岡山理科大学紀要 第53号 B pp. 133-140(2017)

「数学的な見方・考え方」を創発するメタ認知的アプローチ

黒﨑　東洋郎

岡山理科大学教育学部初等教育学科

(2017年10月17日受付、2017年12月4日受理)

1　はじめに

AI の発達で、未来社会の構造や生活スタイルがどのように変化するのか、専門家ですら予測できない変動の時代に直面している。従前通り、数量や図形についての知識・技能の習得に終始する学びの時代ではない。誰かが持続可能な社会を切り拓いてくれるのを待つのではなく、能動的に持続可能な未来社会を切り拓き、よき市民として貢献できるような資質・能力を育成する学びが求められている。こうした資質・能力としてキーコンピテンシーや 21 世紀型スキルなど様々な資質・能力が提唱されている。

我が国においては、教育基本法 30 条 2 項を踏まえ、学び方として「主体的で、対話的な深い学び」が強調され、資質・能力として「生きる力」の育成が改めて強調されている（中央教育審議会答申[1]、2016)。学び方として提言されている「深い学び」に関連して、算数・数学科では、育成すべき資質・能力が大きく変更されている。新たに告示された新小学校学習指導要領、算数科編[2]（2017）の算数科の総括目標は、小中高一貫教育の視座から、下記のように示されている。

第3節　算数

第1　目標

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質能力を育成することを目指す。

(1) 数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。

(2) 日常の事象を数理的に捉え、見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。

(3) 数学的活動の楽しさや数学のよさに気付き，学習を振り返ってよりよく問題解決する態度、算数で学んだことを生活や学習に活用する態度を養う。

第 1 の改訂点は、資質・能力に関わる「数学的思考力」の変更である。従前の算数・数学科で育成を目指したわが国固有の数学的思考力としての「数学的な考え方」が、「数学的に考える」に変更されたことがあげられる。第 2 の改訂点は、「数学的な見方・考え方を働かせ」と示されている通り、数学的な見方・考え方が、数学的活動や数学的思考を促す起爆剤として機能する道具として位置付けられている点である。第 3 の改訂点は、現行の学習指導要領の算数科の目標の冒頭に「算数的活動を通して」と示されていた算数的活動が後退し、算数的活動という用語も数学的活動という用語に変更されている点である。

このように新学習指導要領、算数科編では、教育の目的としていた従来の数学的な見方．考え方が道具として位置付けられ、新しく育成を目指す資質・能力として「数学的に考える」が示された。ところが、道具としての数学的な見方・考え方をどのように機能させて深い算数の学びにすべきか、そのメタ認知的アプローチの方策は不明瞭で．これから探究すべき課題である。

そこで、本研究では道具としての数学的な見方・考え方をどのように生成し、それを働かせて、数学的に考えを深めればよいのか、メタ認知的アプローチの授業デザインについて検討する。

2　新学習指導要領の意図

（1）　算数科で育成すべき資質・能力

ロジャー（1969）は知識・技能の習得は、変動の無い時代においては意味があるけれども、変動の時代においては意味を失うという。変化し続ける環境の中で生きることになり、教育の目的は変化と学びを促進する資質・能力を育むことであるという。変動の未来を切り拓く真の資質・能力をはぐくむに当たって、指導の系統性に強みのある算数科では、小中高一貫教育を見据えて、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成することを目指す」という一貫型の総括目標を掲げている。「主体的で、対話的な深い学び」を柱とするアクティブラーニングが強調されているものの、従前の算数的活動（一貫教育の観点から「数学的活動」に変更）を強調する行動主義的教育を後退させている。

行動主義重視の教育は、児童の算数への学習意欲を喚起する主体的な学び重視の教育であるが、主体性よりも深い学び、外

的な活動よりも内的な活動重視の算数教育へのパラダイムの転換を図っている。そして、算数科が育成すべき資質・能力を、「数学的な見方・考え方」から、「数学的に考える」へとパラダイムの転換をしている。

