

# 仲上 $m$ フェージングチャネルにおける多値 QAM のビット誤り率

小西 憲一

岡山理科大学工学部情報工学科

(2007年9月26日受付、2007年11月2日受理)

## 1. まえがき

ワイヤレス LAN やブロードバンドワイヤレスアクセスシステムなどで高速伝送を実現するため、限られた周波数資源においてよりスペクトル利用効率の高いデジタル変調方式が要求されている。伝送帯域幅を増加せずに高いスペクトル利用効率を実現する変調方式として最も魅力ある方式が多値 QAM (M-ary Quadrature Amplitude Modulation, 以下 M-QAM と記す) 方式である。従来, M-QAM 方式のビット誤り率 (BER) を閉形式で厳密に計算することは AWGN チャネルにおいてさえ煩雑で困難なため、近似式で計算することが多かった。しかし近年, D. Yoon と K. Cho らによって見出された理論式 [1], [2] によって情報ビット列の M-QAM シンボルへのマッピングをグレイ符号とした場合の BER が厳密に計算できるようになった。筆者は D. Yoon と K. Cho らの厳密式に基づき、モバイル通信システムへの適用を考慮してレイリーフェージングチャネルでの M-QAM の厳密な BER を計算した [3]。レイリーフェージングは V/UHF 帯、マイクロ波帯の周波数を使う陸上移動体の無線チャネルにおける典型的なフェージングであるが、今日のワイヤレスシステムにおける電波伝搬環境は様々であり、より広範なフェージング環境下での BER 特性の検討が必要である。そこで、本論文ではレイリーフェージングを含むフェージングモデルとして近年検討対象となることが多くなった仲上  $m$  フェージング環境下で M-QAM の BER を厳密式に基づいて計算する。

この論文は、以下のように構成される。まず、モバイル通信の研究者以外には馴染みが薄いと思われる仲上  $m$  フェージングについてその包絡線分布の式を示して、フェージングモデルを簡単に解説する。次いで、D. Yoon と K. Cho らの厳密式に基づいて仲上  $m$  フェージング下での正方格子型信号点配置 M-QAM の BER の厳密式を記述する。最後にいくつかの数値計算例を示す。多値数  $M$  が非常に大きい場合の M-QAM の BER の計算結果例は有用な基礎資料となることが期待される。

## 2. 仲上 $m$ フェージングチャネル

受信波がフェージング現象によって、その包絡線  $R$  の変動の分布が  $m$  分布と呼ばれる次式の確率密度関数 (PDF)

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mR^2}{\Omega}\right), \quad R \geq 0 \quad (1)$$

によって表されるフェージングを仲上  $m$  フェージングという。ここで、 $\Gamma(m)$  はガンマ関数であり、また

$$\Omega = E[R^2] \quad (2)$$

は包絡線  $R$  の二乗平均値 ( $E[\bullet]$  は集合平均を意味する) である。パラメータ  $m$  は  $R^2$  の正規化分散の逆数で、

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(R^2 - \Omega)^2]}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

によって定義される。 $m$  はフェージング指数と呼ばれる。パラメータ  $m$  は小さいほど深いフェージングであることを表し、 $m \rightarrow \infty$  はフェージングなし (すなわち AWGN チャネル) を意味する。いくつかの  $m$  の値について  $m$  分布の PDF  $p(R)$  を図 1 に示す。ただし、図 1 では  $\Omega = 1$  に正規化している。

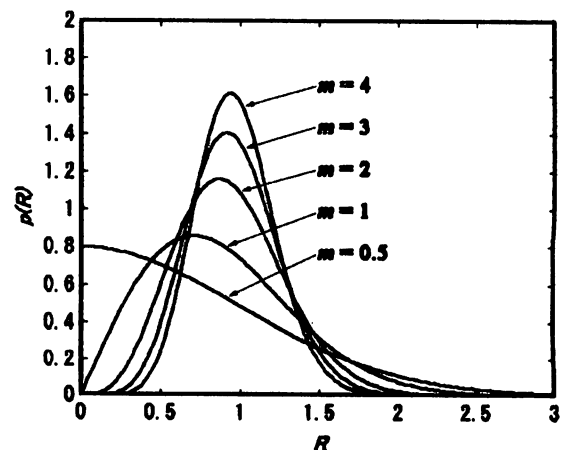


図 1.  $m$  分布の PDF ( $\Omega = 1$ )

