岡山理科大学紀要 第52号 A pp. 1-6(2016)

無理数回転の部分和の挙動について

四丸直人・高嶋恵三 * ・土井花菜 **
岡山理科大学理学研究科博士課程応用数学専攻
* 岡山理科大学理学部応用数学科
** 岡山理科大学理学研究科修士課程応用数学専攻
(2016年10月19日受付、2016年12月5日受理)

1 導入と背景

以下特にことわらない限り、$\{x\}$ で実数 $x > 0$ の小数部分を表すことにする。無理数 α $(0 < \alpha < 1)$ に基づく無理数回転 $\{n\alpha\}$, $n = 1, 2, \dots$, は整数論との関連等により、古くから多くの研究者の研究対象であった。特に、 Hardy – Littlewood ([5]) は整数論の格子点の問題に関連して、無理数回転の部分和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\{i\alpha\} - \frac{1}{2}\right)$ について考察している。更に、Behnke ([2]) , Hecke ([7]) , Ostrowski ([17]) , Khintchine ([9]) , ([10]) 等、多くの著名な研究が知られている。 また、最近では Vinson ([20]) , Beck ([1]) などの研究がある。

本報告では、無理数回転の部分和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\{i\alpha\} - \frac{1}{2}\right)$ の挙動を考察し、特に、無理数 α がその連分数展開において、大きな部分分母を持つ場合について研究し、その様な無理数回転の部分和が特異な挙動を示すことを報告する。

2 無理数回転の部分和に関する公式について

無理数回転 $\{n\alpha\}$ に対して、その第 n 部分和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\{i\alpha\} - \frac{1}{2}\right)$ を考える。
以下では、 α ($0 < \alpha < 1$) は無理数とし、連分数展開 $\alpha = [\,0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\,]$ を持つものとする。また、 r_n を α の第 n 近似分数とする：

$$r_j = [\,0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_j] = \frac{p_j}{q_j}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

以下で重要な役割を果たすのが、次に示す、自然数 N に対する Ostrowski 展開 である (cf.[16], [17])：

$$N \;=\; \sum_{j=0}^{m} b_j\, q_j \quad , \quad q_0 = 1 \quad ,$$

ここで、 m は $q_m \le N < q_{m+1}$ を満たす自然数であり、各 b_j は次を満たすものとする：

$$0 \le b_0 < a_1\,, \quad 0 \le b_j \le a_{j+1} \quad , j \ge 1 \;,$$

但し、$b_j = a_{j+1}$ のとき $b_{j-1} = 0$ とする。

また、

$$s_j = \sum_{k=j+1}^{m} b_k q_k (\alpha - r_k)\ ,\ \ j = m-1, \dots, 0\ ,$$

とおく。更に、$\delta_j = |\alpha - r_j|$, $\Delta_j = q_j \delta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ とする。

このとき、次の公式が知られている (cf. Mori – Shimaru – Takashima ([15]))。

定理

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left(\{i\alpha\} - \frac{1}{2}\right) \ &= \sum_{j:odd, 1\leq j<m}\left(b_j q_j s_j - b_j \delta_j q_j^* - \frac{q_j}{2}\Delta_j b_j (b_j - 1) + \frac{b_j}{2}\right) \\ &+ \sum_{j:even, 1\leq j<m}\left(b_j q_j s_j + b_j \delta_j q_j^* + \frac{q_j}{2}\Delta_j b_j (b_j - 1) - \frac{b_j}{2}\right) \\ &+\epsilon_m\left(b_m \delta_m q_m^* + \frac{q_m}{2}\Delta_m b_m (b_m - 1) - \frac{b_m}{2}\right) + \frac{b_0(b_0+1)}{2}\alpha - \frac{b_0}{2}\ ,\end{aligned}$$

ここで $q_j^* = (q_j(q_j+1))/2$ 　であり、$\epsilon_m = (-1)^{m-1}$ である。

Beck ([1], 2014) は上記の結果と同じ公式（外形はかなり異なるように見えるが式自体としては同じ結果を与える）を与えている。 [15] では Beck の公式の導出方法とは別に、 cancellation を有効に活用した方法で上記の公式を導いている。また、 Beck([1]) は、例えば $\alpha = \sqrt{2}$ のように、２次方程式の根であるような無理数を主に扱っている。本報告では $\alpha = \pi - 3$, $\alpha = \log_{10} 7$ のような、超越的無理数を主に考える。

3　部分和の挙動の例

この節では、次のような、大きな部分分母を持つ超越的無理数 α について無理数回転の部分和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\{i\alpha\} - \frac{1}{2}\right)$ を考える：

$$\pi - 3 = [\ 0; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots\ ]\ ,$$

および、

$$\log_{10} 7 = [\ 0; 1, 5, 2, 5, 6, 1, 4813, 1, 1, \dots\ ]\ .$$

前述のように、Beck([1]) は、例えば、 $\alpha = \sqrt{2}$ のように、２次方程式の根である無理数を主に扱っており、上記のような超越的無理数は考察の主たる対象ではない。

