

Poincaré Gauge 理論から予測された時空の解析

小林 樹讓・坂本 勉・榎本 拓也
田代 勤*・中力 眞一*

岡山理科大学大学院 総合情報研究科 シミュレーション物理専攻

* 岡山理科大学 総合情報学部 コンピュータシミュレーション学科

(2004年9月30日受付、2004年11月5日受理)

この論文において我々は Kerr-Newman type 解と呼んでいる PGT の厳密解のひとつを用いて時空構造の解析を行った。Einstein-Maxwell 理論から導かれた Kerr-Newman 解が質量と電荷をもって定常回転している物体による時空を与えるのに対して、我々の扱う解は質量と PGT ゲージチャージと呼ぶ量を持ち、定常回転している重力物体による時空を与える。これら2種類の時空構造の違いを明確にすることがこの論文の主たる目的である。今回は、重力物体の回転軸に対して垂直な赤道面でのテスト粒子（または光子）の運動に絞って解析を行う。

1 Introduction

ポアンカレ・ゲージ理論 (PGT) は、1956年に内山 [1] によりローレンツ変換のゲージ化という手続きによって、アインシュタインの重力理論に等価な理論が得られることが示されたことに始まる。内山のアイデアは、その後すぐ (1961年) に、T.W.B Kibble [2] によりローレンツ変換+並進変換 (ポアンカレ変換) のゲージ化という形で一般化された。その後更に、Kibble の理論は林 [3] により8個のパラメータを伴うより一般化された形へと整備された。その後 PGT は様々な人々によって、様々な立場からローレンツゲージ場の振る舞いや厳密解、その重力的な側面について、更にはそのスーパー化の可能性などについての研究が成されて来ている。

この論文では、この論文の著者の一人である中力 [4] によって提案された複素 Einstein-Yang-Mills 理論として解釈できる PGT のモデルを取り上げ、このモデルにおいて予測されている PGT の厳密解の1つである Kerr-Newman type の解 (以後、KN 的解と略記) [5] が与える時空についてその構造の解析を行う。KN 的解の与える時空は、この解において予測されている PGT ゲージチャージと呼ぶある保存量の取る値によって、通常の Einstein-Maxwell 理論の厳密解である Kerr-Newman 解の与える時空と類似したものとそうでないものとに分類される。この論文の目的は、これらの時空の相違を考慮に入れつつ KN 的解の与える時空の構造を調べる事にある。

次節では、先ず KN 的解より出発して、この解が与える時空内を運動するテスト粒子 (光子を含む) の運動方程式を導出する。第3節では、この時空が持ち得る Horizon について考察する。第4節では、第2節

で導いた運動方程式を基に、可能な軌道の中から2、3の特殊なケースに制限してその軌道を調べる。最後の節はまとめと議論に当てる。

2 The equation of motion

複素 Einstein-Yang-Mills 方程式のアーベリアンリダクションによって、複素 Einstein-Maxwell 方程式が導出される。この複素 Einstein-Maxwell 方程式の厳密解の一つとして、通常の手続きと類似な手続きによって KN 的解が得られる。この解の時空部分は次の線素によって与えられる。

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta \{ (r^2 + a^2) d\theta - a dt \}^2 \quad (1)$$

ここで

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + \epsilon q_*^2 \quad (3)$$

である。 M, a 及び q_*^2 は各々、重力物体の質量、回転のパラメータ、および PGT ゲージチャージである。また、 ϵ は土何れかの符号である。特に、+の時この時空は通常の Kerr-Newman 時空と類似な構造を持つことは明らかである。従って、我々にとって関心があるのは、 ϵ が-の場合であるが、可能な限りどちらかに制限しないでこのままの形で議論を進め両者の相違を明確にしたい。

この解の与える時空は明らかに軸対称で、その軸の周りを定常回転している PGT ゲージチャージと呼

ぶ保存量を持った重力物体が作り出す時空である。この時空の全体的な構造を把握する事は中々困難である。そのためこの論文では、この時空の対称軸（回転軸）に垂直な赤道面での構造を調べることにした。そのためにこの平面内に入射した、テスト粒子または光子の運動について調べることは有効であると考えられる。

赤道面内でのテスト粒子、または光子の運動を記述する運動方程式は、一般的な手続きに従い線素 (1) より得られるラグランジュアン

$$2\mathcal{L} = \frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2)t\dot{t} + \frac{2a}{\rho^2}\{(r^2 + a^2) - \Delta\}\dot{\phi} + \frac{1}{\rho^2}\{a^2\Delta - (r^2 + a^2)\}\dot{\phi} - \frac{\rho^2}{\Delta}\dot{r} \quad (4)$$