今回の改訂を機に、我が国の算数・数学教育の特色であった数学的な思考力は、「数学的な見方・考え方」から「数学的に考える」に変更された。そもそも、従前の「数学的見方・考え方」は、「数学的な見方」「数学的な考え方」「数学的な考え」をすべて一括して包括的に捉えるものになっていた。そのため、「数学的考え方」という語感からは「方法知」としてのストラテジーの教育観があり、「数学的に考える」という数学的思考と区別できないという不明瞭さがあり、「数学的な見方・考え方」の理論的、実践的研究の進展に影響を及ぼしていた。「数学的な見方」と「数学的な考え方」についても、見方と考え方には、どんな違いがあり、そのように関連するのかということも曖昧さがあった。こうした問題点を解消すべく、学習指導要領の改訂を機に整理し、方法知として「数学的な見方・考え方」を動的な生命体として位置付け、数学的な思考力としての「数学的に考える」と区別して提言したものと思われる。

本研究では、算数の課題解決では、入り口で「数学的な見方・考え方を働かせ」、解決の実行する中核的行為が「数学的活動」で、出口の省察で深い学びになっていたかどうかの評価対象となる資質・能力が「数学的に考える」であると捉えることにする。なお、算数科の資質・能力は、数学的に考えるだけが、一人歩きするものではない。「数学的な見方・考え方を働かせること」「数学的な活動」「数学的に考える」の３つに分けた場合、三者一体となって、初めて資質・能力として完成するものと捉えるのが適当と考える。

（2）　動的な生命体としての数学的見方・考え方

改訂された算数科の新しい目標の意図実現のためには、探究すべき課題がある。第１は、「数学的な見方・考え方を働かせ」をどのように捉えて、数量や図形教材にアプローチしていけばよいかである。松原（1990）は、学校現場で「数学的な考え方を伸ばす指導」について、数学的見方・考え方を指導できるような印象を与える」[3] と警鐘を鳴らしている。「数学的な見方・考え方を働かせ」と示されると、既に、数学的な見方・考え方が身に付いている印象があるが、実体は潜在化していたり、まだ身に付いていなかったりする。そのため、教材に対して、具体的にどんな数学的な見方・考えを、どのように働かせるようにアプローチすればよいのかを実践する中でリサーチするように学習者を手助けする必要がある。

我が国では昭和３３年から今回の改訂に至るまで、数学的な見方・考え方を育むため、多くの研究者が理論的・実践的研究を探究し続けてきた。しかしながら、どのように教材にアプローチすればよいかいまだに解明されていない。

今回の改訂では、数学的な見方・考え方は、新しく数学的活動及び数学的な考えを創発する原動力である動的な生命体として位置付けられ、有機的、機能的に活用する道具として強調されているのが特徴である。数量や図形の課題の解決の糸口を見付けたり、自力解決で見いだした自己の表層的な考えを、深い考えへと転換し、数理的に深めていくため視座を与えたりするのが数学的な見方・考え方の重要な機能である。こうした数学的な見方・考え方を生成することができないので、他者が与えてくれるのを待つということは意味がない。教材である数量や図形の課題について、試行錯誤しながら多角的に分析し、直観や洞察を生成し、具体的な数学的な見方・考え方を創発し、これを働かせて課題解決させるようにすることが重要である。

（3）　数学的な見方・考え方と数学的活動の関係性

算数的活動は、算数と数学の一貫教育の観点から数学的活動に統合された。一貫教育だからと言うけれども、どのような視座から「数学的活動」に統合したのかを明らかにする必要がある。学習指導要領解説書（2017）によれば、

> 数学的活動とは，事象を数理的に捉えて，算数の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行することである

と、定義されている。

特に、意図するところは、図1に示す算数・数学の問題発見・解決の過程に数学的活動を位置付け、より明確に示したことにあるという。

・日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する、という問題解決の過程

・数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し，数学的に処理し，問題を解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする、という問題解決の過程している。

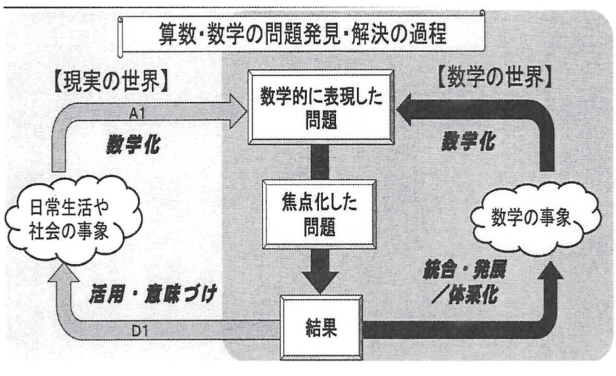

図１　算数・数学の学習過程のイメージ
出典：学習指導要領解説、算数科編より

算数的活動が登場した経緯は、算数・数学離れの歯止め方策と

して、算数実験、具体物を操作する活動など、児童が目的意識をもって楽しく、主体的に取り組む算数にかかわりのある活動を取り込むことにあった。現行の学習指導要領（2008）では、言語活動の充実の観点から、説明し、伝え合う表現活動や外的な算数的活動だけでなく、記号操作する内的な活動も算数的活動とされた。

