

とあらわす．（解の零点は連続しないから，$N,\, M(>N)$ が零点ならば，必ず $M\geq N+2$ であることに注意.）

$n\geq N$ で定義された数列 $\{a_n\}_{n\geq N}$ が標準形カッシーニ・シムソン型漸化式を満たし，N が零点で，かつ N より大きい番号は零点でないとき，

$$T(N,\infty) \;=\; [\,a_N,\, a_{N+1},\, a_{N+2},\, \ldots\,]$$

と書き，これも解の切片と呼ぶ．

$n\leq M$ で定義された数列 $\{a_n\}_{n\leq M}$ が標準形カッシーニ・シムソン型漸化式を満たし，M が零点で，かつ M より小さい番号は零点でないとき,（$M=0$ の場合を除いて）

$$T(-\infty,M) \;=\; [\,a_0,\, \ldots,\, a_M\,]$$

と書き，これも標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解の切片と呼ぶ．

標準形カッシーニ・シムソン型漸化式のある解 $\{a_n\}$ が零点をまったく持たない場合は，$\{a_n\}$ 全体が唯一の「切片」であり，それを切片とみなす場合は $T(-\infty,\infty)$ で表す．

切片 $T(N,M)$ に対し，要素数（項の数）$M-N+1$ を切片 $T(N,M)$ の**長さ**ということにする．$M=\infty$ のときは，切片 $T(N,M)$ の長さは ∞ とする．($N=-\infty$ のときは，長さは $M+1$ である.)

- 長さ 0 や長さ 1 の切片は，定義上ありえない.
- 長さ 2 の切片は，$a_0 \neq 0$ かつ $a_1 = 0$ の場合の $T(-\infty,1) = [\,a_0,\,0\,]$ だけである.

これを除けば，すべての切片の長さは 3 以上である.

3－3　標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の切片の一般項

今後,「$n=N,\,N+1,\,...,M$」や「$N \leq n \leq M$」のような表現は，$N=-\infty$ や $M=\infty$ の場合も含み，その場合 N や M の部分は「制限なし」と解釈するものとする.

長さ 3 以上の切片 $T(N,M)=\{a_n\}_{N\leq n\leq M}$ に対し，その**固有式** $\Delta(T)$ を次のように定義しておく：

$$\Delta(T) \;=\; \begin{cases} \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} & (N \neq -\infty \text{ の場合}) \\[2mm] \dfrac{a_{M-2}}{a_{M-1}} & (N = -\infty \text{ かつ } M \neq \infty \text{ の場合}) \\[2mm] \dfrac{{a_1}^2 + {a_0}^2 - 1}{a_1 a_0} & (N = -\infty \text{ かつ } M = \infty \text{ の場合}) \end{cases}$$

補題 2 (補題 1 の逆)　標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解の切片 $T(N,M)=\{a_n\}_{N\leq n\leq M}$ の長さが 3 以上ならば，$\{a_n\}_{N\leq n\leq M-2}$ は線形漸化式

$$a_{n+2} - \Delta(T)a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n=N,\,N+1,\ldots,M-2)$$

を満たす.

証明．$T(N,M)$ の長さが 3 の場合は，N が零点でないならば $T(-\infty,2) = [\,a_0,\,\pm1,\,0\,]$ に限られる．N が零点ならば $N\neq-\infty$ かつ $M=N+2$ で，$T(N,N+2) = [\,0,\,\pm1,\,0\,]$ でなければならない．いずれの場合にも，主張が正しいことは直接代入すれば確かめられる.

以下，$T(N,M)$ の長さは 4 以上であるとする．この場合 $N \leq M-3$ であり，$N \leq n \leq M-3$ の範囲の番号 n については $a_{n+1}\,a_{n+2} \neq 0$ である．また漸化式から，

$$a_{n+1}\,a_{n+3} + {a_{n+1}}^2 \;=\; {a_{n+2}}^2 + a_n\,a_{n+2} \qquad (N \leq n \leq M-2)$$

が得られる．そこでこの両辺を $a_{n+1}\,a_{n+2}$ で割ると

$$\frac{a_{n+3}+a_{n+1}}{a_{n+2}} \;=\; \frac{a_{n+2}+\,a_n}{a_{n+1}} \qquad (N \leq n \leq M-3)$$

