

砂山の生成方法

東 恒人・高森 晃*

岡山理科大学工学部情報工学科

*株式会社ソルコム

(2003年11月7日 受理)

1. まえがき

実際の砂山では、砂山が成長する過程において、両対数グラフに表示された「崩壊の規模」と「崩壊の頻度」の間には、直線的な関係、すなわち、べき乗法則が成立している⁽¹⁾⁻⁽²⁾。この関係は砂山特有の崩壊特性である。すでに報告された砂山の生成例⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾では、生成された砂山の形状、生成過程において生じる崩壊特性、すなわち、「崩壊の規模」と「崩壊の頻度」の関係がべき乗法則を満たすか否かといったことについて、詳しく論じられていないようである。これらの報告では、崩壊方向を崩壊部分に対して4方向を考慮して砂山を形成するので、砂山の形状が角張る可能性があり、また、無限平面に砂山を形成しているので、制限された領域での砂山の形成過程を観測できないことから、これらの方法は砂山のシミュレーションに利用できない。

そこで、本稿では、制限されたセル領域内に、砂山を生成し、生成過程において観測される「崩壊の規模」と「崩壊の頻度」の関係や砂山の形状を調べる。また、上記の関係や砂山の形状に及ぼすセル領域の大きさの影響について明らかにする。

本稿で提案する生成法の特徴は、以下の通りである。
 ①蓄積に関する条件は「砂粒は、正方形のセル領域内の中心に、1個ずつ落下する」であり、崩壊に関する条件は「高さの差が5以上となるセルで崩壊が生じる」である。
 ②崩壊方向を8方向とし、 3×3 の正方形の領域内の各セルに方向係数を定義して、この方向係数に基づいて、砂が1個ずつ落ち込む隣接の3箇のセル（これを影響点と呼称する）が決定される。
 ③崩壊が生じるセル（これを崩壊点と呼称する）の高さが3だけ低くなる。
 ④崩壊の過程において、の正方形のセル領域からはみ出した砂は、この領域から落下する。

2. 生成条件

2.1 考え方

実際の砂山では、砂の蓄積と崩壊が繰り返されて、

砂山が成長する。特に、崩壊は様々な方向に対し、様々な規模で生じる。本稿では、砂山の崩壊特性を詳細に調べるために、砂を1個ずつ落下させ、崩壊方向は、崩壊点を中心とした8方向の中から選択される。

崩壊の規模を評価する尺度として、後述する誘導崩壊面積 A_s を導入して、崩壊特性を調べる。なお、砂の蓄積に関する処理を蓄積処理と呼称し、崩壊に関する処理を崩壊処理と呼称する。

2.2 定義

2.2.1 蓄積に関する条件

砂の大きさは全て均一であり、砂は、図1に示すような $M \times M$ のセル領域内に蓄積する。この領域以外には、砂は蓄積しない。砂が蓄積するセルを蓄積点と呼び、 $P(X_0, Y_0)$ で表す。砂は、図2に示すように、領域の中心に1個ずつ落下する。

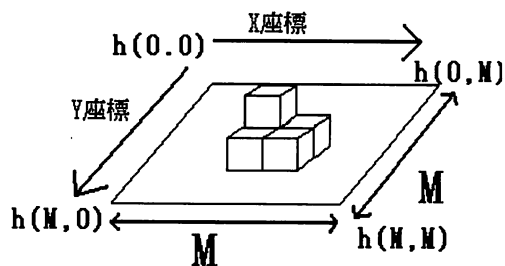


図1 砂山が生成される領域

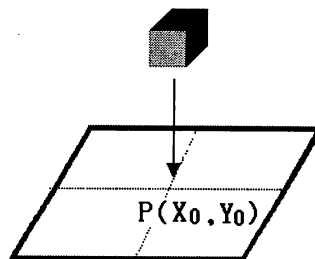


図2. 蓄積点の定義

砂山の高さを $h(X, Y)$ とする。なお、 $0 \leq X, Y \leq M$ である。

2.2.2 崩落に関する条件

図3(a)に示すように、崩壊が生じる条件は「隣接する8個のセルに対して、砂山の高さ $h(X, Y)$ の差が5以上となるセルで崩壊が生じる」である。

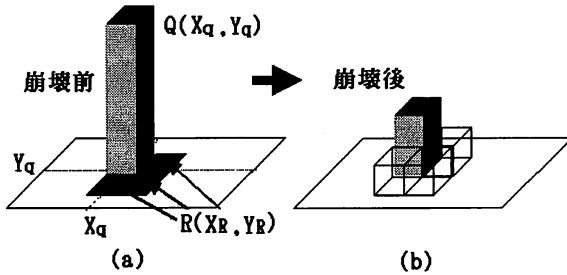


図3 崩壊点と影響点の位置関係の例

崩壊前と崩壊後の砂山の形状変化の例を図3(a)(b)に示す。同図に示すように、崩壊が発生するセルを崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ とし、崩壊によって砂が落ち込んでくるセルを影響点 $R(X_r, Y_r)$ とする。