$m=1$ の場合は式(1)は

$$p(R) = \frac{2R}{\Omega} \exp\left(-\frac{R^2}{\Omega}\right) \quad (4)$$

となり、レイリー分布に一致する。また、 $m=1/2$ の場合には式(1)は

$$p(R) = \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega}} \exp\left(-\frac{R^2}{2\Omega}\right) \quad (5)$$

となり、半ガウス分布と呼ばれる。

$m$ 分布は1940年代初期に仲上 稔が行ったHF帯のフェージングに関する観測結果から見出された分布で、その研究の詳細はW.C.Hoffman 編集の"Statistical Methods of Radio Wave Propagation"中の仲上の論文にまとめられている[4]。HF帯での観測から生まれた  $m$ 分布であるが、マイクロ波帯のような高い周波数におけるフェージングについても適用できることが確認されており[5]、最近のIEEEのモバイル通信関係の論文にも仲上  $m$ フェージングを扱う論文は数多く見られる。

### 3. 仲上 $m$ フェージングチャンネルにおける M-QAM の BER

本論文では正方格子型信号点配置の M-QAM を考える。また、フェージングは十分低速なフラットフェージングとし、受信機においてチャンネルの全パラメータが完全に推定できて同期検波が可能であるとする。フェージングチャンネルでの BER を計算するために、まず AWGN チャンネルでの BER の厳密式から出発する。情報ビット列の M-QAM シンボルへのマッピングをグレイ符号とした場合の AWGN チャンネルにおける M-QAM の BER の厳密式は、「まえがき」でも触れたとおり D. Yoon と K. Cho らによって見出された[1], [2]。それは次式で与えられる。

$$P_{b,M} = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^k)\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+2^k-1}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \operatorname{erfc} \left( (2 \cdot i + 1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right) \right\} \quad (6)$$

上式において

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (7)$$

はガウスの誤差補関数である。また、 $M$ は多値数、 $E_b$ は1ビット当りのエネルギー、 $N_0/2$ は相加白色ガウス雑音の両側電力スペクトル密度である。 $\lfloor x \rfloor$ はガウスの記号で  $x$  の整数部を表す。ただし、M-QAM の  $M$

個のシンボルはどれも等確率で送信されるという仮定がおかれている。

フェージングチャンネルでの BER を評価する前に、まず1ビット当りの瞬時 SN 比  $\gamma_b$  と平均 SN 比  $\bar{\gamma}_b$  を各々

$$\gamma_b = \frac{R^2 E_b}{N_0} \quad (8)$$

$$\bar{\gamma}_b = \frac{\Omega E_b}{N_0} \quad (9)$$

と定義して瞬時 SN 比  $\gamma_b$  の PDF を記述する。変数変換により  $\gamma_b$  の PDF  $p(\gamma_b)$  は式(1)より

$$p(\gamma_b) = \left( \frac{m}{\bar{\gamma}_b} \right)^m \frac{\gamma_b^{m-1}}{\Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}\right) \quad (10)$$

となる。

仲上  $m$  フェージングチャンネルにおける M-QAM の平均 BER は、AWGN チャンネルでの式(6)において  $E_b/N_0$  を瞬時 SN 比  $\gamma_b$  で置き換え、 $P_{b,M} \Rightarrow P_{b,M}(\gamma_b)$  と書いて  $P_{b,M}(\gamma_b)$  を式(10)を使って平均化して得られる。すなわち、

$$\bar{P}_{b,M}(\text{Nakagami}) = \int_0^\infty P_{b,M}(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (11)$$

より得られる。ガウスの誤差補関数に対する Craig の恒等式[6]

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{\sin^2 \theta}\right) d\theta \quad (12)$$

を利用すれば、式(11)は

$$\begin{aligned} \bar{P}_{b,M}(\text{Nakagami}) &= \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^k)\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+2^k-1}{\sqrt{M}} \rfloor} \right. \\ &\quad \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \\ &\quad \cdot \left. \left( \frac{2}{\pi} \right) \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}_{\gamma_b} \left[ -(2i+1)^2 \frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] d\theta \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

と計算される。ここで、 $\mathcal{M}_{\gamma_b}(\bullet)$  は  $\gamma_b$  のモーメント母関数(MGF)で、

$$\mathcal{M}_{\gamma_b}(s) = \int_0^\infty p(\gamma_b) \exp(s\gamma_b) d\gamma_b = \left( 1 - \frac{s\bar{\gamma}_b}{m} \right)^{-m} \quad (14)$$