が得られる．これは，$(a_{n+2}+a_n)/a_{n+1}$ が $N \leq n \leq M-2$ の範囲で一定値であることを意味するから，その値を p とおくと，

$$a_{n+2} - pa_{n+1} + a_n = 0 \qquad (N \leq n \leq M-2)$$

となる．ここで

$$p = \frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}} \qquad (N \leq n \leq M-2)$$

だから，$N \neq -\infty$ のときは上式で $n=N$ とすれば $p=(a_{N+2}+a_N)/a_{N+1} = -a_{N+2}/a_{N+1} = \Delta(T)$ となる．$N=-\infty$ のときは $M\neq\infty$ であれば $n=M-2$ として $p=(a_M+a_{M-2})/a_{M-1} = a_{M-2}/a_{M-1} = \Delta(T)$ となる．$N=-\infty$ かつ $M=\infty$ のときは n はなんでもよいから，$n=0$ として $p=(a_2+a_0)/a_1$ と表せるが，この a_2 は $a_2\,a_0 - {a_1}^2 = -1$ により $a_0,\,a_1$ で定まるから，p も $a_0,\,a_1$ だけで表せば，

$$p \;=\; \frac{{a_1}^2+{a_0}^2-1}{a_1 a_0} \;=\; \Delta(T)$$

となる．　□

上の補題を用いて，任意の長さの切片の存在と，その一般項を求めることができる.

定理 3 (N, M がともに有限の場合) 任意に定めた有限の番号 N, M $(\geq N+2)$ に対し，標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解の切片 $T(N,M) = \{a_n\}_{N \leq n \leq M}$ が存在し，その一般項は

$$a_n = C_1(1-\zeta^{n-N})\,\alpha^{n-N} \qquad (n = N, N+1, \ldots, M)$$

の形に表すことができる（ただし，ζ は 1 の原始 $M-N$ 乗根）.

この一般項の定数 C_1 および α は,

$$a_{N+1} = \pm 1\,, \qquad \alpha = \pm\sqrt{\zeta^{M-N-1}}\,, \qquad C_1 = \frac{a_{N+1}}{(1-\zeta)\alpha}$$

によって定められる.

証明. まず，$a_{N+2}\,a_N - {a_{N+1}}^2 = -1$ と $a_N = 0$ から $a_{N+1} = \pm 1$ でなければならないことは明らか.

補題 2 により，a_n の一般項は (1) $a_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$ $(\alpha \neq \beta)$ または (2) $a_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n$ のいずれかの形である．ただし $\alpha + \beta = \Delta(T)$, $\alpha\beta = -1$ である.

もし (1) で C_1, C_2 のいずれかが 0 であると，$\{a_n\}$ は等比数列になるから，カッシーニ・シムソン型漸化式の右辺が 0 になって，標準形の解にならない．よって (1) の場合，$C_1 \neq 0$ かつ $C_2 \neq 0$ でなければならない．同様に，(2) で $C_2 = 0$ であると，やはり $\{f_n\}$ は等比数列になり，仮定に反する．よって (2) の場合 $C_2 \neq 0$ でなければならない．(2) の式が 2 つ以上の零点をもつことはありえないので，N, M が零点であるという仮定により (2) は除外される．よって $\{a_n\}_{N \leq n \leq M}$ の一般項は (1) の形でなければならない.

簡単のため，$C_1\alpha^N$, $C_2\beta^N$ をそれぞれあらためて C_1, C_2 と書けば,

$$a_n \;=\; C_1\alpha^{n-N} + C_2\beta^{n-N}$$

となる．この式で $a_N = C_1 + C_2 = 0$ と $a_M = C_1\alpha^{M-N} + C_2\beta^{M-N} = 0$ であることから，$C_2 = -C_1$ かつ $(\beta/\alpha)^{M-N} = 1$ が得られる．よって β/α は 1 の $M-N$ 乗根でなければならない．$\alpha \neq \beta$ だからそれは 1 ではない．そこで 1 の $M-N$ 乗根のひとつを選び，それを ζ と書けば，$\beta = \zeta\alpha$．よって

$$a_n = C_1(1-\zeta^{n-N})\alpha^{n-N}$$

となる．ここで，もしも ζ が 1 の <u>原始</u> $M-N$ 乗根でないならば，(ζ^{n-N} が $N < n < M$ のどれかの n で 1 になるから）$N < n < M$ において $a_n \neq 0$ であるという仮定に反するので，ζ は 1 の <u>原始</u> $M-N$ 乗根でなければならない.

