

最大クリーク問題に対する反復 k -opt 局所探索法の Kick 法における タイブレーク時の頂点選択方式の検討

幸村 明典・片山 謙吾*・南原 英生*

岡山理科大学大学院工学研究科情報工学専攻

*岡山理科大学工学部情報工学科

(2010年9月30日受付、2010年11月9日受理)

1. まえがき

組合せ最適化問題は、その多くが NP-困難¹⁾ であるため、現実的な時間で良質の解を求める近似解法の研究が盛んである。近年、計算機性能の急速な向上により、多少時間はかかっても、より精度の高い解を求める解法の要求が高まっている。この目的を実現するための一般的枠組みを提供しようとするのがメタ戦略である。メタ戦略の代表的なものに反復局所探索法がある。反復局所探索法は与えられた解を改善し、より良い解にする操作である局所探索と、局所解から脱出する操作である突然変異を繰り返し適応する手法である。

実用上重要な組合せ最適化問題の一つに最大クリーク問題 (Maximum Clique Problem, MCP)²⁾ がある。ここで MCP の定義を示す。頂点 (vertex) の集合 $V = \{1, \dots, n\}$ とそれらの頂点の対を両端とする無向辺 (undirected edge) の集合 $E \subseteq V \times V$ が与えられた時、 $G = (V, E)$ を無向グラフという。特に、全ての 2 頂点間に 1 つの辺が存在する無向グラフを完全グラフという。 V の部分集合 $V' \subseteq V$ による誘導部分グラフ $G(V') = (V', E \cap V' \times V')$ が完全グラフの時、すなわち、 $\forall i, j \in V', i \neq j$ に対して $(i, j) \in E$ である時、 V' をクリークと呼ぶ。MCP とは、与えられたグラフ G に含まれるクリークの中で、頂点数最大のクリークを求める問題である。MCP は、通信ネットワーク、符号理論、並列計算、パターン認識等の分野にあらわれる実用上重要な組合せ最適化問題として知られており²⁾、NP-困難である。従って、多項式時間で厳密解を算出するアルゴリズムは存在しないであろうと考えられている。

最近我々は、MCP に対する反復局所探索法として、反復 k -opt 局所探索法 (Iterated k -opt Local Search, IKLS) を提案した⁸⁾。IKLS の局所探索法には、可変深度探索 (Variable Depth Search, VDS)⁶⁾⁷⁾ のアイデアにもとづく k -opt 局所探索法 (k -opt Local Search, KLS)¹⁰⁾ を使用している。また、IKLS の突然変異には LEC-Kick を使用しており、DIMACS ベンチマークグラフに対して良い結果を示している。LEC-Kick は局所探索によって得られる局所解 CC と接続している他の頂点 $v \in V \setminus CC$ の中から、 CC と接続する次数が最も少ない v をランダムに 1 頂点選択する。そして、選択された v と接続している CC の頂点との間で局所解を脱出する解を生成する。前述した $v \in V \setminus CC$ の中からランダムに 1 頂点を選択する方式以外にも、このようなタイブレーク時の頂点選択方式には複数の方式が存在する。しかし、どのような頂点選択方式が有効かどうかの十分な検証はまだ行われていない。そこで、本論文では以下の項目について検討する。

- (1) 局所探索によって得られた局所解の累積解情報を利用したタイブレーク時の頂点選択方式 (詳細は 3. 章を参照) を検討する。
- (2) (1) で示した頂点選択方式と Restart の組み合わせにより探索がどのように変化するかを検証する。
- (3) 累積解情報の初期化を行うことで探索にどのような影響があるかを検討する。
- (4) 従来の IKLS と比較を行うことで本研究の頂点選択方式の有効性を検証する。

```

procedure IKLS
input: graph  $G = (V, E)$ ;
output: best clique  $C_{best}$  in  $G$ ;
begin
1  generate  $C$ ; compute  $PA, OM$ , and  $deg_G(PA)$ ;
2   $C := \text{Local Search}(C, PA, OM, deg_G(PA)); C_{best} := C$ ;
3  repeat
4     $C := \text{Kick}(C, PA, OM, deg_G(PA))$ ;
5     $C := \text{LocalSearch}(C, PA, OM, deg_G(PA))$ ;
6    if  $|C| > |C_{best}|$  then  $C_{best} := C$ ; endif
7    if restart=true then
8      generate  $C$ ; compute  $PA, OM$ , and  $deg_G(PA)$ ;
9       $C := \text{Local Search}(C, PA, OM, deg_G(PA))$ ;
10     if  $|C| > |C_{best}|$  then  $C_{best} := C$ ; endif
11    endif
12  until terminate=true;
13  return  $C_{best}$ ;
end;

```

図1 MCP に対する反復 k -opt 局所探索法

2. MCP に対する反復 k -opt 局所探索法 (IKLS)

本節では、MCP に対する Iterated k -opt Local Search (IKLS)⁸⁾ について記述する。IKLS は反復局所探索法を基にしたアルゴリズムである。反復局所探索法は過去の探索で得られたよい解にランダムな変形を加えたものを初期解として、局所探索法を反復する方法である。

2.1 IKLS の基本アルゴリズム

MCP に対する反復 k -opt 局所探索法 (Iterated k -opt Local Search, IKLS) の流れを図1に示す。IKLS の主要な構成要素は、Local Search (Line 2, Line 5), Kick (Line 4), Restart (Line 7~11) であり、これらの反復により探索を行う。まず、初期プロセスとして、グラフ G の頂点からランダムに選択した1頂点を初期クリーク C とし、 $PA, OM, deg_G(PA)$ を更新する (詳細は2.2節を参照) (Line 1)。そして、Line 2で初期クリーク C に対してKLSを適用することでIKLSの初期プロセスを完了する。その後、Line 3~12のメインループによって探索を行う。Line 4では、KLSを適用して得られた解に対してKickを適用し、新たな初期解を生成する。Line 5では、Kickによって得られた解に対してKLSを適用することによりさらにクリークの拡大を図る。Line 7~11では、探索の多様性を持たせるための処理として、IKLSに対してRestart処理を施す。その条件は、KLSの探索途中における最良解値 ($|C_{best}|$) と同じ回数KLSを適用しても最良解の更新が無い場合である。Restartにおける初期クリークとして、グラフ G の中から $V \setminus C_{best}$ である1頂点をランダムに選択する。IKLSの終了条件 (Line 12) はIKLSの処理中におけるKLSの適用回数が $n \times 100$ 回に到達した時、もしくは、最適解、既知の最良解と同じサイズのクリークが得られた時とする。以下で、IKLSの主要な構成要素であるLocal Search, Kickについて示す。