今回の改訂では、言葉が「数学的活動」に改訂されただけでなく、解決の過程や結果を振り返って言語･記号を使って考察･検討することを強調し、「評価･改善することができるようにすることも大切である」と付加しているのが特徴である。軽く付加されている観があるが、この付加は児童の算数の学びのパラダイムの改革･改善を求めている。従前の「児童が目的意識をもって主体的に算数を学ぶ」から、振り返りを重視することで「児童がPDCAサイクルによって、主体的に算数を学び続け、その学び方をブラシュアップし続ける」ことを求めている。単に、質的な資質・能力をはぐくむだけでなく、その学び方の質を高度化することを児童に求めている。

３　数学的な見方・考え方の創発

（1）　数学的な見方・考え方と数学的に考える

「数学的な見方・考え方」と「数学的に考える」を分化して考える場合、その違いと関係性を明らかにする必要がある。

「数学的な見方・考え方」とは、

「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的、発展的に考えること」として再整理できる」

（中央教育審議会、2016）

と示されている。しかしながら、この定義は、「数学的な見方・考え方」と「数学的に考える」の両者を区別していない曖昧さを有したまま提示している。「数学的な見方・考え方」は、数量や図形についての課題にアプローチの仕方や方法を示すものであり、「数学的に考える」ことそのものではない。「数学的な見方・考え方」を試行錯誤しながら直観や洞察を基に生成し、これを働かせて事象を数理的に捉え、数量や図形の及びそれらの関係などに着目し、資質・能力につながる数学的に考えるための起爆剤として位置付くのが「数学的な見方・考え方」である。根拠をもって筋道を立てて考える論理的な思考や、自分の考えを振り返って批判的思考し、統合的・発展的思考して「数学的に考える」こととは深く関連するけれども、「数学的に考える」という思考そのものではない。同じ問題でも、複数の「数学的な見方・考え方」から考えられるようになれば、「ビッグアイデア」の獲得につながり、しかも、ものの見方・考え方を変える資質・能力につながる。

（2）数学的な見方・考え方

定義の前文「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え」というのは、「数学的な見方・考え方」であり、「数学的に考える」という資質・能力そのものではない。働かすべき「数学的な見方・考え方」は、具体的な数量や事象に直面した時、「数学的な直観力」により発動したり、洞察によって逐次、機能したりしていくものと考えることができる。数学的な直観力は、実体は無く、事象に直面した瞬間において、子どもに潜在している数学的直観力が直ちに発動するわけではない。数量や図形に関わる事象を多角的な視点から試行錯誤しながら注意深く探究する中で、気付きによって生成される。その直観に導かれて「数学的な見方・考え方」が具体化できると、それを働かせて、能動的な数学的活動が可能となり、内的な数学的活動としての「数学的に考える」が機能的に発動するものと考えられる。

４　数学的な見方・考えを創発する授業デザイン

新しい算数教育は、算数科の総括目標に示された通り、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質能力を育成する」ことを目指している。その意図実現を図るためには、「数学的な見方・考え方を働かせる」ことがマスターキーとなる。「数学的な見方・考え方」は、既に完成されているかの観があるが、Freudenthal（1984）[4]が提言するように、これから育成し、完成を目指すべきものである。

以下、第6学年「分数の乗法の演算決定の事例で、具体的に検討する。

―問題―

１dL で壁を４／５m^2ぬることのできるペンキがあります。同じペンキ１／３dL では、何m^2ぬれますか。

第６学年「分数の乗法」の学習指導において、学習指導すべき指導事項は、

A　分数のかけ算の意味指導

B　分数のかけ算の計算の仕方指導

C　分数のかけ算の習熟指導

の３つがある。ややもすれば、計算の仕方や計算技能に特化しやすいが、演算の概念形成に関わるかけ算の意味指導は、まずもって深く考えさせなければならない重要な学習事項である。単に演算の意味理解を深化させるだけでなく、数学的な見方・考え方を活用しつつはぐくみ、どのように考えたかを説明し、伝え合う数学的コミュニケーションを発達させるなど、汎用性のある能力を培う最適な教材の１つに挙げられる。