上の一般項で $n = N+1$ とすれば $a_{N+1} = C_1(1-\zeta)\alpha$．また，$\alpha\beta = 1$ と $\beta = \zeta\alpha$ から，$\zeta\alpha^2 = 1$．これらから α と C_1 が定まる.

逆に，このようにして与えられる $\{a_n\}_{N \leq n \leq M}$ が，確かに標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解の切片 $T(N,M)$ になることも容易に分かる. □

定理 3 において，a_{N+1} と α はそれぞれ複号のうちいずれかが選べ，ζ は 1 の原始 $N-M$ 乗根のいずれかが選べるから，$[\,a_N, a_{N+1}, \ldots, a_M\,]$ としては $2 \times 2 \times$ (1 の原始 $N-M$ 乗根の個数) 通りのパターンが作れる．ただし，そのすべてが異なる（実際にその個数の <u>異なる</u> パターンが存在する）とは限らない.

例 2 ($M = N+3$ の場合)

$M = N+3$ とする．$T(N,M) = [\,a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_M\,] = [\,0, a_{N+1}, a_{N+2}, 0\,]$ である.

ζ は 1 の原始立方根だから，$\omega = e^{2\pi i/3}$ とおくと，ζ は ω または ω^2 である．たとえば ζ として ω をとると,

$$\alpha \;=\; \pm\sqrt{\omega^2} \;=\; \pm\omega, \qquad C_1 \;=\; \frac{a_{N+1}}{(1-\omega)\alpha} \;=\; \pm\frac{1}{\omega(1-\omega)}$$

により,

$$\begin{aligned} a_{N+1} \;&=\; C_1(1-\omega)\alpha \;=\; \pm 1 \\ a_{N+2} \;&=\; C_1(1-\omega^2)\alpha^2 \;=\; \pm 1\,(\omega + \omega^2) \;=\; \mp 1 \end{aligned}$$

となる（a_{N+2} の複号がどちらであるかは，a_{N+1} の複号の選び方と α の複号の選び方から自動的に定まるが，α を選択するかわりに a_{N+2} を選択すると考えてもよい．よって，a_{N+1} の複号と a_{N+2} の複号は独立に選べる）．

また，もし ζ として $\omega^2 = e^{4\pi i/3}$ のほうをとった場合は，

$$\alpha \;=\; \pm\sqrt{\omega^4} \;=\; \pm\omega^2, \qquad C_1 \;=\; \frac{a_{N+1}}{(1-\omega^2)\alpha} \;=\; \pm\frac{1}{\omega(\omega-1)}$$

により，

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= C_1(1-\omega^2)\alpha &= \pm 1 \\ a_{N+2} &= C_1(1-(\omega^2)^2)\alpha^2 &= \mp 1 \end{aligned}$$

となり，$\zeta = \omega$ とした場合とまったく同じになる．結局，この場合の切片としては

$$T(N, N+3) \;=\; [\,0,\ \pm 1,\ \pm 1,\ 0\,]$$

（複号の組合せは自由）の 4 通り（のみ）がありうると分かる．

N, M の一方あるいは両方が有限でない切片についても，定理 3 と同様にしてその存在と一般項を求めることができるが，定理 3 と同様の述べ方をすると長くなるので，要点のみ述べる：

- 任意に定めた有限の番号 N に対する $T(N, \infty)$ は，$a_{N+1} = \pm 1$ と a_{N+2} を定めることで固有式 $\Delta(T)$ が定まり，補題 2 の線形漸化式と $a_N = 0,\ a_{N+1}$ により一般項が確定する．ただし，a_{N+2} の選び方によっては，$n \geq N+1$ において $a_n = 0$ となって $M = \infty$ の条件に適合しない．特性根 $\alpha,\ \beta$ が一致するか，または $\alpha^n \neq \beta^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となるように a_{N+2} を選ぶ必要がある．
- 任意に定めた有限の番号 M に対する $T(-\infty, M)$ は，（長さが 2 である $[\,a_0,\, 0\,]$ の場合を除き）$a_{M-1} = \pm 1$ と a_{M-2} を定めることで固有式 $\Delta(T)$ が定まり，補題 2 の線形漸化式と $a_M = 0,\ a_{M-1}$ により一般項が確定する．ただし，a_{M-2} の選び方によっては，$n \leq M-1$ において $a_n = 0$ となって $N = -\infty$ の条件に適合しない．特性根 $\alpha,\ \beta$ が一致するか，または $\alpha^n \neq \beta^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となるように a_{M-2} を選ぶ必要がある．
- $T(-\infty, \infty)$ は，任意の初期条件 $a_0 \neq 0$ に対して存在するが，$a_1 \neq 0$ は次の条件を満たすように選ぶ必要がある．
  - (i) $a_1 \neq \pm a_0 \pm 1$（左辺が 4 つある右辺の組み合わせのいずれとも一致しない）
    この場合，$a_0,\ a_1$ によって固有式 $\Delta(T)$ が定まり，補題 2 の線形漸化式と $a_0,\ a_1$ により一般項が確定するが，さらに異なる 2 つの特性根 $\alpha,\ \beta$ について