2.2 Local Search

IKLS内部で使用するLocal Searchとして、我々が既に提案しているMCPに対する k -opt局所探索法 (KLS)¹⁰⁾ を用いる。KLSの概要について以下に示す。

2.2.1 KLS の基本アルゴリズム

KLSは、VDSのアイデアにもとづいている。VDSとは、与えられた解に対して比較的小さな近傍操作を連鎖的に適用することで到達可能な解の集合を改めて大きな近傍と捉える近傍探索のアイデアである。KLSは、各反復において、現在のクリーク (解) から複数の頂点を連鎖的に追加および削除する操作 (それぞれ

```

procedure KLS(CC,PA,OM,degG(PA))
begin
1   repeat
2     CCprev:=CC, D:=CCprev, P:={1, ..., n}, g:=0, gmax:=0;
3     repeat
4       if |PA ∩ P| > 0 then // Add Phase
5         find a vertex  $v$  with  $\max_{v \in \{PA \cap P\}} \{deg_G(PA \cap P)(v)\}$ ;
6         if multiple vertices with the same maximum degree are found
7           then select one vertex  $v$  among them randomly;
8         CC := CC ∪ {v}, g := g + 1, P := P \ {v}
9         if g > gmax then gmax := g, CCbest := CC;
10        else //Drop Phase (if{PA ∩ P} = ∅)
11          find a vertex  $v \in \{CC \cap P\}$  such that the resulting |PA ∩ P| is maximized;
12          if multiple vertices with the same size of the resulting |PA ∩ P| are found
13            then select one vertex  $v$  among them randomly;
14          CC := CC \ {v}, g := g - 1, P := P \ {v};
15          if  $v$  is contained in CCprev then D := D \ {v};
16        endif
17        update PA, OM, and degG(PA)(i),  $\forall i \in PA \cap P$ ;
18        until D = ∅;
19        if gmax > 0 then CC := CCbest else CC := CCprev;
20        until gmax ≤ 0;
21        return CC;
end;

```

図2 MCP に対する k -opt 局所探索法の擬似コード

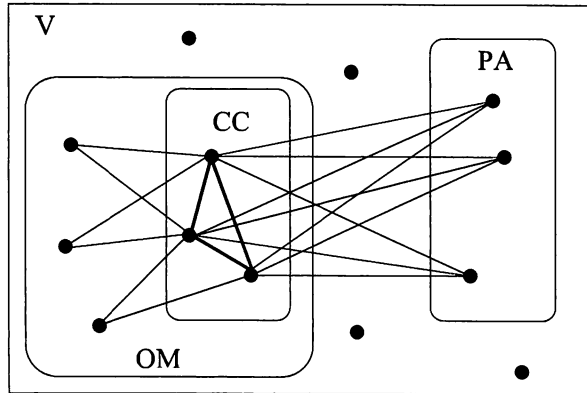


図3 CC, PA および OM の集合の一例

Add 移動, Drop 移動と呼ぶ) により構成され, 現在の解からそれらの操作によって生成可能な解の集合を改めて近傍と捉えることで, 局所探索を行うアルゴリズムである.

KLS の擬似コードを図2に示す. KLS は外ループ (Line1-18) と内ループ (Line3-16) の処理を有する. 以下において, 外ループに関しては「反復」, 内ループに関しては「繰り返し」と呼び区別する.

まず, 図2の中の重要な記号を説明する. $CC^{(l)}$ は内ループの繰り返し l の時点における解 (クリーク) である. $PA^{(l)}$ は $CC^{(l)}$ の全頂点に隣接する, $CC^{(l)}$ に追加可能な頂点の集合

$$PA^{(l)} = \{v : v \in (V \setminus CC^{(l)}), (v, i) \in E, \forall i \in CC^{(l)}\}$$

である. $OM^{(l)}$ は $PA^{(l)}$ の定義を若干緩和した1辺不足集合と呼ぶ辺集合

$$OM^{(l)} = \{(v, i) : v \in V, i \in CC^{(l)}, (v, i) \notin E, (v, i) \in E, \forall j \in CC^{(l)}, j \neq i\}$$

```

procedure LEC-Kick( $CC, PA, OM, deg_G(PA)$ )
begin
1  if all  $i \in CC$  are disconnected to all  $j \in V \setminus CC$  then
2      select a vertex  $v \in V \setminus CC$  randomly; compute  $PA, OM$ , and  $deg_G(PA)$ ;
3       $CC := \emptyset$ ;  $CC := CC \cup \{v\}$ ; return new clique  $CC$ ;
4  endif
5  find a vertex  $v \in V \setminus CC$  with the lowest edge number to vertices of  $CC$ .
6  if multiple vertices with the same lowest edge number are found
    then select one vertex  $v$  among them randomly;
7  drop vertices from  $CC$  that are not connected to  $v$ ;
    // the dropped vertices are removed from  $P$  in Fig. 2 (line 3) only for 1st iteration of the next KLS.
8  update  $PA, OM$ , and  $deg_G(PA)$ ;
9  return new clique  $CC$ ;
end;

```

図4 LEC-Kickの擬似コード

である。なお、 $OM^{(l)}$ は $CC^{(l)}$ に含まれる頂点群の中のいずれか一つの頂点 $i \in CC^{(l)}$ だけに辺が存在しない頂点の集合と捉えることもできる(なお、 $CC \subseteq OM$) (図3参照)。 $deg_G(PA^{(l)})$ は $PA^{(l)}$ により誘導される部分グラフ $G(PA^{(l)})$ 内の各頂点 $v \in PA^{(l)}$ の次数である。