（1）　表層的な見方・考え方

児童が、上記の問題に直面して、まずもって A の分数のかけ

算の意味に関する「問い」を発生し、課題発見しなければならない。

Aに関する課題発見・課題解決する場合、「数学的な見方・考え方」を働かせなければならないが、そう簡単に有効に働く具体的な「数学的な見方・考え方」が生まれるわけではない。そのためには、文脈的アプローチに即して「問い」を発生しやすくし、「数学的な見方・考え方」を生成しやすくするシュチュエーションを構成するなどの手助けを必要とする。

具体的には、児童自らがif思考を働かせて、「もし1/3dLのペンキが2dLだったら」と児童を手助けし、既習の整数の場合に置き換え、乗数が整数の場合の計算と関連付けることを通して、数学的見方・考え方を生成し、これを働かせて演算決定できるようにすることが大切である。

ただし、一般に、児童の分数の乗法を用いる場面に対する「数学的な見方・考え方」による捉えは、表層的であり、数理的な捉えになっていない場合が実に多い。例えば、以下の事例は、学校現場でみられる表層的な授業であるが、これでよしとする授業が驚くほど多い。これでは、新しい算数教育が求める「数学的な見方・考え方」を働かせ、数学的な活動を通して、「数学的に考える」という資質・能力を育む授業と乖離していると言わざるをえない。

<浅い学び>

T　どんな計算になるのかわからない人は、1/3dLのペンキが2dLだったらと考えてごらん。

C　あ！掛け算かな？

C　ほんとだ、式は4／5×2になる。

T　1／3dLのときは？

C　えっと、2dLのときは4／5×2なので、同じように2dLが1／3dLになっても、4／5×1／3のかけ算になります。

C　同じ考えです。整数のときにかけ算になるので、分数になっても、同じかけ算でいいです。

この段階までの学びは、表層的な浅い学びであり、真の「数学的な見方・考え方」を働かせて、「数学的に考える」演算決定になっていない。それは、単に、乗数が整数の場合と関連づけ、整数の場合と同じようにみて、かけ算になると類推的に考えたものであり、分数のかけ算の意味を数理的に系統的、体系的に考えた本質的な深い理解につながるものになっていない。

（2）　深く考えを誘発する疑問・問いの生成

本当の分数のかけ算の意味を深く考えて、演算決定するためには、新たな「問い」の発生を生み、更なる探究を促すような数学的な見方・考え方を生成し、働かせるシュチュエーションを設定し、手助けを必要とする。ストッケロとB・ゼスト(2013)は、「授業中の出来事によって，児童の数学的な考えを拡張・深化、変容させるため、まさに教師が関与すべき瞬間として、PTM (Pivotal Teaching Moment)」[5]を提案している。浅い学びは、深い学びへと発達させるため、教師は児童の学びに介入する必要がある。杉山(2012)は数学的に考えを深めるためには、自分の考えの「根拠を問う」こと[6]を第1の要素にあげている。整数値の2dLの場合がかけ算だから、1／3dLという分数値になってもかけ算だとするのは、分数の乗法の演算決定の根拠としては不明瞭である。新たな「問い」をもち、「数学的な見方・考え方」を働かせ、その根拠を探し求め続けられるように手助けをする必要がある。

具体的には、ペンキの量が2dLの場合、4／5×2という(分数)×(整数)の演算の根拠が明らかにされないまま、分かったような気になっている状況が生まれている学びを批判的に検討する必要がある。批判的思考を働かせ、なぜ、4／5×2というかけ算になるのか、その根拠を探究するきっかけを生成する新たな「疑問」「問い」の生成を促す教師の手助けが必要である。

<深い学びに向けた新たな「疑問」「問い」の生成>

T　ペンキの量が2dLのとき、4／5×2というかけ算になりますね。

C　はい。

T　かけ算になるのは、どうしてですか。かけ算になる理由を説明できますか。

C　えーと、1dLで4／5m²ぬれるから、2dLでは1dLの2つ分の面積がぬれます。

T　では、1／3dLのときは、どうですか。

C　1dLの1／3つ分の面積がぬれます。

C　あれー？(疑問)

