

円周率に基づく無理数回転について

四丸 直人 ・ 高嶋 恵三

岡山理科大学理学研究科応用数学専攻・岡山理科大学理学部応用数学科

(2015年9月15日受付、2015年11月9日受理)

1 はじめに

無理数 α に対して、無理数回転 $\{m\alpha\}$ は一様分布数列となることがよく知られている (H.Weyl [9])。ここで、 $\{x\}$ は x の小数部分を表す。実数列 $\{a_n\}$, ($0 \leq a_n < 1$), が $[0, 1]$ 上の一様分布数列であるとは、任意の実数 $0 \leq a < b \leq 1$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : a_n \in [a, b], 1 \leq n \leq N\}}{N} = b - a$$

が成り立つことである。ここで、 $\#(A)$ は集合 A の要素の個数を表す。

一様分布数列の研究において非常に有名であり、有用な概念として *discrepancy* がある。そのひとつの discrepancy $D_n^*({m\alpha})$ は

$$D_n^*({m\alpha}) = \frac{1}{n} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \sum_{m=1}^n I_{[0,x]}({m\alpha}) - nx \right|$$

で定義される。無理数 α が *single isolated large partial quotient* を持つ場合、 $D_n^*({m\alpha})$ の漸近挙動について、「周期的に」“hills”と“valleys”を繰り返すことが知られている。本論ではこの $D_n^*({m\alpha})$ の漸近挙動について、 $\alpha = \pi - 3$ の場合について議論する。

一方、自然数のべき乗の先頭桁の数字の分布の問題も一様分布数列の問題と深く関連していることが知られている (cf. [1])。

自然数 a に対して10進法で a^n を表示する場合、 a が10のべき乗でない限り a^n の先頭桁の数字には、1から9までの数字が出現する。 a^n の先頭桁の数字が k であるのは

$$k \times 10^{\ell-1} \leq a^n < (k+1) \times 10^{\ell-1} \quad k = 1, 2, \dots, 9$$

となる場合であり、これは、

$$\log_{10} k \leq \{n \log_{10} a\} < \log_{10}(k+1)$$

と同値である。 $\log_{10} a$ が *single isolated large partial quotient* を持つ場合、 a^n の先頭桁の数字の分布と、その極限分布との差を、 χ^2 statistics を用いて測る時、極めて異常な挙動を示すことが知られている。(高

嶋・小谷 ([7]) の報告を参照のこと)。先頭桁の数字の経験分布と極限分布の「近さ」を χ^2 statistics で測る問題に対して、[7] では $a = 7$ の場合について一つの peak を持った “hills” が繰り返されることを報告している。この問題は a が自然数でない一般の正の実数の場合にも自然に拡張される。

円周率は古くから知られた、また、一般的にもっともよく知られた無理数であり、超越的無理数としてもきわめて有名である。円周率の単純連分数展開は以下のようになることが知られている。

$$\alpha = \pi - 3 = \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}}}$$

しかしながら、自然対数の底 e と異なり、円周率の連分数展開について一般的にどのような部分分母がどのように出現するのか、ということとは知られていない。しかしながら、上記の連分数展開より明らかに、円周率も Setokuchi and Takashima [6] で研究された single isolated large partial quotient をもつ無理数であることが分かる。

$a = e^{\pi-3}$ とすると a は自然数ではないが、 a^n の先頭桁の数字の漸近分布の問題は、[7], [5] の研究を応用することができるが分かる。

本報告では、円周率に基づく無理数回転に対して discrepancy や先頭桁の数字の分布の問題について考察し、single isolated large partial quotient を持つ無理数による無理数回転と同様に “hills” と “valleys” が繰り返されることを報告する。

2 Discrepancy についての結果

本報告では、連分数展開における single isolated large partial quotient を a_η で表すことにする。例えば $\alpha = \pi - 3$ の場合は $\eta = 4$ であり、 $a_\eta = 292$ である。Setokuchi and Takashima [6] では

$$M(N) = \max \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq (\eta-1)/2}}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_{2j+1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \eta/2}}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} a_{2j} \right)$$