次いで、KLSの各反復における基本アルゴリズム(k -opt局所探索処理)について簡潔に説明する。まず、与えられた初期クリーク(初期解) $CC^{(0)}$ を対象として、複数個の頂点を連鎖的に追加する操作(Add移動操作)および削除する操作(Drop移動操作)により到達可能な近傍解の集合 $CC^{(1)}, \dots, CC^{(k)}, \dots, CC^{(r)}$ を得る。(その生成途中では、移動候補頂点集合 P (Line2)を利用することで、追加または削除された頂点は再び追加・削除されることはない)。その近傍解の集合から最良解 $CC^{(k)}$ ($1 \leq k \leq r$)を選び(Line8)、次反復の初期クリーク $CC^{(0)} := CC^{(k)}$ とする(Line17)。KLSは常に実行可能領域を探索空間としており、各反復の初期クリークに応じて、 k -opt近傍のサイズ(上記の r に対応)が適応的に変動する。

上記の k -opt近傍探索処理は、Add移動操作を施す「Addフェーズ」(Line5-8)とDrop移動操作を施す「Dropフェーズ」(Line10-13)の二つのフェーズで構成される。以下では、それぞれのフェーズにおいて核となる頂点選択方式(Line5-6およびLine10-11)について記述する。

2.2.2 Add 移動頂点選択方式

$PA^{(l)} \cap P$ の中で次数 $deg_G(PA^{(l)}(v))$ が最大の頂点 v を選択する。但し、同じ最大次数の頂点が複数個存在する場合は、それらの頂点群からランダムに一つの頂点を選択する。

2.2.3 Drop 移動頂点選択方式

$CC^{(l)}$ の中で、 $l+1$ の時点で得られる $|PA^{(l+1)}|$ が最大となる頂点 v を選択する。但し、 $|PA^{(l+1)}|$ を最大とする頂点が複数個存在する場合は、それらの頂点群からランダムに一つの頂点を選択する。

2.3 Kick

IKLSで使用する突然変異(Kick)として、Lowest-Edges-Connectivity-based Kick(LEC-Kick)を使用する。LEC-Kickの擬似コードを図4に示す。まずLEC-Kickの例外処理(Line1~4)について説明する。与えられたクリーク CC に対して、グラフ G における CC 以外の頂点群 $V \setminus CC$ が全く隣接していない場合、LEC-Kickを適用することができない。この場合、例外処理として、 $V \setminus CC$ から1頂点をランダムに選択し、その1頂点を新たなクリークとみなし、探索を継続する。以下、LEC-Kickの具体的な操作について示す。 CC が与えられた時、 $V \setminus CC$ で、 CC の頂点群と最低1頂点以上隣接している頂点集合から、隣接している数が最も少ない頂点 v を選択する(Line5)。選択する頂点の候補が複数個存在する場合は、それらの頂

点群からランダムに 1 頂点を選択する (Line 6). そして, 頂点 v と頂点 v に隣接する CC の頂点群とで新たなクリークを構成する (Line 7~8). なお, Kick によって CC から削除された頂点群は, 次回の KLS の探索における 1 回目の反復で集合 P (図 2, Line 2) から除外する.

図 5 は CC が与えられたときに, 隣接している頂点の中からどの頂点が選ばれるかを示したものである. CC には頂点 $v_1 \sim v_4$ が接続している. これらの頂点は図 4 の line 5 で選択される頂点である. LEC-Kick では CC と最小次数で接続している v_4 が選ばれる.

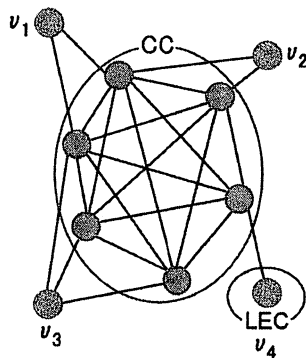


図 5 LEC-Kick の頂点選択

3. タイブレーク時の頂点選択方式

3.1 累積解情報に基づく頂点選択方式

前述の 2.2.2 節や 2.2.3 節及び Kick の擬似コード図 4 の Line 6 で行われる, タイブレーク時の頂点選択方式は複数の候補頂点の中から, ランダムに 1 つの頂点を選択するものであった. 本節では Kick におけるタイブレーク時の頂点選択方式としてランダムに選択する方式を含め, 3 種類の頂点選択方式を示す. IKLS では Kick によって得られた候補頂点群の中から, より適切な頂点を選択する基準として, IKLS の探索の途中で発見されるクリークの情報を利用する. 現世代 t の探索によって得られた局所解を $CC^{(t)}$ とする. t 世代までの探索において発見された $CC^{(1)}, \dots, CC^{(t-1)}$ の情報を蓄積したものを累積解情報とよぶ. 累積解情報は任意の頂点がクリークを構成するための頂点として, 何回算出されたかをカウントしたものである. 図 6 は累積解情報と与えられたグラフにおける, 頂点の関係を表したものであり, 円で囲まれている $CC^{(t)}$ は探索により発見されたクリークを示している. 図は説明を簡単化するためにクリーク以外の頂点にのみ番号を付けている. 累積解情報の各添字は, グラフの頂点の番号に対応している. 累積解情報の添字 1 には, グラフの番号 1 の頂点が算出されたクリークに何回含まれていたかのカウント数を格納している. この図では番号 1 の頂点は 3 回クリークを構成するための頂点であったことを示している. この累積解情報を使用し, 候補頂点の中から 1 頂点を選択する. 頂点の選択方式は以下の 3 種類とする.

- (1) すべての候補頂点からランダムに選択する (累積解情報は使用しない).
- (2) 累積解情報の値が最も小さい頂点を選択する.
- (3) 累積解情報の値が最も大きい頂点を選択する.