C　私も変だなと思います。

C　僕も、2dLは、1dLの2つ分と言っていいと思います。ですが、1／3dLを　1dLの「1／3つ分」と、分数でいくつ分をいうのは、少し変だと思います。

C　ほんとだ。

C　じゃ、どう説明すればいいのかな？(「問い」)

T　どうやら、「1dLの　いくつ分」では説明し切れませんね。

C　はい。

C　別の考えをしないといけないよ。

乗法の演算決定は、単項演算や二項演算を基礎にして、明確に実行されなければならない。上記の通り、経験の深い「何のいくつ分」を根拠に説明しようとするが、「何の　いくつ分」という考えでは、説明しきれないことを強く意識させることが大切である。同時に、ペンキの量が1／3dLになったとき4／5×1／3の式になる根拠をリサーチするための新たな「問い」をもったことは、本質的な分数の乗法の意味を探究するよい「問い」への気付きであることを強く自覚させたいものである。「あ

れー？」は、「１dLでぬれる面積４／５m^2の　いくつ分」という根拠を批判的に思考する本質的な「気づき」「疑問」である。形式的に類推を働かせて、平気で「１dLでぬれる面積４／５m^2の　１／３つ分」という発言する児童が多い。これに対して、「疑問」を発し、整数の場合でしか「何の　いくつ分」という考えは通用しないことへの「気付き」、これを端に発して「どう説明すればいいのかな」という新たな根拠を探究する「問い」の発生に創発的に連鎖している。ストッケロとB・ゼスト(2013)は、PTMを提言しているが、重要なのは児童が「数学的に考えを深める」ことに関してニーズに気付くのを手助けする教師の関与こそが重要である。

（３）　数学的な見方・考え方の創発

「何の　いくつ分」という根拠では通用しないという「気付き」を生成した次の段階のプロセスは、創発された内発的な「問い」を解決するため、「数学的な見方・考え方」を働かせることである。直観的に「数学的な見方・考え方」が生まれればよいが、その実体は不明瞭で、あるとしても深く潜在したところにあり、具体化して、働かせるのは簡単なことではない。具体的にはたらかせるべき数学的な見方・考え方は、どんなものか、そのためのアプローチは、多角的な視点に立って試行錯誤的にリサーチしかない。すなわち、自分自身でメタ認知的アプローチすること[7)]が大切である（アルベルト・オリヴェッリオ、川本英明訳、2005）。

乗法の意味には、単項演算と二項演算を基礎にして２つある。すなわち、「何の　いくつ分」と「何の何倍」とがあり、分数の乗法には、「何の　何倍」という数学的な考えが適応される。オペレーターを表す倍概念は、２量の関係性で捉える抽象的な割合の概念を基礎とするため、児童にはこれが有用であると着想して「数学的な見方・考え方」を働かせよいと、考えにくいものとなっている。そのため、自分自身でメタ認知的アプローチすることが重要であるが、これを、如何に手助けするかが重要である。そのためには、図を利用して、視覚に訴えて、数学的な見方・考え方を創発し、活用しやすくすることが重要である。

（４）　数学的見方・考え方を働かせる数直線

分数の乗法の概念を捉えさせるため、有効な図として、学習指導要領や教科書は、下記のような２本の数直線を活用することを推奨している。学校現場でも、分数のかけ算の意味を捉えさせるための有効なアプローチは、数直線の利用と画一的に捉える傾向がる。ところが、この数直線を用いると４／５÷１／３とかけ算ではなく、この問題はわり算なのかと考える児童が少なくない。児童の表層的な「数学的な見方・考え方」の発動では１dLよりも１／３dLの方が少ないという先入観が生成される。このため、少なくなる場合は、今までの経験から、わり算になると誤った演算決定を創発してしまうのである。

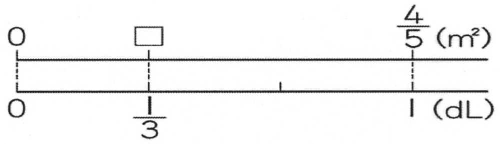

図２　演算決定の数直線

したがって、数直線を使うことを安易に役に立たないと洗い流して捨て去るよりも、数直線を活用する場合にも、どのような数直線にすれば有効になるのか、あるべき数直線の最適化を検討するとともに、その数直線を活用する場合、どのような数学的な文脈的アプローチをもちいて具体的に「数学的な見方・考え方」を働かせて、演算決定する課題にアプローチしていけばよいのかを、多角的に分析し、創発工夫することが不可欠である。