を用いて変分原理から導く事ができる。その結果は次の通りである。

$$r^2 = \left(\frac{2}{r^3} - \epsilon\frac{q_*^2}{r^4}\right)(aE - L)^2 + E^2 - \frac{1}{r^2}(a^2E^2 - L^2) - \frac{\delta_1}{r^2}\Delta \quad (5)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta}\left\{(a^2 + r^2 + \frac{2a^2}{r} - \epsilon\frac{q_*^2 a^2}{r^2})E - \left(\frac{2a}{r} - \epsilon\frac{q_*^2 a}{r^2}\right)L\right\} \quad (6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(1 - \frac{2}{r} + \epsilon\frac{q_*^2}{r^2}\right)L + \left(\frac{2a}{r} - \epsilon\frac{q_*^2 a}{r^2}\right)E\right\} \quad (7)$$

ここで文字の上のドットはテスト粒子に対しては固有時間についての、光子に対しては何か適当なアフィンパラメータ τ についての微分を表している。 E, L はそれぞれテスト粒子のエネルギーと角運動量に対応する保存定数である。 δ_1 はテスト粒子が静止質量を持つ場合には 1、持たない（光子）場合には 0 を表す。また各々の式において、 r, t, ϕ, a, q_*^2 は $M = 1$ となるようにスケールしていることに注意する必要がある。

3 Horizon

この節では、KN 的解の時空が有する Horizon について考える。ここで扱う時空は Kerr-Newman 解が有する Horizon とは少し異なり、PGT ゲージチャージの値によっては Horizon が 1 つしか存在しない場合がある。この時空の座標特異性は、メトリック (1) が発散する点、つまり (3) 式で定義された Δ がゼロとなる点として現れる。従って、そのときの半径は

$$r_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - \epsilon_e e^2} \quad (8)$$

と書く事ができる。ここで $a^2 + \epsilon q_*^2 = \epsilon_e e^2$ と置いた。この式より回転パラメータ a と PGT ゲージチャージ

q_* の値が $1 < \epsilon_e e^2$ を満たすとき r_{\pm} は虚数となり、この時空には特異点は存在しないことがわかる。一方、

$$1 > \epsilon_e e^2 > 0, \quad \text{すなわち} \quad 0 < a^2 + \epsilon q_*^2 < 1 \quad (9)$$

であるとき r_{\pm} 共に存在する。また、

$$\epsilon_e e^2 < 0, \quad \text{すなわち} \quad a^2 + \epsilon q_*^2 < 0 \quad (10)$$

のとき、 r_+ のみが存在することがわかる。

4 The orbit of test-particle or photon

この節では、第 2 節で求めた運動方程式 (5)~(7) を用いてテスト粒子（または光子）の運動を考える。一般に粒子の運動の軌道は、初期条件によって保存定数を決めることで決定されるが、この節では、どのようにして軌道のパラメータ（ここでは E と L ）が決定されるかについて考察する。まず慣例に従い r の逆数を u と置き、(5) を書き直す。

$$\frac{\dot{u}^2}{u^4} = -\epsilon q_*^2 x^2 u^4 + 2x^2 u^3 - \{x(x + 2aE) + \delta_1 \epsilon_e e^2\} u^2 + 2\delta_1 u + E^2 - \delta_1 \quad (11)$$

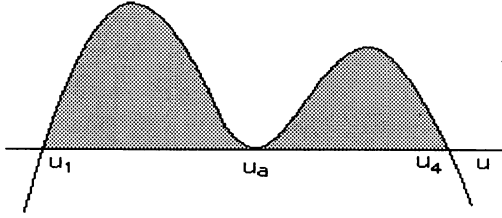
ここで、 $x = L - aE$ と置いた。また (11) の右辺を $f(u)$ とおくと、このとき、左辺は正の量であるため $f(u)$ も正となる u の領域でのみ運動は許されることになる。従って、 u についての 4 次方程式 $f(u) = 0$ の解の持ち方によってさまざまな可能な軌道に分類できることがわかる。実解または虚解だけしかもたない場合や、実解と虚解の両方を同時にもつ場合などいくつかの可能性が考えられるが、この論文では、これらの中でも特徴的な、2 つの実解と 1 つの重解をもつ場合で、図 1 に示した場合について絞って考察を進めることにする¹。

まず $f(u)$ を

$$f(u) = -\epsilon q_*^2 x^2 (u - u_1)(u - u_\alpha)^2 (u - u_4) \quad (12)$$

とおき、 $0 < u_\alpha$ で重解を持ち、 u_1 と u_4 とは実解で、 $u_1 < u_\alpha < u_4$ を満たすと仮定する。このとき、関数 $f(u)$ は $\epsilon = +1$ の場合、図 1 のようなグラフになる。従って、上に述べた理由により運動が可能なのは $f(u)$ が正となる $u_1 < u_\alpha < u_4$ の領域に限られる。そのため、テスト粒子（または光子）の取り得る軌道は、もし u_1 が正ならば $u_1 \leq u_\alpha \leq u_4$ の間で束縛軌道となり、また u_1 が負なら $0 < u_\alpha < u_4$ の間で重力物体への落下を許す相対論的軌道を持ち得ることになる。また重解を持つ点 u_α では不安定円軌道を取ることがわかる。