3.2 累積解情報の初期化

ここでは前節で示した累積解情報の初期化について述べる. 累積解情報を用いた探索では, 局所探索により発見される解がそれ以後の局所探索に影響を与える. 累積解情報は局所解を脱出する解を生成するときに, Kick において選択可能な頂点の中から 1 頂点を選択する際に使用する. 頂点の選択方法に工夫を施すことで探索全体の多様化, 集中化を調節する. もし, 累積解情報に蓄積される局所解の情報が望ましいものではない場合, 累積解情報に基づいて生成される局所解を脱出する解は, 次期局所探索に好ましくない影響を与える. そして, 局所探索によって得られる解に対して適用される Kick は結果的に, 劣悪な局所解を脱出

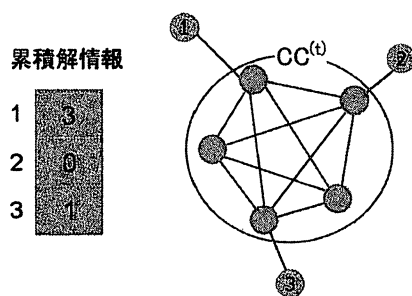


図6 累積解情報と各頂点の関係

する解を生成する可能性が高いと考えられる。そこで、累積解情報を初期化する(累積解情報のカウントを0にする)ことを考える。累積解情報の初期化の方法は以下の3つである。

- (1) 累積解情報を初期化しない。
- (2) Restart時に累積解情報を初期化をする。
- (3) RestartをIKLSに組み込まない場合は、探索中に発見された既知の最良解のサイズを超えた解を発見したときに累積解情報を初期化する。

4. IKLSの性能評価実験

本節では、3.節で示したタイプブレーク時の頂点選択方式の相違によるIKLSの探索性能について検討を行う。

4.1 実験の詳細

タイプブレーク時の頂点選択方式の相違によるIKLSの探索性能を評価するために、3種類の頂点選択法にRestart、累積解情報の初期化の有無を組み合わせた10タイプのIKLSを比較検討する。対象とするグラフは、MCPの標準的なベンチマーク問題としてよく知られるDIMACSベンチマークグラフ(最大頂点数4000、最大辺数5506380)¹¹⁾から大規模もしくは厳密解の算出が困難な35グラフとする。IKLSの終了条件は、LS回数 $n \times 100$ 回時もしくは既知の最良解の値(BR)に一致した解を算出時とし、試行回数は各問題例に対して25回とする。全てのIKLSはC言語によってコード化し、使用コンパイラは、最適化オプション-O2を付加したgcc(Ver.4.1.2)である。全ての実験は、Hewlett-Packard社の計算機HP xw4300 Workstation CPU: Pentium4 3.4GHz, 4GB RAM, OS: Ubuntu 10.04上で行う。

4.2 実験結果

結果を表1, 2に示す。DIMACS benchmarksの欄には、問題例名(Instance)と既知の最良解(BR)(*がついたBRは最適解値であることが証明されている)を示した。IKLSの欄には、異なるタイプの頂点選択方式を有する10種類のIKLSの結果を示しており、各IKLSの25回試行中に得られた最良解値の最大値(Best), 平均値(Avg), 最良解を得るまでに掛かった秒数の平均(Time)をそれぞれ示している。また、表の下にある総合計(Total)はBest, Avg, Timeの値をそれぞれ合計したものである。IKLSの欄にあるrandom, min, maxは3種類の頂点選択方式を示している。randomは選択可能な頂点群の中からランダムに1頂点を選択する。minは選択可能な頂点群の中から累積解情報が最小の頂点を選択し、maxは累積解情報が最大の頂点を選択する。また、RはRestartを使用しており、NRはRestartを使用していないことを示している。Fは累積解情報の初期化を示しており、NFは初期化を行わない。F(R)はRestart時に累積解情報を初期化し、F(B)はIKLSの探索において今までに発見された最良解を超える解を発見したときに累積解情報を初期化する。

表1, 及び表2から、10種類のIKLSの中で最もTotalのAvgが良かったのはmin+R+NFであった。min+R+NFは多くの問題例で他の手法と同等かそれ以上の結果を算出している。また、brock800.4の問題例に対しては最も良好な結果を示した。次に、各方式の問題例毎の有効性を検証する。min+R+FRは

MANN_a45, C2000.9 の問題例で良い結果を示している. $\text{min}+\text{R}+\text{NF}$ では brock800_4 の問題例に対して他の手法と比べ良好な結果である. $\text{max}+\text{R}+\text{FN}$ は C1000.9 の問題例でより効率的な探索を行っている. $\text{min}+\text{NR}+\text{FB}$ は brock400_2 や brock800_2 の問題例に対して良い結果を示している. $\text{max}+\text{NR}+\text{NF}$ は C2000.5 や keller6 で他の手法と比べて同等かそれ以上の結果を示している.

min の方式に注目する. min の方式は他の random や max の方式と比べ良い結果である. min の方式は探索中で局所解として算出された回数が最も少ない頂点を選択することから, 他の方式である random や max と比べ, より多様性のある探索を行うことができる. また, $\text{max}+\text{NR}+\text{NF}$ の Total の Avg は実験した全ての方式の中で最も悪いものであった. $\text{max}+\text{NR}+\text{NF}$ は検証する方式の中で探索の多様性が最も小さいものである. これらの結果から, MCP に対してはより多様性のある探索が有効であると考えられる. 我々が行った MCP に対する地形解析の結果はそのほとんどの問題例で大谷構造が観測できないというものであった⁹⁾. これは言い換えると, MCP に対してはより多様性のある探索が必要ということである. 従って, 本実験の結果は地形解析の結果に支持されるものであった.

前述のことを踏まえ $\text{min}+\text{R}$, $\text{min}+\text{NR}$ の結果に注目すると, $\text{min}+\text{NR}+\text{FB}$ と $\text{min}+\text{NR}+\text{NF}$ は Restart を使用する $\text{min}+\text{R}+\text{FR}$ や $\text{random}+\text{R}$ と比べ Total の Avg が良い結果を示している. このことから, min は Restart を使用しなくても探索の多様性を十分に保持できるのではないかと推測される. また, $\text{max}+\text{R}$, $\text{max}+\text{NR}$ を比較すると $\text{max}+\text{R}$ の結果が NF, FB, FR に関係無く良いものである. しかしながら, max は探索の多様性を十分に保持していると考え難い. max の方式はより多く算出される頂点を選択する方式であり, Kick の中で探索の集中化を行っていると考えられる. そのため, Restart を行うことで探索に多様性を持たせる方式が, Restart を行わない方式よりも良い結果を算出したと推測される.

以上より, 10 タイプの IKLS を検討した結果, 総合的に見て $\text{min}+\text{R}+\text{NF}$ を組み込んだ IKLS によって算出された結果が最も良い結果であることを確認した.