    $$a_1 - \alpha a_0 \neq 0 \ \text{かつ}\ a_1 - \beta a_0 \neq 0 \ \text{かつ}\ \alpha^n(a_1 - \beta a_0) \neq \beta^n(a_1 - \alpha a_0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

    が成り立つ必要がある（任意に定めた a_0 に対し，これらをすべて満たす a_1 は無数にある）．逆にこれが満たされれば，$a_0,\ a_1$ を含む切片は $T(-\infty,\ \infty)$ となる．
  - (ii) $a_1 = \pm a_0 \pm 1$（左辺が 4 つある右辺の組み合わせのどれかに一致）
    この場合，固有式は $\Delta(T) = \pm 2$ となり，補題 2 の線形漸化式の特性根は重根 α で，$+1$ または -1 になる．いずれであっても $a_1 - \alpha a_0 = \pm 1$ となるので，解は等比数列でなく，あとは

    $$n(a_1 - \alpha a_0) \neq -\alpha a_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

    が満たされればよい．

4．標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の一般解

標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の一般解（大域解）は，切片の一般解（局所解）をつなぎ合わせることで得られる．

解が零点をもつ場合，零点 n の左右の項は，（$a_{n+2}\,a_n - {a_{n+1}}^2 = -{a_{n+1}}^2 = -1$ および $a_n\,a_{n-2} - {a_{n-1}}^2 = -{a_{n-1}}^2 = -1$ により）$a_{n-1} = \pm 1,\ a_{n+1} = \pm 1$ でなければならない．

a_{n-1} と a_{n+1} を ± 1 のどちらにするかは，切片の定義においてはどちらでもよかったが，切片どうしを接続する際には，($a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = a_{n+1}a_{n-1} = 1$ により）$a_{n-1} = \pm 1$ と $a_{n+1} = \pm 1$ の積が -1 にならねばならない．これは，それぞれの平方根の選び方で 4 通りある組み合わせのうち，2 通りでしか満たされない．

したがって，ある切片 $T(N, M)$ を具体的に定めたとき，その切片に右端が存在する（$M \neq \infty$）ならば，その切片の右に接続される切片において，$a_{M+1} = \pm 1$ は，a_{M-1} の値により，(2 通りある平方根の一方に）一意的に定まる．同様に，その切片に左端が存在する（$N \neq -\infty$）ならば，その左にある切片における $a_{N-1} = \pm 1$ は，a_{N+1} の値により，(2 通りある平方根の一方に）一意的に定まる．

特殊なケースとして，長さ 2 の切片 $T(-\infty, 1) = [\,a_0,\, 0\,]$（$a_0 \neq 0$）において，それが大域解の一部であるならば，$a_0$ としては $a_0 = \pm 1$ しか選べないことに注意（この右側に接続される切片 $[\,a_1,\, a_2,\, \ldots]$ において $a_2 = \pm 1$ でなければならないから，$a_2\, a_0 - {a_1}^2 = -1$ により $a_0 a_2 = -1$ が成り立たねばならないからである）．

以上を考慮すれば，標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の一般解（大域解）は次のようにして生成できる：

(1) まず a_0 を含む切片 $T(N_0, N_1)$ をひとつ定める．

(2) $\begin{cases} N_0 = -\infty \text{ かつ } N_1 = \infty \text{ の場合} & \longrightarrow \quad \text{終了} \\ N_0 = -\infty \text{ で } N_1 \text{ が有限の場合} & \longrightarrow \quad \text{(3) へ} \\ N_0, N_1 \text{ がともに有限の場合} & \longrightarrow \quad \text{(3) へ} \\ N_0 \text{ が有限で } N_1 = \infty \text{ の場合} & \longrightarrow \quad \text{終了} \end{cases}$