とおく時、 $0 < \alpha < 1/2$ に対して α が single isolated large partial quotient a_η を持つなら、 $a_\eta > 12M(N)$ が成り立ち、かつ $M(N) \geq 5$ である限り “hill” の上では

$$-M(N) < ND_N^*(n\alpha) - b_{\eta-1} \left(1 - \frac{b_{\eta-1}}{a_\eta} \right) < 3M(N)$$

が成り立つことを示している。 N は各 “hill” の上に位置する自然数を表す。(詳細は [6] を参照のこと)

3 χ^2 statistics についての結果

a^n の先頭桁の数字の経験分布とその極限分布との差を測る道具として、統計学で「適合度の検定」として有名な χ^2 statistics を考える。

数字 k ($k = 1, 2, \dots, 9$) の観測度数 $O_k(n) = O_k$ は次のように定義される：

$$O_k = \#\{m; a^m \text{ の先頭桁の数字} = k, 1 \leq m \leq n\}.$$

また、期待度数 $E_k(n) = E_k$ は

$$E_k = n \times (\log_{10}(k+1) - \log_{10} k) = n \times \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

で与えられる。この時、 χ^2 statistics, $\chi_0^2(n) = \chi_0^2$ は次で与えられる：

$$\chi_0^2(n) = \chi_0^2 = \sum_{k=1}^9 \frac{(O_k(n) - E_k(n))^2}{E_k(n)} = \sum_{k=1}^9 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}.$$

この χ^2 検定の自由度は $8 (= 9 - 1)$ である。

Mori and Takashima [[5]] では χ_0^2 statistics に対する理論結果として以下のような公式を示した。
 $\eta > 3$, $\frac{1}{q_{\eta-1}} < (1 - \log_{10} 9)$ とする。 $n = \nu \times q_{\eta-1}$ ($\nu < a_\eta$) とする時

(Case I) η : 奇数のとき

(i) If $\nu < \ell_k$ and $\nu < \ell_{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta^{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\}.$$

(ii) If $\nu < \ell_k$ and $\nu \geq \ell_{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta_{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\} + \ell_{k+1} - \theta_{k+1}.$$

(iii) If $\nu \geq \ell_k$ and $\nu < \ell_{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta^{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\} - \ell_k + \theta_k.$$

(iv) If $\nu \geq \ell_k$ and $\nu \geq \ell_{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta_{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\} + \ell_{k+1} - \theta_{k+1} - \ell_k + \theta_k.$$

(Case II) η : 偶数のとき

(i) If $\nu < \ell^k$ and $\nu < \ell^{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta_{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta_k\}.$$

(ii) If $\nu < \ell^k$ and $\nu \geq \ell^{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta^{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta_k\} - \ell^{k+1} + \theta_{k+1}.$$

(iii) If $\nu \geq \ell^k$ and $\nu < \ell^{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta_{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\} + \ell^k - \theta_k.$$

(iv) If $\nu \geq \ell^k$ and $\nu \geq \ell^{k+1}$,

$$O_k - E_k = \nu \times q_{\eta-1} \times \{\zeta^{k+1} - \log_{10}(k+1) + \log_{10} k - \zeta^k\} + \ell^k - \theta_k - \ell^{k+1} + \theta_{k+1}.$$

が成り立つ。ここで、 $r_n = p_n/q_n$ は n 次近似分数であり、 $\Delta = |\alpha - r_{\eta-1}| \times q_{\eta-1}$ 、 $L = [(\zeta^k - \zeta_k)/\Delta] = [1/(q_{\eta-1}\Delta)]$ であり、 $[x]$ は x の整数部分を表す。また、

(Case I) η : 奇数: $\ell_k = [(\log_{10} k - \zeta_k)/\Delta]$, $\ell^k = L - \ell_k$. $j_k \times \beta \pmod{1} = \zeta_k$ ($0 \leq j_k < q_{\eta-1}$, $\beta = r_{\eta-1}$)

(Case II) η : 偶数: $\ell^k = [(\zeta^k - \log_{10} k)/\Delta]$, $\ell_k = L - \ell^k$. $j_k \times \beta \pmod{1} = \zeta^k$ ($0 \leq j_k < q_{\eta-1}$).