5. むすび

本論文では, MCP に対する IKLS を示し, その内部に導入可能な複数の頂点選択方式の相違による探索性能を調査した. 異なる 3 種類の Kick におけるタイブレーク時の頂点選択方式に Restart, 累積解情報の初期化を組み合わせた計 10 種類の IKLS の比較実験において, $\text{min}+\text{R}+\text{NF}$ を有する IKLS が全体的に良好な結果を示した. 実験の結果から MCP においてはより多様性のある探索が必要であると考えられる. しかし, 各問題例毎の詳細な結果を見ると, 各手法は有効に働く問題例に違いがあった.

次に今後の課題を 2 つ示す. (1) 本論文で検討した累積解情報に基づく頂点選択方式は KLS の Add 移動頂点選択方式 (2.2.2 節) や Drop 移動頂点選択方式 (2.2.3 節) へも導入が可能であり, どのような結果を示すのか大変興味深い. (2) 有効性の異なる複数の頂点選択方式を適応的に使い分けることにより, アルゴリズムの性能を向上させることである.

参考文献

- 1) M. Garey, and D. Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," Freeman, New York, 1979.
- 2) I. Bomze, M. Budinich, P. Pardalos, and M. Pelillo, "The maximum clique problem," in Handbook of Combinatorial Optimization (suppl. Vol. A), D.-Z. Du, P.M. Pardalos (Eds.), pp.1-74, Kluwer, 1999.
- 3) U. Feige, S. Goldwasser, L. Lovász, S. Safra, and M. Szegedy, "Approximating clique is almost np-complete," Proc. the 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, San Juan, Puerto Rico, pp.2-12, 1991.
- 4) S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, and M. Szegedy, "Proof verification and the hardness of approximation problems," Proc. the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Pittsburgh, PA, pp.14-23, 1992.
- 5) J. Håstad, "Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$," Acta Mathematica, vol.182, pp.105-142, 1999.
- 6) S. Lin and B. Kernighan, "An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem," Operations Research, vol.21, pp.498-516, 1973.

表 1 累積解情報を使用する Kick と Restart を使用する IKLS の結果

Instance		IKLS								
		random+R			min+R+FR			min+R+NF		
name	BR	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time
C125.9	34*	34 (25/ 25)	34.00	0.001	34 (25/ 25)	34.00	0.001	34 (25/ 25)	34.00	0.001
C250.9	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.016	44 (25/ 25)	44.00	0.016	44 (25/ 25)	44.00	0.014
C500.9	57	57 (25/ 25)	57.00	1.915	57 (25/ 25)	57.00	1.819	57 (25/ 25)	57.00	2.213
C1000.9	68	68 (22/ 25)	67.88	58.507	68 (22/ 25)	67.88	45.873	68 (22/ 25)	67.88	43.107
C2000.9	78	77 (2/ 25)	76.04	225.759	77 (6/ 25)	76.24	223.294	77 (2/ 25)	75.96	156.544
DSJC500.5	13*	13 (25/ 25)	13.00	0.059	13 (25/ 25)	13.00	0.045	13 (25/ 25)	13.00	0.057
DSJC1000.5	15*	15 (25/ 25)	15.00	1.364	15 (25/ 25)	15.00	1.263	15 (25/ 25)	15.00	1.508
C2000.5	16	16 (25/ 25)	16.00	5.646	16 (25/ 25)	16.00	3.327	16 (25/ 25)	16.00	4.408
MANN_a27	126*	126 (25/ 25)	126.00	0.034	126 (25/ 25)	126.00	0.027	126 (25/ 25)	126.00	0.033
MANN_a45	345*	345 (23/ 25)	344.92	761.956	345 (23/ 25)	344.92	706.207	345 (21/ 25)	344.84	638.367
brock200.2	12*	12 (25/ 25)	12.00	0.082	12 (25/ 25)	12.00	0.069	12 (25/ 25)	12.00	0.044
brock200.4	17*	17 (25/ 25)	17.00	0.190	17 (25/ 25)	17.00	0.204	17 (25/ 25)	17.00	0.126
brock400.2	29*	29 (18/ 25)	27.88	3.534	29 (20/ 25)	28.20	4.001	29 (24/ 25)	28.84	5.425
brock400.4	33*	33 (25/ 25)	33.00	1.082	33 (25/ 25)	33.00	1.311	33 (25/ 25)	33.00	1.053
brock800.2	24	24 (1/ 25)	21.12	3.539	21 (25/ 25)	21.00	1.229	24 (1/ 25)	21.12	2.157
brock800.4	26	26 (4/ 25)	21.80	5.157	26 (6/ 25)	22.20	6.405	26 (9/ 25)	22.80	8.446
gen200.p0.9.44	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.014	44 (25/ 25)	44.00	0.015	44 (25/ 25)	44.00	0.014
gen200.p0.9.55	55*	55 (25/ 25)	55.00	0.005	55 (25/ 25)	55.00	0.005	55 (25/ 25)	55.00	0.005
gen400.p0.9.55	55	55 (25/ 25)	55.00	2.657	55 (25/ 25)	55.00	3.219	55 (25/ 25)	55.00	2.762
gen400.p0.9.65	65	65 (25/ 25)	65.00	0.024	65 (25/ 25)	65.00	0.022	65 (25/ 25)	65.00	0.019
gen400.p0.9.75	75	75 (25/ 25)	75.00	0.015	75 (25/ 25)	75.00	0.015	75 (25/ 25)	75.00	0.014
hamming8-4	16*	16 (25/ 25)	16.00	0.000	16 (25/ 25)	16.00	0.000	16 (25/ 25)	16.00	0.000
hamming10-4	40	40 (25/ 25)	40.00	0.023	40 (25/ 25)	40.00	0.022	40 (25/ 25)	40.00	0.021
keller4	11*	11 (25/ 25)	11.00	0.000	11 (25/ 25)	11.00	0.000	11 (25/ 25)	11.00	0.000
keller5	27	27 (25/ 25)	27.00	0.027	27 (25/ 25)	27.00	0.032	27 (25/ 25)	27.00	0.028
keller6	59	59 (25/ 25)	59.00	8.554	59 (25/ 25)	59.00	5.870	59 (25/ 25)	59.00	9.416
p.hat300-1	8*	8 (25/ 25)	8.00	0.003	8 (25/ 25)	8.00	0.003	8 (25/ 25)	8.00	0.003
p.hat300-2	25*	25 (25/ 25)	25.00	0.002	25 (25/ 25)	25.00	0.001	25 (25/ 25)	25.00	0.001
p.hat300-3	36*	36 (25/ 25)	36.00	0.006	36 (25/ 25)	36.00	0.005	36 (25/ 25)	36.00	0.005
p.hat700-1	11*	11 (25/ 25)	11.00	0.047	11 (25/ 25)	11.00	0.047	11 (25/ 25)	11.00	0.068
p.hat700-2	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.005	44 (25/ 25)	44.00	0.004	44 (25/ 25)	44.00	0.004
p.hat700-3	62	62 (25/ 25)	62.00	0.020	62 (25/ 25)	62.00	0.017	62 (25/ 25)	62.00	0.018
p.hat1500-1	12*	12 (25/ 25)	12.00	10.303	12 (25/ 25)	12.00	6.227	12 (25/ 25)	12.00	7.463
p.hat1500-2	65	65 (25/ 25)	65.00	0.040	65 (25/ 25)	65.00	0.034	65 (25/ 25)	65.00	0.034
p.hat1500-3	94	94 (25/ 25)	94.00	0.094	94 (25/ 25)	94.00	0.094	94 (25/ 25)	94.00	0.094
Total		1740	1730.64	1090.680	1737	1731.44	1010.723	1740	1732.44	883.472