しかしながら、奇数 j に対しては、例えば $\alpha=\pi-3$, $j=3$ の場合

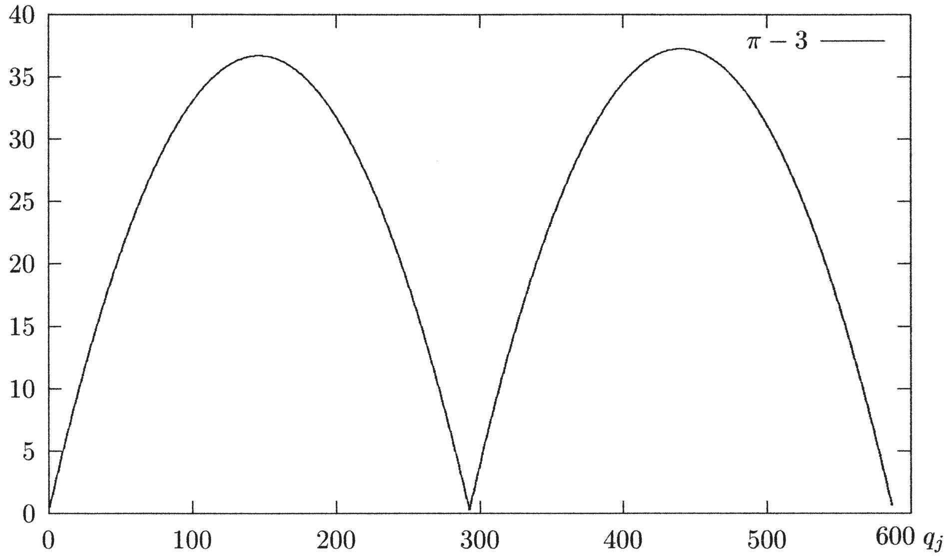
$$\sum_{i=1}^{b_jq_j}\left(\{s_j+i\alpha\}-\frac{1}{2}\right) \;=\; b_jq_js_j-b_j\delta_jq_j^*-\frac{q_j}{2}\Delta_jb_j(b_j-1)+\frac{b_j}{2}$$

は、b_j, $0\;<\;b_j\;<\;a_{j+1}$ に関して、正値の２次関数として振る舞い、一方で偶数 j に対しては、 例えば $\alpha=\log_{10}7$, $j=6$ の場合

$$\sum_{i=1}^{b_jq_j}\left(\{s_j+i\alpha\}-\frac{1}{2}\right) \;=\; b_jq_js_j+b_j\delta_jq_j^*+\frac{q_j}{2}\Delta_jb_j(b_j-1)-\frac{b_j}{2}$$

は、$b_j, 0<b_j<a_{j+1}$ に関して、負値の２次関数として振る舞うことが分かる。これは、Fig.1 および Fig.2 のグラフより明らかである。

Fig. 1. $\alpha=\pi-3,\quad n=587\times q_3$, $\text{step}=q_3=113$



特に、 $n=\nu q_j, 0\le\nu<a_{j+1}$ のように、ステップ q_j 毎にグラフを考えると、偶数 j に対しては

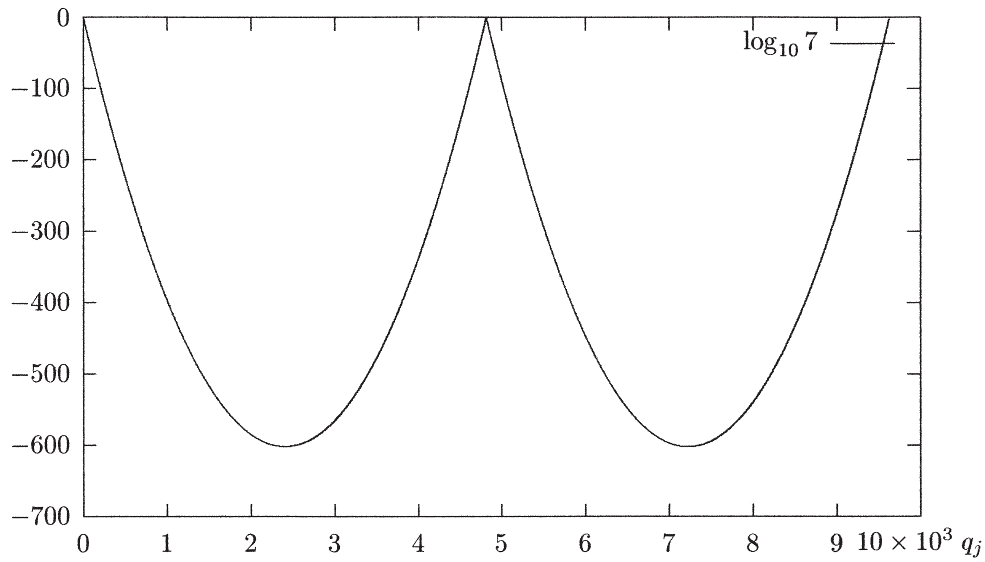
$$\frac{a_{j+1}}{2}\frac{\nu}{a_{j+1}}\left(\frac{\nu}{a_{j+1}}-1\right) \;=\; \frac{a_{j+1}}{2}x_\nu(x_\nu-1)\,,$$