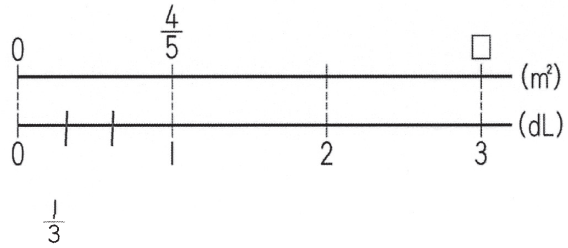

図３　関数的な見方・考え方を働かせる

上記の図３の数直線を示し、「１dLで４／５m^2ぬれるペンキがあります。１／３dLでは、何m^2ぬれますか」と、ビジュアル思考を促しても、４／５÷１／３と、わり算で演算決定すると思われる。理由は、ペンキの量が２dLの場合、３dLの場合と言った整数の場合から形式不易の原理を働かせて、１／３dLの場合も同じように形式連鎖的な見方・考えを働かせて、かけ算になると考えると思われる。ところが、この数直線を用いて１／３dLのときはどんな計算になるかと問われると、１／３dLの場合のみを切り取って考えるのである。

ペンキの量が２dLの場合、３dLの場合、１／３dLの場合を連鎖的な見方・考えができれば、かけ算になると教師は考え易いが、児童の思考の様相は試行錯誤的である。数直線を使うとそれまでの思考の流れが一気に中断する。数直線を活用すればビジュアルに数学的に考えが進むと言われるけれども、数直線を用いて考える操作的思考の段階と言語・記号を用いて数学的に考える段階の間には大きな溝がある。

（５）　関数の見方の創発と機能の促進

分数のかけ算の意味は、２量の関係性で捉える倍概念が適応され、理解される。その理解は、働かせるべき「数学的な見方・考え方」として、「ペンキの液量が２倍、３倍・・と増えれば、伴ってぬれる面積も２倍、３倍・・・と増える」という関数的な見方・考え方が、「倍概念」という数学的思考の裏付けとなる。

したがって、この場における具体的な「数学的な考える」とは、「整数倍で考える」を拡張して「分数倍で考える」ことに着目することが本質的な「気付き」である。児童にとって、オペ

レーターを表す倍概念は着想しにくく、とりわけ「１／３は、１より小さい」という先入観が邪魔して、分数倍の着想がかけ算の演算決定に至るには、困難な状況がある。

そこで、２量の関係性で捉える倍概念を創発するためには、「数学的な見方・考え方」の具体として、「関数的な見方・考え方」を活用して、整数倍から分数倍に発展的に連鎖させて「何倍になるか」を考えさせるような文脈的アプローチにする必要がある。

＜関数的な見方の創発＞

Ｔ　ペンキの量が、２ｄＬや３ｄＬのときは、どんな計算になりますか。

Ｃ　２ｄＬのときは・・・４／５×２
　３ｄＬのときは・・・４／５×３
　分数のかけ算になります。

Ｔ　なぜ、かけ算になりますか。

Ｃ　いくつ分で考えると、・・

Ｃ　１ｄＬで４／５ｍ^{2}ぬれます。２ｄＬは１ｄＬの２つ分、だから、「４／５ｍ^{2}の　２つ分」なので、４／５×２になります。

Ｃ　３ｄＬのときは、１ｄＬの３つ分、だから、「４／５ｍ^{2}の　３つ分」なので、４／５×３になります。

Ｔ　他にも、かけ算になる理由が説明できますね。
　かけ算の意味には、「何の　いくつ分」と、他にも
　考え方がありましたね？（学び直しを促す）

Ｃ　えーと、他の意味では？・・・

Ｃ　あ！　倍の考えかな。

Ｃ　ああ。倍だよ。

Ｔ　どうやら、気づいたようだね。
　では、図を使って、倍の考えで説明できますか？

Ｃ　はい、このように２ｄＬは、１ｄＬの２倍ですね。
　１ｄＬで４／５ｍ^{2}ぬれるので、２ｄＬでは、その２倍ぬれるから、４／５×２のかけ算になります。どうですか。