Instance		IKLS								
		max+R+FR			max+R+NF					
name	BR	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time
C125.9	34*	34 (25/ 25)	34.00	0.000	34 (25/ 25)	34.00	0.000	34 (25/ 25)	34.00	0.000
C250.9	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.015	44 (25/ 25)	44.00	0.013	44 (25/ 25)	44.00	0.013
C500.9	57	57 (25/ 25)	57.00	1.459	57 (25/ 25)	57.00	1.459	57 (25/ 25)	57.00	2.448
C1000.9	68	68 (22/ 25)	67.88	57.615	68 (24/ 25)	67.96	52.442	68 (24/ 25)	67.96	52.442
C2000.9	78	77 (6/ 25)	76.24	230.501	77 (6/ 25)	76.20	282.240	77 (6/ 25)	76.20	282.240
DSJC500.5	13*	13 (25/ 25)	13.00	0.041	13 (25/ 25)	13.00	0.049	13 (25/ 25)	13.00	0.049
DSJC1000.5	15*	15 (25/ 25)	15.00	1.807	15 (25/ 25)	15.00	1.228	15 (25/ 25)	15.00	1.228
C2000.5	16	16 (25/ 25)	16.00	5.254	16 (25/ 25)	16.00	5.053	16 (25/ 25)	16.00	5.053
MANN_a27	126*	126 (25/ 25)	126.00	0.028	126 (25/ 25)	126.00	0.027	126 (25/ 25)	126.00	0.027
MANN_a45	345*	345 (21/ 25)	344.84	710.573	345 (17/ 25)	344.68	607.706	345 (17/ 25)	344.68	607.706
brock200.2	12*	12 (25/ 25)	12.00	0.115	12 (25/ 25)	12.00	0.172	12 (25/ 25)	12.00	0.172
brock200.4	17*	17 (25/ 25)	17.00	0.114	17 (25/ 25)	17.00	0.117	17 (25/ 25)	17.00	0.117
brock400.2	29*	29 (21/ 25)	28.36	4.252	29 (17/ 25)	27.72	3.925	29 (17/ 25)	27.72	3.925
brock400.4	33*	33 (25/ 25)	33.00	1.605	33 (25/ 25)	33.00	1.795	33 (25/ 25)	33.00	1.795
brock800.2	24	24 (1/ 25)	21.12	2.191	24 (2/ 25)	21.24	4.056	24 (2/ 25)	21.24	4.056
brock800.4	26	26 (5/ 25)	22.00	4.686	26 (4/ 25)	21.80	3.082	26 (4/ 25)	21.80	3.082
gen200.p0.9.44	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.012	44 (25/ 25)	44.00	0.017	44 (25/ 25)	44.00	0.017
gen200.p0.9.55	55*	55 (25/ 25)	55.00	0.005	55 (25/ 25)	55.00	0.007	55 (25/ 25)	55.00	0.007
gen400.p0.9.55	55	55 (25/ 25)	55.00	2.956	55 (25/ 25)	55.00	3.379	55 (25/ 25)	55.00	3.379
gen400.p0.9.65	65	65 (25/ 25)	65.00	0.020	65 (25/ 25)	65.00	0.021	65 (25/ 25)	65.00	0.021
gen400.p0.9.75	75	75 (25/ 25)	75.00	0.015	75 (25/ 25)	75.00	0.015	75 (25/ 25)	75.00	0.015
hamming8-4	16*	16 (25/ 25)	16.00	0.000	16 (25/ 25)	16.00	0.000	16 (25/ 25)	16.00	0.000
hamming10-4	40	40 (25/ 25)	40.00	0.023	40 (25/ 25)	40.00	0.020	40 (25/ 25)	40.00	0.020
keller4	11*	11 (25/ 25)	11.00	0.000	11 (25/ 25)	11.00	0.000	11 (25/ 25)	11.00	0.000
keller5	27	27 (25/ 25)	27.00	0.034	27 (25/ 25)	27.00	0.028	27 (25/ 25)	27.00	0.028
keller6	59	59 (25/ 25)	59.00	8.586	59 (25/ 25)	59.00	4.713	59 (25/ 25)	59.00	4.713
p.hat300-1	8*	8 (25/ 25)	8.00	0.002	8 (25/ 25)	8.00	0.003	8 (25/ 25)	8.00	0.003
p.hat300-2	25*	25 (25/ 25)	25.00	0.001	25 (25/ 25)	25.00	0.001	25 (25/ 25)	25.00	0.001
p.hat300-3	36*	36 (25/ 25)	36.00	0.005	36 (25/ 25)	36.00	0.006	36 (25/ 25)	36.00	0.006
p.hat700-1	11*	11 (25/ 25)	11.00	0.056	11 (25/ 25)	11.00	0.075	11 (25/ 25)	11.00	0.075
p.hat700-2	44*	44 (25/ 25)	44.00	0.005	44 (25/ 25)	44.00	0.004	44 (25/ 25)	44.00	0.004
p.hat700-3	62	62 (25/ 25)	62.00	0.019	62 (25/ 25)	62.00	0.018	62 (25/ 25)	62.00	0.018
p.hat1500-1	12*	12 (25/ 25)	12.00	6.357	12 (25/ 25)	12.00	13.102	12 (25/ 25)	12.00	13.102
p.hat1500-2	65	65 (25/ 25)	65.00	0.034	65 (25/ 25)	65.00	0.034	65 (25/ 25)	65.00	0.034
p.hat1500-3	94	94 (25/ 25)	94.00	0.094	94 (25/ 25)	94.00	0.095	94 (25/ 25)	94.00	0.095
Total		1740	1731.44	1038.480	1740	1730.60	985.891	1740	1730.60	985.891