(3) 切片 $T(N_1, N_2)$ を定める．この切片は長さを決めれば，$T(N_0, N_1)$ から定まり．さらに a_{N_1+1} は a_{N_1-1} により一意的に定まる．

(4) $T(N_1, N_2)$ が長さ有限ならば，$T(N_2, N_3)$ を定める．以下 (3)〜(4) の手続きを繰り返し，すべての切片の長さの和が ∞ になるまで行う．

例 3　標準形カッシーニ・シムソン型漸化式の解 $\{a_n\}$ で，全体がひとつの式（一般項）で表され，零点を 2 個以上持ち，しかも初項を除いて恒等的に 0 でないものは，零点が同一周期 m で現れる解

$$a_n = C_1(1 - \zeta^{n-N})\, \alpha^{n-N} \qquad (N \text{ は任意に定めた番号，} \zeta \text{ は 1 の原始 } m-1 \text{ 乗根})$$

に限られる．

なぜなら，零点を 2 個以上もつという仮定から，$T(N, M)$ が長さ有限の切片となるような零点 $N,\ M(> N)$ が存在する．よって定理 3 により，$\{a_n\}_{N \leq n \leq M}$ は上の式で表される.「全体がひとつの式（一般項）で表される」という仮定から，この式がすべての番号 n に対し成り立つので，解は零点と零点の間隔が（a_0 を含む切片を除いて）すべて同一となる．

例 4　最初の切片 $T(N_0, N_1)$ の長さを 2 と決めると，$T(N_0, N_1) = [\,a_0,\, a_1\,] = [\pm 1,\, 0]$ となる．簡単のため $a_0 = 1$ を選択すれば，

$$[\,a_0,\, a_1\,] \;=\; [\,1,\, 0\,]$$

次に $T(N_1, N_2)$ の長さを 3 と決めると，$T(N_1, N_2) = [\,a_1,\, a_2,\, a_3\,] = [0,\, \pm 1,\, 0]$ となるが，$T(N_0, N_1)$ の中の a_0 との関係から，$T(N_1, N_2) = [0,\, -1,\, 0]$ でなければならない．すなわち，

$$[\,a_1,\, a_2,\, a_3\,] \;=\; [0,\, -1,\, 0]$$

次に $T(N_2, N_3)$ の長さを 4 と決めると，$T(N_2, N_3) = [\,a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6\,] = [0,\, \pm 1,\, \pm 1,\, 0]$（複号自由）となる（例 2 参照）が，$T(N_1, N_2)$ の中の a_2 との関係から，$T(N_1, N_2) = [0,\, 1,\, \pm 1,\, 0]$ でなければならない．簡単のため $a_5 = 1$ を選ぶことにすれば，

$$[\,a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6\,] \;=\; [0,\, 1,\, 1,\, 0]$$

次に $T(N_3, N_4)$ の長さを 5 と決めると，$T(N_3, N_4) = [\,a_6,\, a_7,\, a_8,\, a_9,\, a_{10}\,] = [\,0,\, \pm 1,\, \pm\sqrt{2},\, \pm 1,\, 0\,]$（$\pm 1$ の複号は同順）となるが，$T(N_2, N_3)$ の中の a_5 との関係から，$T(N_1, N_2) = [0,\, -1,\, \pm\sqrt{2},\, -1,\, 0]$ でなければならない．すなわち，

$$[\,a_6,\, a_7,\, a_8,\, a_9,\, a_{10}\,] \;=\; [0,\, -1,\, \pm\sqrt{2},\, -1,\, 0]$$

……

このように続ければ，零点の間隔が順に 1, 2, 3, . . . となっていく解の一例

$$[\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ \pm\sqrt{2},\ -1,\ 0\ \ldots\ ]$$

が構成される．

5．カッシーニ・シムソン型漸化式に対応する微分方程式

非正規形の常微分方程式で,（初期値を与えたときの）解の一意性が成り立たない簡単な例としては $y' = 2\sqrt{y}$ やクレローの微分方程式 $y = xy' + f(y')$ などが有名であるが，ある意味でカッシーニ・シムソン型漸化式の解に似た状況になる微分方程式の例が [2] に紹介されている：

$$y^2\,(1+y'^2) \ = \ 1$$

を，変数分離形の定跡通り解けば“一般解”$(x-c)^2 + y^2 = 1$ が得られ，それとは別に“特異解”$y = \pm 1$ が得られる．前者は x 軸上に中心をもつ半径 1 の円の族であり，2 つの“特異解”は x 軸に平行な直線で，これらの円の族に北極と南極で接する．さらに，円どうしが $y = 0$ で互いに接する．これらの接点で直線から円に，円から別の円に，その円から別の直線に移る（ことを何度も繰り返す）解が“真の一般解”である．