$\beta = r_{\eta-1}$ であり、 ζ_k, ζ^k はそれぞれ $\log_{10} k$ を超えない最大の $\frac{j}{q_{\eta-1}}$ と、超える最小の $\frac{j'}{q_{\eta-1}}$ の形の有理数とする。(詳しくは [5] を参照のこと)

3.1 円周率による無理数回転についての結果

円周率 π は上記にその連分数展開を示したとおり、 $a_\eta = a_4 = 292$ として、single isolated large partial quotient を持つ。そこで、前節の discrepancy について Setokuchi and Takashima [6] の結果が適用でき、数値計算の結果はグラフ Fig.1, Fig.2 に示す通り、“hills” と “valleys” の繰り返しが観測される。

また、 $a = 10^{\pi-3}$ としたときの a^n の先頭桁の数字の分布に対する χ^2 statistics を応用した漸近収束の速さの考察も、Mori and Takashima [5] での計算公式を適用できる。また、数値計算の結果もグラフ Fig.3, Fig.4 に見られるように “hills” と “valleys” の繰り返しが観測される。しかしながら、グラフの形は [5] で報告されたグラフの形とは異なっていることが分かる。

Fig.1 $\alpha = \pi - 3$, $n = 100,000$, step = 113

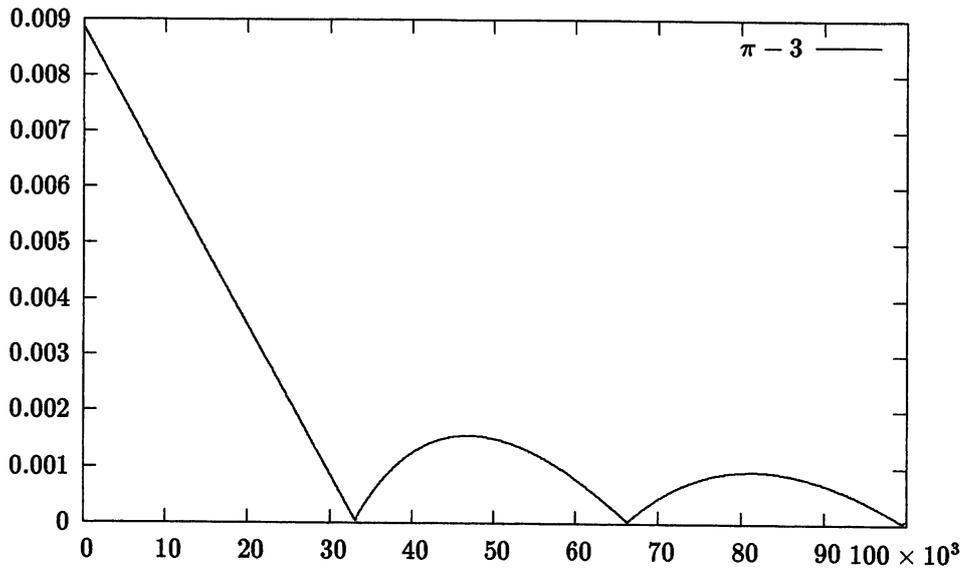


Fig.2 $\alpha = \pi - 3$, $n = 300,000$, step = 113

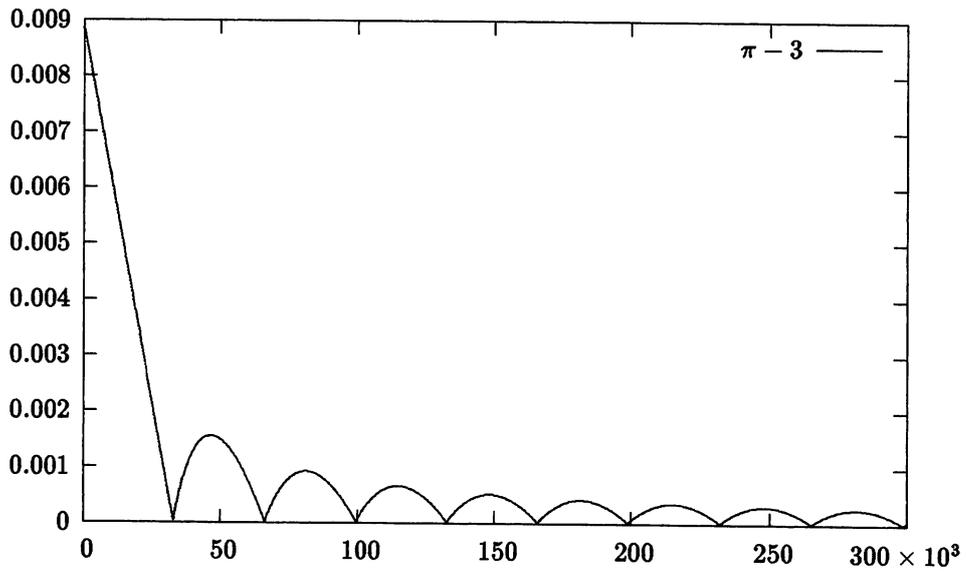
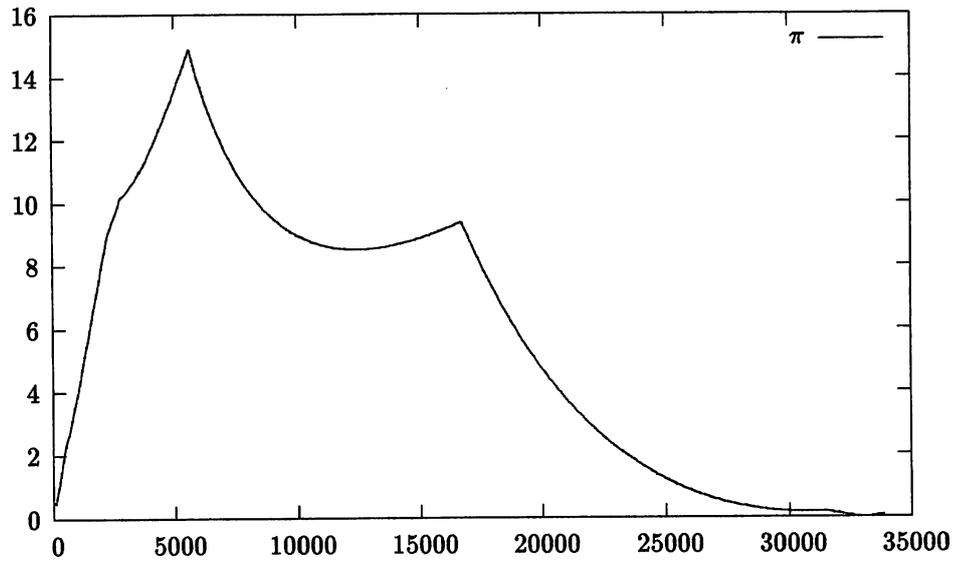
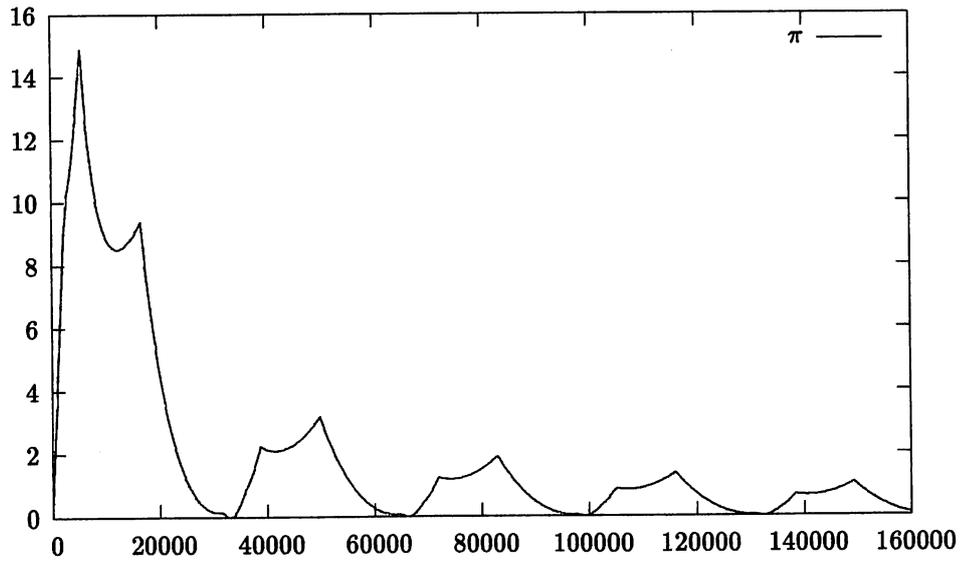