- 7) B. Kernighan and S. Lin, "An efficient heuristic procedure for partitioning graphs," Bell System Technical Journal, vol.49, pp.291-307, 1970.
- 8) K. Katayama, M. Sadamatsu, and H. Narihisa, "Iterated k-opt Local Search for the Maximum Clique Problem," Proc. of Seventh European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimisation (EvoCOP-2007), LNCS 4446, Springer-Verlag, pp. 84-95, Valencia, Spain, April 11-13, 2007.
- 9) 上野伸郎, 濱本明宏, 片山謙吾, 成久洋之, "最大クリーク問題に対する地形解析," 平成 16 年度電気・情報関連学会中国支部第 55 回連合大会講演論文集, p. 376, Oct. 16, 2004.
- 10) K. Katayama, A. Hamamoto, and H. Narihisa, "An effective local search for the maximum clique problem," Information Processing Letters, vol.95, no.5, pp.503-511, 2005.
- 11) D. Johnson and M. Trick, "Cliques, coloring, and satisfiability," Second DIMACS Implementation Challenge,

表 2 累積解情報を使用する Kick と Restart を使用しない IKLS の結果

Instance		IKLS								
name	BR	random+NR			min+NR+FB			min+NR+NF		
		Best	Avg	Time	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time
C125.9	34*	34 (25/25)	34.00	0.000	34 (25/25)	34.00	0.000	34 (25/25)	34.00	0.000
C250.9	44*	44 (25/25)	44.00	0.017	44 (25/25)	44.00	0.014	44 (25/25)	44.00	0.013
C500.9	57	57 (25/25)	57.00	1.642	57 (25/25)	57.00	2.102	57 (25/25)	57.00	2.388
C1000.9	68	68 (24/25)	67.96	65.344	68 (19/25)	67.76	48.458	68 (22/25)	67.88	62.991
C2000.9	78	77 (5/25)	76.12	199.641	77 (7/25)	76.20	251.856	78 (1/25)	76.20	256.306
DSJC500.5	13*	13 (25/25)	13.00	0.061	13 (25/25)	13.00	0.063	13 (25/25)	13.00	0.038
DSJC1000.5	15*	15 (25/25)	15.00	1.639	15 (25/25)	15.00	1.889	15 (25/25)	15.00	1.958
C2000.5	16	16 (25/25)	16.00	3.300	16 (25/25)	16.00	6.730	16 (25/25)	16.00	4.390
MANN_a27	126*	126 (25/25)	126.00	0.037	126 (25/25)	126.00	0.029	126 (25/25)	126.00	0.029
MANN_a45	345*	345 (8/25)	344.32	345.492	345 (7/25)	344.28	276.040	345 (6/25)	344.24	369.001
brock200.2	12*	12 (25/25)	12.00	0.075	12 (25/25)	12.00	0.054	12 (25/25)	12.00	0.027
brock200.4	17*	17 (25/25)	17.00	0.155	17 (25/25)	17.00	0.208	17 (25/25)	17.00	0.180
brock400.2	29*	29 (18/25)	27.88	3.397	29 (24/25)	28.84	3.983	29 (22/25)	28.52	4.512
brock400.4	33*	33 (25/25)	33.00	1.254	33 (25/25)	33.00	0.952	33 (25/25)	33.00	1.024
brock800.2	24	24 (1/25)	21.12	2.601	24 (4/25)	21.48	5.601	24 (3/25)	21.36	4.044
brock800.4	26	26 (2/25)	21.40	3.657	26 (6/25)	22.20	5.055	26 (7/25)	22.40	9.276
gen200.p0.9.44	44*	44 (25/25)	44.00	0.013	44 (25/25)	44.00	0.014	44 (25/25)	44.00	0.014
gen200.p0.9.55	55*	55 (25/25)	55.00	0.006	55 (25/25)	55.00	0.005	55 (25/25)	55.00	0.004
gen400.p0.9.55	55	55 (25/25)	55.00	2.172	55 (25/25)	55.00	2.275	55 (25/25)	55.00	2.081
gen400.p0.9.65	65	65 (25/25)	65.00	0.024	65 (25/25)	65.00	0.018	65 (25/25)	65.00	0.017
gen400.p0.9.75	75	75 (25/25)	75.00	0.015	75 (25/25)	75.00	0.013	75 (25/25)	75.00	0.013
hamming8-4	16*	16 (25/25)	16.00	0.000	16 (25/25)	16.00	0.000	16 (25/25)	16.00	0.000
hamming10-4	40	40 (25/25)	40.00	0.023	40 (25/25)	40.00	0.018	40 (25/25)	40.00	0.019
keller4	11*	11 (25/25)	11.00	0.000	11 (25/25)	11.00	0.000	11 (25/25)	11.00	0.000
keller5	27	27 (25/25)	27.00	0.035	27 (25/25)	27.00	0.028	27 (25/25)	27.00	0.028
keller6	59	59 (25/25)	59.00	6.767	59 (25/25)	59.00	5.733	59 (25/25)	59.00	5.577
p.hat300-1	8*	8 (25/25)	8.00	0.003	8 (25/25)	8.00	0.004	8 (25/25)	8.00	0.002
p.hat300-2	25*	25 (25/25)	25.00	0.001	25 (25/25)	25.00	0.001	25 (25/25)	25.00	0.001
p.hat300-3	36*	36 (25/25)	36.00	0.007	36 (25/25)	36.00	0.006	36 (25/25)	36.00	0.006
p.hat700-1	11*	11 (25/25)	11.00	0.064	11 (25/25)	11.00	0.065	11 (25/25)	11.00	0.077
p.hat700-2	44*	44 (25/25)	44.00	0.006	44 (25/25)	44.00	0.004	44 (25/25)	44.00	0.005
p.hat700-3	62	62 (25/25)	62.00	0.020	62 (25/25)	62.00	0.015	62 (25/25)	62.00	0.017
p.hat1500-1	12*	12 (25/25)	12.00	11.747	12 (25/25)	12.00	10.677	12 (25/25)	12.00	10.312
p.hat1500-2	65	65 (25/25)	65.00	0.035	65 (25/25)	65.00	0.030	65 (25/25)	65.00	0.029
p.hat1500-3	94	94 (25/25)	94.00	0.094	94 (25/25)	94.00	0.088	94 (25/25)	94.00	0.086
Total		1740	1729.80	649.344	1740	1731.76	622.028	1741	1731.60	734.465