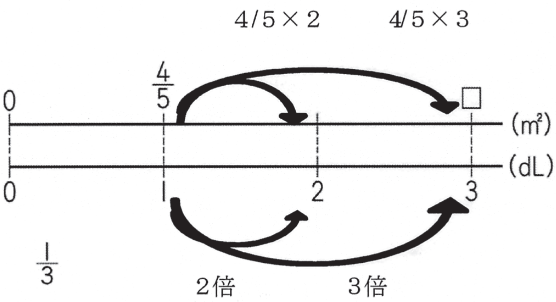

図４　整数倍の関係を表す

Ｃ　３ｄＬのときは、３ｄＬは、１ｄＬの３倍だから、１ｄＬで４／５ｍ^{2}ぬれるので、３ｄＬでは、その３倍ぬれるから、４／５×３のかけ算になります。

Ｃ　ペンキの量が何倍に増えると、ぬれる面積もその何倍に増えると考えればよいので分かり易いです。

Ｃ　いくつ分は、たし算にも使える考えだけど、倍の考えだと、かけ算にしかなりません。

Ｃ　倍の考えの方が、かけ算になるかどうかの拠り所がはっきりします。（明瞭性の観点）

こうして、乗法の意味を、「何の　いくつ分」という考え他に、「１ｄＬと２ｄＬ、３ｄＬの倍の関係性」に着目させ、ペンキの量を１ｄＬ の２倍、３倍にすれば、それに伴って、ぬれる面積も１ｄＬでぬれる面積４／５ｍ^{2}の２倍、３倍になるという「関数的な見方・考え方（比例）」を創出して、「整数倍のアイデア」に基づき、発展的に分数×整数の場合を意味付けする。倍概念は、整数の乗法の場合、小数の乗法の場合、分数の乗法の場合と、いずれの場合にも一貫して活用できるジェネリックスキルに相当するビッグアイデアであり、できるだけ早めに引き出すことが肝心である。

ペンキの量を２倍、３倍、・・・すれば、それに伴ってぬれる面積は２倍、３倍、・・・になるという関数的な見方・考え方を創発できると、次は、本授業の最大の山場にさしかかる。この場面では、整数倍とは逆向きに、発展的に１より小さい分数倍に拡張して関数の見方・考え方を活用していけるようにすることが指導のポイントである。すなわち、１／３ｄＬ は、１ｄＬの何倍になるか・・・と、関数の見方を働かせて、乗法の演算決定につながる分数倍の思考を進めていくようにすることが指導のポイントである。

＜関数的な見方の活用＞

Ｔ　ペンキの量が１／３ｄＬのとき、「いくつ分」の考えでは、説明しきれませんでしたね。
　かけ算には、他に考えはありませんか

Ｃ　倍の考えではどうでしょうか。

Ｃ　えーと、１／３ｄＬは、１ｄＬの１／３倍と考えれば、ぬれる面積は１ｄＬでぬれる面積４／５ｍ^{2}の１／３倍になるから、式は４／５×１／３のかけ算になります。

Ｃ　図を使って説明します。２ｄＬ、３ｄＬのときと同じように倍で考えて、１／３ｄＬだと、ペンキの量は１ｄＬの１／３倍ですね。ペンキの量が１／３倍になれば、それに伴ってぬれる面積は１／３倍です。だから、かけ算になるから、式は４／５×１／３です。どうですか。

Ｃ　いいと思う。

Ｃ　「４／５ｍ^{2}の１／３つ分」というのは、何だか変だったけれども、１ｄＬでぬれる面積の4/5ｍ^{2}の１／３倍になると言われると、よく分かりました。

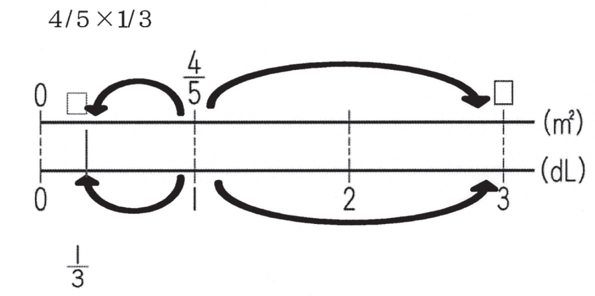

図５　分数倍の関係を表す

数学的な見方･考え方を働かせる場合、単に１／３ｄＬを切り取って、どんな計算になるかと問いかけても､演算決定はできない。数量の１ｄＬと２ｄＬ、３ｄＬの関係を、１ｄＬの２倍、３倍と関数的な見方･考え方から捉え、この見方を１ｄＬと１／３ｄＬの関係に発展的に拡張してみることが大切である。そして、この経験から、整数の場合の２倍、３倍を基礎にして、今度は、逆向きに、１／３ｄＬを１ｄＬの１／３倍と拡張して考えれば、分数×分数の計算の意味を試行錯誤しながら何とか、倍概念を根拠に演繹的に考えを進めて演算決定することができ、しかも、教室内での合意形成ができるという示唆を得た。