¹ その他の場合の軌道の振る舞いはこの場合の結果から容易に推測できる。


 図1 : $\epsilon = 1$

また一方、 $\epsilon = -1$ の場合、図1の上下を反転したグラフになる。このときの軌道は、殆どが非束縛軌道となり重解を持つ点でのみ安定な円軌道を取り得ることがわかる。

次に、 $f(u)$ が上式で与えられる形を持つことを許すパラメータ(E, L)の値について考える。まず、 $f(u)$ は u_α で極小値($\epsilon = +1$ の場合)または極大値($\epsilon = -1$ の場合)をとるために次の条件

$$f(u_\alpha) = 0 \quad (13)$$

$$f'(u_\alpha) = 0 \quad (14)$$

および、

$$f''(u_\alpha) > 0 \text{ または } f''(u_\alpha) < 0 \quad (15)$$

を満たすことが要求される。この最初の2式より E を消去して x^2 に関して次の2次方程式

$$\begin{aligned} & \{4a^2(1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha) u_\alpha^3 - (1 - 3u_\alpha + 2\epsilon q_*^2 u_\alpha^2)\} u_\alpha^2 x^4 \\ & + 2\delta_1 \{(1 - \epsilon_e e^2 u_\alpha)(1 - 3u_\alpha + 2\epsilon q_*^2 u_\alpha^2) \\ & + 2a^2(1 - u_\alpha) u_\alpha\} u_\alpha x^2 - \delta_1^2 (1 - \epsilon_e e^2 u_\alpha)^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

を作ることができる。ここで、 x は実数でなければならないので、この式の判別式からまず、

$$1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha \geq 0 \quad (17)$$

なる条件が得られる。これはパラメータ E, L を決めるための一つの必要な条件である。

次にこの x^2 に関する2次方程式を解いて

$$x = \pm \sqrt{\frac{\delta_1}{u_\alpha P_\mp}} \left(a\sqrt{u_\alpha} \pm \frac{l}{a} \right) \quad (18)$$

を得る。ここで \pm の符号は複合同順ではないこと、また P_\pm と l は次式のように定義した量であることに注意。

$$P_\pm = (1 - 3u_\alpha + 2\epsilon q_*^2 u_\alpha^2) \pm 2l\sqrt{u_\alpha^3} \quad (19)$$

$$l = a\sqrt{1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha} \quad (20)$$

(18)の最初の \pm において、もし $x > 0$ なら $L \geq E$ となるため不自然である。このため $x < 0$ を採用することにする。このときパラメータ E, L は

$$E = \sqrt{\frac{\delta_1}{P_\mp}} (1 - 2u_\alpha + \epsilon q_*^2 u_\alpha^2 \mp l\sqrt{u_\alpha^3}) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L = & \mp \sqrt{\frac{\delta_1}{u_\alpha P_\mp}} \left\{ (a^2 u_\alpha^2 + 1) \frac{l}{a} \right. \\ & \left. \pm a(2 - \epsilon q_*^2 u_\alpha) \sqrt{u_\alpha^3} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

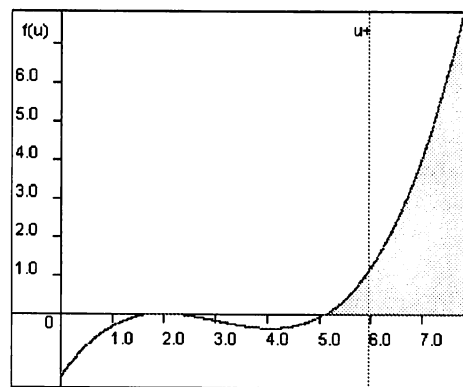
と求まる。これが今考えているテスト粒子の運動を可能にするためのパラメータ条件であるが、ここで、次の点に注意が必要である。つまり、この式の導出において、暗黙の内に $\delta_1 = 1$ なる場合を想定したことである。この式によると光子つまり $\delta_1 = 0$ の場合には、 E と L は共に0でなければならないことになってしまいが、一方、(16)に戻り $\delta_1 = 0$ を代入して再び計算を行うと x の4次方程式は

$$\begin{aligned} & u_\alpha^2 x^4 \{ -(1 - 3u_\alpha + 2\epsilon q_*^2 u_\alpha^2)^2 \\ & + 4a^2(1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha) u_\alpha^3 \} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となり、 $x = 0$ の場合と、 $-(1 - 3u_\alpha + 2\epsilon q_*^2 u_\alpha^2)^2 + 4a^2(1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha) u_\alpha^3 = 0$ の場合のときに成り立つことが分かる。この内、 $x = 0$ の場合には $E = 0, L = 0$ となり、 $\phi = 0, \dot{t} = 0, \dot{r} = 0$ となるためこれは不適であるが、もう一方の場合は、 $P_\pm = 0$ と先程の計算過程から生じる $E^2 = u_\alpha^3 x^2 (1 - \epsilon q_*^2 u_\alpha)$ を同時に満たせば軌道は存在し得ることが分かる。