また、奇数 j に対しては

$$\frac{a_{j+1}}{2}\frac{\nu}{a_{j+1}}\left(-\frac{\nu}{a_{j+1}}+1\right) \;=\; \frac{a_{j+1}}{2}x_\nu(1-x_\nu)\,,$$

と非常によく近似することができる、但し、 $x_\nu=\nu/a_{j+1}, 0<x_\nu<1$ である。
この近似は、 Fig.1 および Fig.2 に現れる、２次関数のような曲線の繰り返しの周期が q_{j+1} に等しいことをも示している。更に、奇数 j に対するグラフの最大値は $q_j/8$ で非常によく近似され、偶数 j に対するグラフの最小値は $-q_j/8$ で非常によく近似されることも分かる。

Fig. 2.　$\alpha = \log_{10} 7$,　$n = 9627 \times q_6$,　step $= q_6 = 510$



参考文献

[1] Beck, J.: *Probabilistic Diophantine Approximation: Randomness in Lattice Point Counting*, Springer Verlarg, NewYork, 2014.

[2] Behnke, H.: Über die Verteilung von Irrationalitaten mod. 1., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1** (1922), 252–267.

[3] Doi, K. – Shimaru, N. – Takashima, K.: On Upper Estimates for Discrepancies of Irrational Rotations: via Rational Rotation Approximations, in preparation.

[4] Drmota, M. – Tichy, R. F.: *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Math. **1651**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[5] Hardy, G.H. – Littlewood, J.E.: Some problems of Diophantine approximation: The lattice-points of a right-angled triangle, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1** (1922), 212–249.

[6] Hardy, G. H. – Wright, E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., Clarendon Press, Oxford, 1979.

[7] Hecke, E.: Über analytische Functionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1** (1922), 54–76.

[8] Iosifescu, M. – Kraaikamp, C.: *Metrical Theory of Continued Fractions*, Mathematics and Its Applications, 547, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 2002.

[9] Khintchine, A.: Ein Satz über Kettenbruche, mit arithmetischen Anwendungen, *Ann. Zeit.*, **18** (1923) 289 – 306.

[10] Khintchine, A.: Einige Sätze über Ketterbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen, *Math. Ann.*, **92** (1924) 115 – 125.

[11] Khinchine, A.: Metrische Kettenbruchprobleme, *Compositio Math.*, **1** (1935) 361 – 382.

[12] Khinchin, A. Ya.: *Continued Fractions*, Dover Publications, New York, 1997.

[13] Kuipers, L. – Niederreiter, H.: *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[14] Mori, Y. – Takashima, K.: On the distribution of leading digits of a^n: a study via χ^2 statistics, to appear in Periodica Math.Hungr.

[15] Mori, Y. – Shimaru, N. – Takashima, K. ; On Distributions of Sums $\sum_{i=1}^{n}\left(\{i\alpha\}-\frac{1}{2}\right)$, in preparation.

[16] Niederreiter, H.; Application of Diophantine Approximations to Numerical Integration. In C.F.Osgood(Ed.): Diophantine Approximation and its Applications, Academic Press, New York and London, 1973, 129 – 199.

[17] Ostrowski, A.: Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1** (1922), 77–98.

[18] Shimaru, N. – Takashima, K.: On Discrepancies of Irrational Rotations: An Approach via Rational Rotations, to appear in Periodics Math.Hungr.

[19] Shimaru, N. – Takashima, K.: Continued Fractions and Irrational Rotations, to appear in Periodics Math.Hungr.

[20] Vinson, J.: Partial Sums of $\zeta(\frac{1}{2})$ Modulo 1, *Experimental Mathematics*, **10** (2001), 337–344.

[21] Weyl, H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.*, **77** (1916), 313–352.

On Behaviors of Partial Sums of Irrational Rotations

Naoto Shimaru, Keizo Takashima* and Kana Doi

Graduate School of Science,
**Department of Applied Mathematics,*
Faculty of Science
Okayama University of Science

1-1, Ridai-cho, kita-ku, Okayama 700-0005, Japan

(Received October 19, 2016; accepted December 5, 2016)

Irrational rotations play very important role not only in the ergodic theory, but also in the number theory. The history of their researches is very long, especially, Hardy – Littlewood ([5]) studied partial sums of irrational rotations from the point of view of the lattice point problems. Behnke ([2]) , Hecke ([7]) , Ostrowski ([17]) , and Khintchine ([9] , [10]) followed the research of Hardy – Littlewood ([5]). Recently, Vinson ([20]) , Beck ([1]) also studied the problem of partial sums.

In this report, we study the behaviors of partial sums of irrational rotations and present some remarkable graphs of partial sums of irrational rotations, where the irrational number has a very large partial quotient in its continued fraction expansion, for example, $\pi - 3$ and $\log_{10} 7$. The graphs show repetitions of quadratic-curve-like shapes, whose periods are equal to the denominators of the nth convergents in their continued fraction expansions.

Keywords: *irrational rotation, partial sum, continued fraction expansion, large partial quotient*