５　数学的な見方・考えを創発するアプローチを振り返る

先の見えない変動の未来を見据えて、汎用性の高い資質・能力の育成が求められ、算数教育では、従前の「数学的な見方・考え方」育成の在り方が見直され、新しく「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育む」ことを目指す方向性が示された。昭和３３年の学習指導要領の改訂から「数学的な見方・考え方」を育成する研究が理論的、実践的に探究し続けられてきたが、未だに解明されていない課題が多い。未解決の多くの課題を積み残したままの状況を踏まえて従前の「数学的な見方・考え方」は整理され、新しく活用するものとして、有機的な機能をもつ動的な生命体としての位置づけを与えられた。

「数学的な見方･考え方を働かせて」と示されると､松原(1990)が警鐘をならしているように、多くの算数・数学教育の担当者はその語感から、あたかも既に完成された「数学的な見方･考え方」が既に児童に身に付いているかのような印象を受ける。確かに、長年、算数教育では､「数学的な見方・考え方」を育成することに精力を費やし、教え導くことができると誤解してきた経緯が無いとは言い切れない。危惧されるのは、学校現場では理論通りに授業実践できない場合､「数学的な見方・考えを働かせること」や「数学的に考える」という資質・能力の育成を目指す算数教育は洗い流され､単なるスローガン倒れになることである。したがって､「数学的な見方・考え方を働かせ」と言っても、子どもにそのような完成した「数学的な見方・考え方」が身に付いているわけではないことを強く意識し、数量や図形に能動的に関わっていく中で､「数学的な見方・考え方」を働かせながら、育成すべきものとして、逐次、汎用性のある能力につながるように精度を高めていくことが大切である。

変動の激しい時代にあって、専門家でさえ予測不可能な未来に向かって持続な可能な社会を能動的に切り拓いていく資質･能力が求められる時代にあって、算数.数学科では、「数学的に考える」という資質・能力の育成を通して、その一役を担う必要がある。目指す「数学的に考える」という資質・能力を育成するには､「いかに､数学的な見方･考え方を創発できるか｣が、成否の鍵を握っている。それは､「数学的な見方・考え方」が「数学的に考える」という数学的な思考の起爆剤になるからである。

児童自らが、事象を数理的に捉えて、数量や図形にかかわる中で課題を発見し、試行錯誤的にアプローチしていく中で具体的にどのような「数学的な見方・考え方」を創発し、これを活用して、質の高い「数学的に考える力」に連鎖的に連動してすればよいかの理論的・実践的研究は、今、研究の緒についたばかりなのである。

＜参考文献・引用文献＞

１）　文科省､「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）（中教審第 197 号）｣、2016.

２）　文科省、小学校学習指導要領解説、算数科編、2017.

３）松原元一、「数学的な見方考え方」国土社、1990.

４）Freudenthal・H,Revisiistig　mathematics education.　Dordrecht:Khuwe.1991.

５）Shari L Stockero, Laura R Van Zoest、Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student ThinkingJournal for Research in Mathematics Education､2013.

６）杉山吉茂、「確かな算数・数学教育を求めて」、東洋館出版社、2013.

７）ベルト・オリヴェッリオ、川本英明訳、「メタ認知　アプローチによる学ぶ技術｣、2005.

The approach that emergence performs of a mathematical viewpoint, way of thinking

Toyoo　KUROSAKI

Department　of　Primary　Education　Faculty　of　Education

Okayama　University　of　Science

1－1　Ridai－cho,　Kita―ku,　Okayama　700－0005　Japan

（Received October 17, 2017; accepted December 4, 2017）

Active learning is demanded to live in the unpredictable future actively. Learning to be independent, and to collaborate, and to think about deeply is demanded by the arithmetic education. About the deep learning, contextual approach peculiar to arithmetic department is demanded.

By the new course of study, a mathematical viewpoint was placed as a tool and I considered it as nature ability mathematically, but was shown. However, it is unsolved whether I let a mathematical viewpoint act concretely, and I should deepen a thought mathematically. Therefore, in this study, I bring about the mathematical viewpoint, thought as the tool how and examine meta cognitive approach whether it should inflect.