上に求めた様々な条件を満たすようにパラメータ E と L を選ぶことによって、求めるテスト粒子や光子の軌道を描くことができる。

図2は、 $\epsilon = -1$ のときの $f(u)$ のグラフである。


 図2 : $\epsilon = -1$ のときの $f(u)$ のグラフ

塗りつぶされた領域がテスト粒子の軌道の取り得る領域となる。テスト粒子の初期条件として $E = 0.9, L = 2.7$ となるように選び、初期位置を $u = 0.51$ より飛ばすと図3のような軌道をとることがわかった。

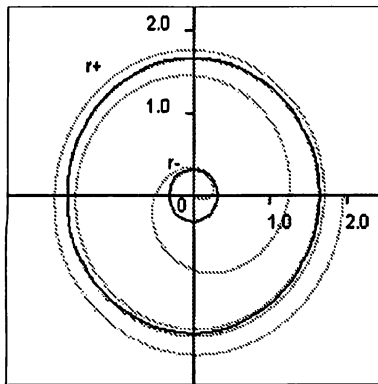


図 3 : $a = 0.8$, $\epsilon = -1$, $q_* = 0.3$

図 3 は、(7)、(11) を用いて微分方程式づくり、それを 4 次の Runge-Kutta 法で計算し、 r をプロットした図である。このとき、2 つの Horizon は $r_+ = 1.7$ 、 $r_- = 0.3$ の位置にあり、図 2 からわかるように重解を持つ点以外では非束縛軌道であるため、テスト粒子が中心に向かって落ちて行く事がわかる。

5 Summary and conclusion

この論文において我々は、PGT の厳密解の一つである Kerr-Newman type の解を取り上げ、それが与える時空の構造の解析を行う目的で、この時空を生み出す回転重力物体の回転軸に垂直な赤道面内でのテスト

粒子 (光子を含む) に許された典型的な軌道の可能性を調べ、この軌道を可能にする初期条件を粒子の保存量、エネルギー E と角運動量 L の満たす条件として求めた。また、 E, L の値をこれらの条件を満たす範囲で、Kerr-Newman 解との比較において予想される適当な値を選んで具体的な軌道を求めた。この時空の持つ Horizon と合わせてその様子を図 3 に示している。

今回は赤道面に制限した軌道を調べたが、この時空の全体像を知るためには、より一般的な (赤道面以外での) 軌道についての考察が必要であることはもちろんであるが、また、PGT ゲージチャージの性質を調べる意味からも、このチャージを有するディラック粒子がこの時空に入り込んだときの振る舞いを調べることなどが今後の課題として残る。

References

- [1] R.Utiyama, Phys.Rev. **101**, 1597(1957).
- [2] T.W.B.Kibble, J.Math.Phys. **2**, 212(1961).
- [3] K.Hayashi, Prog.Theor.Phys. **39**, 494(1968).
- [4] S.Nakariki, J.Math.Phys. **32**, 1612(1991).
- [5] S.Nakariki, T.Tashiro, K.Fukuma, M.Mizouchi and T.Ohtani, *Photon and Poincare group*, edited by Valeri V.Dvoeglazov (Nova Science Pub, Inc., New York, 1999), p-362.

Study of a spacetime from Poincaré gauge theory

Shigenori KOBAYASHI, Tsutomu SAKAMOTO, Takuya ENOMOTO
Tsutomu TASHIRO* and Shin-ichi NAKARIKI*

*Graduate School of Informatics,
* Department of Computer Simulation,
Faculty of Informatics,
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan*

(Received September 30, 2004; accepted November 5, 2004)

In this paper we study a spacetime given by the so-called Kerr-Newman type solution which is an exact solution of Poincaré gauge theory. It is known that the spacetime is created by a gravitating body that has a mass and "PGT gauge charge", and also rotates stationarily. We investigate the motion of a test particle(or photon) in the spacetime. For simplicity, however, the investigation is restricted to a typical motion of the particle in an equatorial plane, which is perpendicular to the axis of the rotating body. We obtain several conditions in two conserved quantities E and L (called conserved parameters) for the possibility of that motion. And using the typical values of E and L , we integrate numerically the equations of motion to obtain the typical motion of the particle. However, more general considerations will be given in the forthcoming paper.