Instance		IKLS								
name	BR	max+NR+FB			max+NR+NF					
		Best	Avg	Time	Best	Avg	Time	Best	Avg	Time
C125.9	34*	34 (25/25)	34.00	0.001	34 (25/25)	34.00	0.001			
C250.9	44*	44 (25/25)	44.00	0.016	44 (25/25)	44.00	0.015			
C500.9	57	57 (25/25)	57.00	2.096	57 (25/25)	57.00	1.606			
C1000.9	68	68 (23/25)	67.92	57.251	68 (22/25)	67.88	48.466			
C2000.9	78	77 (5/25)	76.08	253.724	77 (6/25)	76.08	232.200			
DSJC500.5	13*	13 (25/25)	13.00	0.054	13 (25/25)	13.00	0.046			
DSJC1000.5	15*	15 (25/25)	15.00	2.207	15 (25/25)	15.00	1.239			
C2000.5	16	16 (25/25)	16.00	4.940	16 (25/25)	16.00	3.224			
MANN_a27	126*	126 (25/25)	126.00	0.023	126 (25/25)	126.00	0.028			
MANN_a45	345*	345 (7/25)	344.28	430.920	345 (2/25)	344.08	91.978			
brock200.2	12*	12 (25/25)	12.00	0.320	12 (25/25)	12.00	0.260			
brock200.4	17*	17 (25/25)	17.00	0.179	17 (25/25)	17.00	0.158			
brock400.2	29*	29 (14/25)	27.24	3.542	29 (16/25)	27.56	3.571			
brock400.4	33*	33 (25/25)	33.00	2.041	33 (25/25)	33.00	1.356			
brock800.2	24	24 (1/25)	21.12	1.810	21 (25/25)	21.00	1.288			
brock800.4	26	26 (2/25)	21.40	2.979	26 (2/25)	21.40	3.822			
gen200.p0.9.44	44*	44 (25/25)	44.00	0.010	44 (25/25)	44.00	0.012			
gen200.p0.9.55	55*	55 (25/25)	55.00	0.005	55 (25/25)	55.00	0.006			
gen400.p0.9.55	55	55 (25/25)	55.00	3.375	55 (25/25)	55.00	2.204			
gen400.p0.9.65	65	65 (25/25)	65.00	0.017	65 (25/25)	65.00	0.019			
gen400.p0.9.75	75	75 (25/25)	75.00	0.012	75 (25/25)	75.00	0.012			
hamming8-4	16*	16 (25/25)	16.00	0.000	16 (25/25)	16.00	0.001			
hamming10-4	40	40 (25/25)	40.00	0.020	40 (25/25)	40.00	0.017			
keller4	11*	11 (25/25)	11.00	0.000	11 (25/25)	11.00	0.000			
keller5	27	27 (25/25)	27.00	0.040	27 (25/25)	27.00	0.032			
keller6	59	59 (25/25)	59.00	5.548	59 (25/25)	59.00	4.160			
p.hat300-1	8*	8 (24/25)	7.96	0.003	8 (23/25)	7.92	0.003			
p.hat300-2	25*	25 (25/25)	25.00	0.001	25 (25/25)	25.00	0.001			
p.hat300-3	36*	36 (25/25)	36.00	0.005	36 (25/25)	36.00	0.006			
p.hat700-1	11*	11 (25/25)	11.00	0.126	11 (25/25)	11.00	0.065			
p.hat700-2	44*	44 (25/25)	44.00	0.004	44 (25/25)	44.00	0.004			
p.hat700-3	62	62 (25/25)	62.00	0.017	62 (25/25)	62.00	0.016			
p.hat1500-1	12*	12 (25/25)	12.00	17.087	12 (24/25)	11.96	30.891			
p.hat1500-2	65	65 (25/25)	65.00	0.030	65 (25/25)	65.00	0.030			
p.hat1500-3	94	94 (25/25)	94.00	0.086	94 (25/25)	94.00	0.089			
Total		1740	1729.00	788.489	1737	1728.88	426.826			

Vertex Selection based Tie-Breaking Methods in Kick Technique of Iterated k -opt Local Search for the Maximum Clique Problem

Akinori KOMURA, Kengo KATAYAMA*, Hideo MINAMIHARA*

Graduate School of Engineering,

**Department of Information and Computer Engineering,*

Faculty of Engineering, Okayama University of Science.

1-1 Ridai-cho, Kita-ku, Okayama 700-0005, Japan.

(Received September 30, 2010; accepted November 9, 2010)

Many metaheuristics have been proposed for combinatorial optimization problems. One of the typical metaheuristics is well known to be iterated local search (ILS). In many cases, ILS has been shown to be capable of finding (near-) optimum solutions for difficult combinatorial optimization problems.

In this paper, we investigate three types of vertex selection based tie-breaking methods in which can be used in ILS for the maximum clique problem (MCP). ILS algorithms with each of the methods are evaluated on DIMACS benchmark graphs. The results show that the performance of ILS algorithms with each of the methods has different effectiveness.

Keywords: combinatorial optimization; maximum clique problem; iterated local search.