カッシーニ・シムソン型漸化式は零点ごとに局所解が（何種か）得られ，それらをうまくつなぐことで“真の一般解”が得られるという点で，上の状況に似ているのではないかと思う.「特異解」にあたるものはないけれども，零点で「一般解」どうしが“接して”，それらを零点ごとに乗り換えることができる点も似ている．

ところで，線形方程式の場合は，漸化式（あるいは差分方程式）と微分方程式には明確な対応がある．すなわち，2 階でいえば，漸化式

$$a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n \ = \ 0$$

と，微分方程式

$$f''(x) - pf'(x) + qf(x) \ = \ 0$$

の解は（解法も）まったく同じ構造である．

非線形や非正規形ではこのようにうまくはいかないと思われるが，カッシーニ・シムソン型漸化式の場合は，対応する微分方程式を特定できる．カッシーニ・シムソン型漸化式を演算子 $Ea_n = a_{n+1}$ で表現すると，

$$(E^2 a_n)\cdot a_n \ - \ (Ea_n)^2 \ = \ Cq^n$$

となるから，a_n を $f(x)$ に，E を微分演算子 $Df(x) = f'(x)$ に置き換えれば，

$$(D^2 f(x))\cdot f(x) \ - \ (Df(x))^2 \ = \ Ce^{qx}$$

となる（数列空間の等比数列に対応するものは関数空間では指数関数であることに注意）．

また，カッシーニ・シムソン型漸化式の左辺を差分演算子 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ で表現すると，$E = \Delta + 1$ により

$$\begin{aligned}
(E^2 a_n)\cdot a_n \ - \ (Ea_n)^2 &= ((\Delta+1)^2 a_n)\cdot a_n \ - \ ((\Delta+1)a_n)^2 \\
&= ((\Delta^2 + 2\Delta + 1)a_n)\cdot a_n \ - \ (\Delta a_n + a_n)^2 \\
&= (\Delta^2 a_n)\cdot a_n + 2(\Delta a_n)\cdot a_n + {a_n}^2 \ - \ (\Delta a_n)^2 - 2(\Delta a_n)\cdot a_n - {a_n}^2 \\
&= (\Delta^2 a_n)\cdot a_n \ - \ (\Delta a_n)^2
\end{aligned}$$

となり，なんと Δ で書いても“同じ形”である．（このことからもカッシーニ・シムソン型漸化式がある意味で特別な漸化式であることがうかがえる.）

したがって，カッシーニ・シムソン型漸化式に対応する微分方程式が

$$y''\,y \ - \ y'^2 \ = \ Ce^{qx}$$

であることは疑いないが，残念ながらこの非線形 2 階微分方程式は初等的に解けないようである．ただし，右辺が 0 の場合については，一般解（すべての解）が

$$y \ = \ ae^{rx} \qquad (a,\ r \text{ は任意の定数})$$

で与えられることが示される．これは定理 1 に対応している（その厳密な証明も，定理 1 の証明で a_0 を $y(x_0)$ に，a_1 を $y'(x_0)$ にそれぞれ対応させれば，ほぼ同じ考え方でできる）．

参考文献

[1] 河野真，とある数列の漸化式，PROJECT M vol.2，2015
[2] 一松信，微分方程式と解法，教育出版，1976

On A General Solution of Some Nonlinear Implicit Recurrence Relations of Order Two

Youichi Yamazaki
Department of Applied Science, Faculty of Science,
Okayama University of Science,
1-1 Ridai-cho, Kita-ku, Okayama 700-0005, Japan

(Received November 2, 2020; accepted December 11, 2020)

One of well-known theorems about the Fibonacci sequence ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ F_0 = 0,\ F_1 = 1$) is

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 \ = \ (-1)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

which is called Cassini-Simson's identity. In connection with this, we consider a non-linear implicit recurrence relation

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 \ = \ Cq^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

where C and $q(\neq 0)$ are given (real or complex) constants. If $C = 0$, this relation becomes the well-known relation $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2$ for geometric sequences.

In this paper, we investigate a general solution of such recurrence relation. As a method of analysis, the linear recurrence formula behind it is used.

Keywords: nonlinear recurrence relation; Cassini's identity; general solution.