である。式(13)は閉じた形で得られ[6]、次のように書かれる。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{P}_{b,M(\text{Nakagami})} &= \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{M}} \rfloor} \right. \\ &\quad \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{c_i}}{(1+c_i)^{m+(1/2)}} \\ &\quad \cdot \left. \frac{\Gamma(m+(1/2))}{\Gamma(m+1)} {}_2F_1 \left( 1, m + \frac{1}{2}; m+1; \frac{1}{1+c_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$c_i = (2i+1)^2 \frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \cdot \frac{\bar{\gamma}_b}{m} \quad (16)$$

とおいている。また、式(15)の  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  はガウスの超幾何関数である。 $m$  の値が整数である特別な場合、式(15)は

$$\begin{aligned} \bar{P}_{b,M(\text{Nakagami})} &= \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{M}} \rfloor} \right. \\ &\quad \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \cdot \left[ 1 - \mu(c_i) \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2j}{j} \left( \frac{1-\mu^2(c_i)}{4} \right)^j \right] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

と書ける。ただし、

$$\mu(c_i) = \sqrt{\frac{c_i}{1+c_i}} \quad (18)$$

である。

#### 4. 計算結果例

式(15)に基づいて数値計算した M-QAM の平均 BER の結果の一例を以下の図 2 から図 6 に示す。いずれも 1 ビット当りの平均 SN 比  $\bar{\gamma}_b$  に対する平均 BER  $\bar{P}_{b,M(\text{Nakagami})}$  である。正方形格子型信号点配置の M-QAM であるので多値数  $M$  は 4 のべき乗である。図 2 が 16 値、図 3 が 64 値、図 4 が 256 値、図 5 が 1024 値、図 6 が 4096 値の場合の BER 特性である。フェージングパラメータ  $m$  は各々、0.5, 1, 2, 3, 4 の場合を計算した。 $m=1$  はレイリーフェージングの場合であり、[3]の結果と一致する。図 7 はビット当りの平均 SN 比  $\bar{\gamma}_b = 20$  dB において、M-QAM の平均 BER がフェージングパラメータ  $m$  によってどのように変わるかを示している。特に  $M=1024$ ,  $M=4096$  のように多値数が非常に大の場合、レイリーフェージングより浅いフェージング ( $m > 1$ ) でも平均 BER は  $10^{-2}$  以上であり、ダイバーシチ受信などフェージング対抗策が必須となるであろう。