Fig.3 $\pi - 3$, $n = 35,000$, step = 113Fig.4 $\pi - 3$, $n = 160,000$, step = 113

参考文献

- [1] Berger, A.: *Chaos and Chance*, Walter de Gruyter, Berlin, 2001.
- [2] Drmota, M. – Tichy, R. F.: *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Math. **1651**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] Hardy, G. H. – Wright, E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [4] Khinchin, A. Ya.: *Continued Fractions*, Dover Publications, New York, 1997.
- [5] Mori, Y. – Takashima, K.: *On the distribution of the leading digit of a^n , a study via χ^2 statistics*, to appear in *Periodica Math.Hungar.*.
- [6] Setokuchi, T. – Takashima, .T: *Discrepancies of irrational rotations with isolated large partial quotient*, *Unif. Distrib. Theory*(2), **9** (2014) 31 – 57.
- [7] 高嶋恵三、小谷真美: べき乗の先頭桁の数字について, 岡山理科大学紀要, **42 A** (2006), 7–11.
- [8] 高嶋恵三、長濱紗智、林紘: べき乗の先頭桁、無理数回転および連分数展開, 岡山理科大学紀要, **44 A** (2008), 9–13.
- [9] Weyl, H.: *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, *Math. Ann.*, **77** (1916), 313–352.

On irrational rotation based on π ; studies via discrepancy and leading digit

Shimaru Naoto and Takashima Keizo

*Graduate School of Science
Department of Applied Mathematics,
Faculty of Science
Okayama University of Science*

1-1, Ridai-cho, kita-ku, Okayama 700-0005, Japan

(Received September 15, 2015; accepted November 9, 2015)

In this report, we discuss with irrational rotation based on π . After Setokuchi and Takashima [6], we first consider the behaviors of discrepancies of the sequence $\{n\pi\}$. We report that for such an irrational rotation we observe the repetitions of “hills” and “valleys”, just similarly as in [6].

Secondly, we consider a real number $a = 10^{\pi-3}$. For this real number, we discuss a generalized problem of distributions of leading digits of a^n . We also report that for the problem of leading digits of a^n we can observe similar repetitions of “hills”, however, in the case of $a = 10^{\pi-3}$, the shape of the graph is different from those of graphs of $a = 7$, $a = 33$ and $a = 54$, which are reported in [5].

Keywords: *leading digit, irrational rotation, χ^2 statistics, continued fraction expansion*