2.2.3 崩壊方向係数 $B(X_q, Y_q)$

図4に示すように、崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ を中心として8方向の呼び方を決め、この方向を数値で表した係数 $B(X_q, Y_q)$ （以下、これを崩壊方向係数と呼称する）を、表1のように定義する。

たとえば、 $B(X_q, Y_q)=5$ の場合、崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ から見て、崩壊方向が右下であることを意味する。なお、崩壊方向係数 $B(X_q, Y_q)$ の初期値は全て「0」であり、崩壊が生じないことを意味する。

崩壊方向係数 $B(X_q, Y_q)$ の値は、蓄積処理と崩壊処理が進行するにつれて変化する。

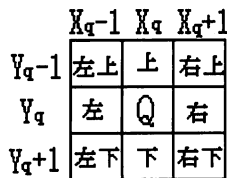


図4 崩壊点から見た方向の定義

表1 $B(X_q, Y_q)$ の数値とその意味

$B(X_q, Y_q)$	1	2	3	4	5
方向	左上	上	右上	右	右下
$B(X_q, Y_q)$	6	7	8	9	0
方向	下	左下	左	頂点	0

2.2.4 影響点方向係数 $B_r(X_r, Y_r)$

一つの崩壊点に対して、3つの影響点に対応する。その対応関係は、図5(a)~(h)に示すように、8種類ある。同図において、崩壊点 Q を『Q』、影響点 R を『R』と表

記し、また、崩壊の影響を受けないセルには空白で表す。

図5(a)~(h)に示した対応関係について、崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ からみて、影響点 R が存在する方向を、図6(a)~(h)に示すように、呼称する。表1を用いて、この方向を数値表現したパラメータが影響点方向係数 $B_r(X_r, Y_r)$ である。

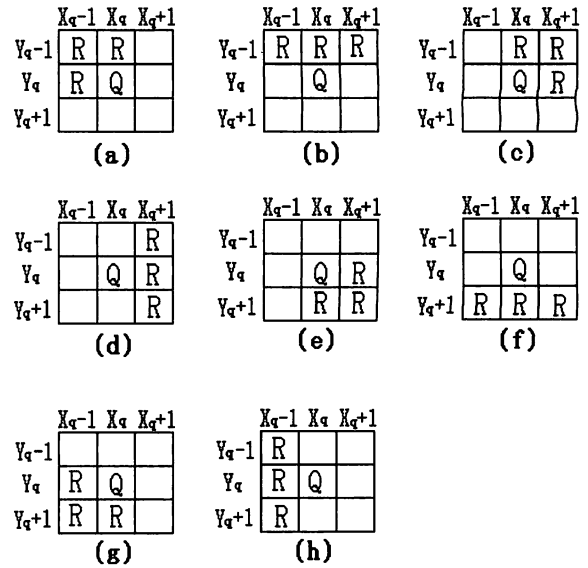


図5 崩壊点と影響点の位置関係

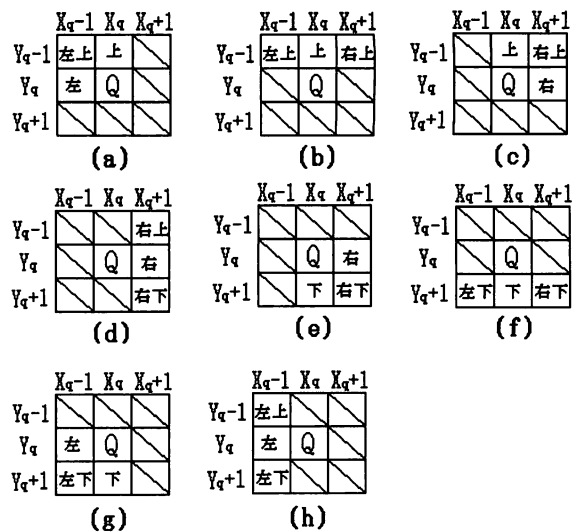


図6 崩壊方向毎に定められた $B_r(X_r, Y_r)$ の意味

3. 砂山の生成方法

砂の総数分 S だけ、蓄積処理と崩壊処理が交互に繰り返されて、砂山が生成される。ただし、崩壊処理は、崩壊条件が満たされる限り何度でも実行される。

3.1 蓄積処理

蓄積処理では、砂粒が1個ずつ落下するので、蓄積点

$P(X_0, Y_0)$ における砂山の高さ $h(X_0, Y_0)$ は、式(1)で表せる。

$$h(X_0, Y_0) = h(X_0, Y_0) + 1 \quad (1)$$

3.2 崩壊処理

崩壊処理は、崩壊条件を満たした場合、以下の手順で実施される。

3.2.1 手順1

手順1では、崩壊の方向を数値で表現する。崩壊の方向は、崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ における崩壊方向係数 $B(X_q, Y_q)$ の値によって決まる。その方向を表1を用いて、数値に変換する。たとえば、崩壊方向が右下であれば、 $Q(X_q, Y_q)=5$ となる。