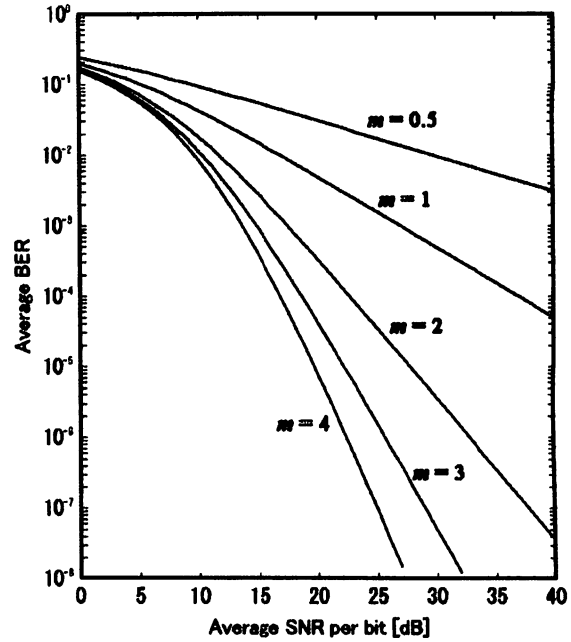


図 2. 仲上  $m$  フェージングチャンネルにおける 16 値 QAM の平均 BER

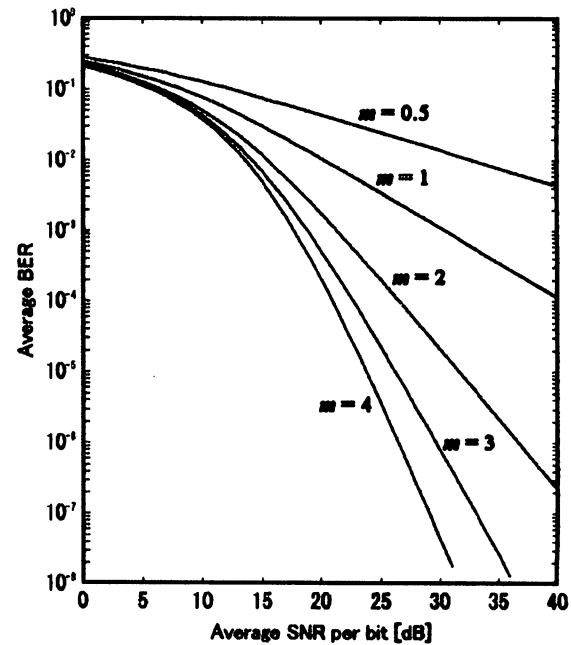


図 3. 仲上  $m$  フェージングチャンネルにおける 64 値 QAM の平均 BER

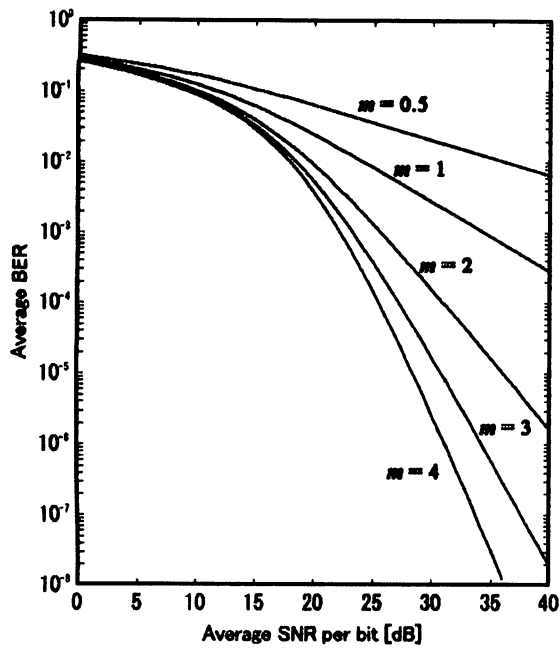


図4. 仲上  $m$  フェージングチャネルにおける  
256 値 QAM の平均 BER

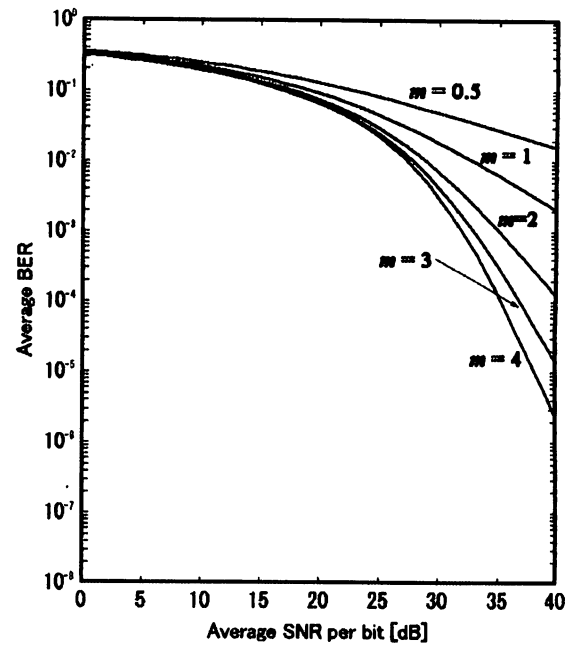


図6. 仲上  $m$  フェージングチャネルにおける  
4096 値 QAM の平均 BER

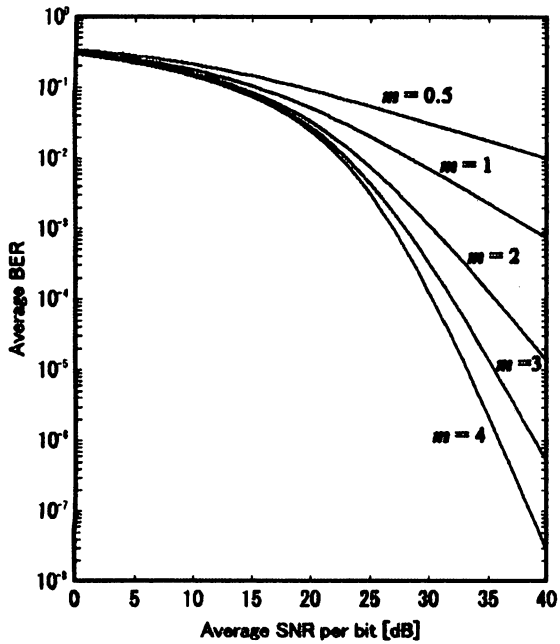


図5. 仲上  $m$  フェージングチャネルにおける  
1024 値 QAM の平均 BER

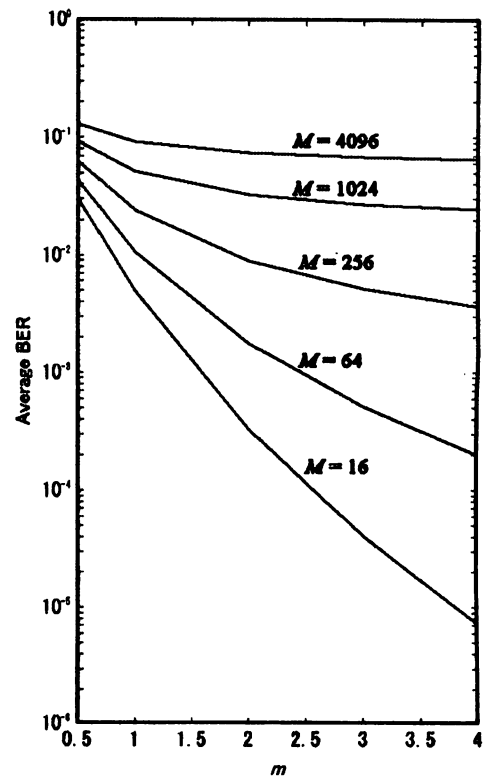


図7. フェージングパラメータ  $m$  と  
平均 BER ( $\bar{\gamma}_b = 20$  dB)

## 5. むすび

仲上  $m$  フェージングチャネルにおいて、M-QAM の平均 BER を AWGN チャネルにおける厳密式に基づいて計算した。多値数が 1024 値や 4096 値など非常に大の場合は、レイリーフェージングより浅いフェージングのときでもダイバーシチ受信など、何らかのフェージングに対する対策を講じておく必要があるであろう。

## 参考文献

- [1] D. Yoon, K. Cho and J. Lee, "Bit Error Probability of M-ary Quadrature Amplitude Modulation," *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC 2000-Fall)* Boston, MA, vol. 5, September 2000, pp. 2422 – 2427.
- [2] K. Cho and D. Yoon, "On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 1074 – 1080, July 2002.
- [3] 小西 憲一, "レイリーフェージングチャネルにおける多値 QAM のビット誤り率," 岡山理科大学紀要 No.42 A pp.63 – 68, 2006.
- [4] M. Nakagami, "The  $m$ -Distribution — A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," in *Statistical Methods of Radio Propagation*: Pergamon Press, pp.3 – 36, 1960.
- [5] 奥井 重彦, 電子通信工学のための特殊関数とその応用: 森北出版, 1997.
- [6] M.K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, 2nd ed.: John Wiley and Sons, 2005.

# Bit Error Rate Performance of M-ary QAM over Nakagami- $m$ Fading Channels

Ken-ichi KONISHI

*Department of Information and Computer Engineering, Faculty of Engineering,  
Okayama University of Science,  
1-1 Ridai-cho, Okayama 700-0005, Japan*

(Received September 26, 2007; accepted November 2, 2007)

In this paper, we analytically evaluate the average bit error rate (BER) of M-ary square QAM with Gray code bit mapping over Nakagami- $m$  fading channels based on the exact closed-form expression in the AWGN channel. The Nakagami- $m$  distribution includes the Rayleigh distribution ( $m = 1$ ) and the one-sided Gaussian distribution ( $m = 0.5$ ) as special cases, and exhibits a very good fit for wide range of mobile radio channels. Numerical results obtained are useful in designing wireless communication systems for various types of fading environments. These results also show that an appropriate countermeasure such as diversity reception is necessary to improve performance in the fading environment, especially in the case of the large constellation size.

**Keywords:** bit error rate (BER); M-ary QAM; Gray code bit mapping; Nakagami- $m$  fading channel.