なお、崩壊点 Q が蓄積点 P である場合、崩壊方向を8方向のうちからランダムに一つを選定する。

3.2.2 手順2

手順2では、まず、手順1で決定した崩壊方向係数に基づいて、影響点 $R(X_r, Y_r)$ を決定する。

たとえば、 $Q(X_q, Y_q)=5$ であれば、崩壊点 Q と影響点 R の対応関係は図5(e)である。この場合に図6(e)から、影響点方向係数が表1を用いて、次のように数値化される。 $B_r(X_q+1, Y_q)=4$ 、 $B_r(X_q+1, Y_q+1)=5$ 、 $B_r(X_q, Y_q+1)=6$ であり、残りのセルに該当する影響点方向係数には空白を格納する。

つぎに、崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ と影響点 $R(X_r, Y_r)$ におけるそれぞれの砂山の高さ $h(X_q, Y_q)$ と $h(X_r, Y_r)$ を決定する。

崩壊点 $Q(X_q, Y_q)$ での砂山の高さ $h(X_q, Y_q)$ を式(2)に、影響点 $R(X_r, Y_r)$ での砂山の高さ $h(X_r, Y_r)$ を式(3)に基づき変化させる。

$$h(X_q, Y_q) = (X_q, Y_q) - 3 \quad (2)$$

$$h(X_r, Y_r) = h(X_r, Y_r) + 1 \quad (3)$$

3.2.3 手順3

手順3では、次の崩壊に備えて、崩壊する方向を定める。

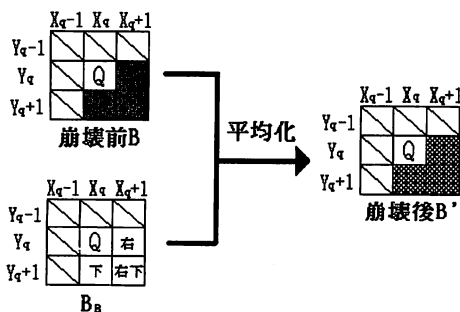


図7 新たに崩壊すべき方向の決め方

図7において、セル内に表記した方向を、表1の数値を参照して、数値に変換し、その値を式(4)の $B(X, Y)$ と $B_r(X, Y)$ に代入して、セル毎に新たな崩壊方向係数 $B'(X, Y)$ の値を算出しておく。なお、崩壊点 Q を『Q』と表記し、斜線で示されたセルは、崩壊によって影響を受けないセルであり、そのセルの崩壊方向係数 $B'(X, Y)$ の値は不変である。

$$B'(X, Y) = \{B(X, Y) + B_r(X, Y)\} / 2 \quad (4)$$

得られた $B'(X, Y)$ の値が、現実的でない崩壊方向を意味する場合がある。この原因は、表1に示すように、崩壊方向を、崩壊点 Q を中心として、左上から時計回りに1、2、3、…のように、割り当てることにある。

たとえば、崩壊前の崩壊方向係数 $B(X, Y)$ が「上」であり、影響点方向係数 $B_r(X, Y)$ が「左」とする。表1を参照すると、 $B(X, Y)=2$ 、 $B_r(X, Y)=8$ となるので、式(4)を用いると、新たな崩壊方向係数 $B'(X, Y)$ は $B'(X, Y)=5$ となり、表1より、その数値は「右下」を意味する。適切な崩壊方向係数 $B'(X, Y)$ は「左上」であるので、崩壊方向係数 $B'(X, Y)$ の値を修正する必要がある。

上記のような例外となる組合せについて、修正前後の方向を表2に示す。

表2 例外処理における $B(X, Y)$ の数値の修正法

組合せの例	修正前の方向	修正後の方向
左上(1)と左(8)	右(4)	左(8)
上(2)と左(8)	右下(5)	左上(1)
右上(3)と左(8)	右下(5)	左上(1)
左上(1)と左下(7)	右(4)	左(8)
上(2)と左下(7)	右(4)	左(8)
左上(1)と下(6)	右上(3)	左下(7)

また、崩壊前の崩壊方向係数 $B(X_q, Y_q)$ が $B(X_q, Y_q)=0$ の場合、式(4)を用いて、新たな崩壊方向 $B'(X_q, Y_q)$ を決定してしまうと、その方向が適切でない。そこで、 $B(X_q, Y_q)=0$ の場合に限り、式(5)を用いる。

$$B'(X_q, Y_q) = B_r(X_q, Y_q) \quad (5)$$

3.3 砂山の生成手順

蓄積処理により、砂を1ずつ蓄積点に落下させ続けると、図3(a)に示すように、砂山の頂点の高さが、初めて、崩壊条件を満たすことになる。この場合には、崩壊方向係数 $B(X_0, Y_0)$ が0であるので、ランダムに崩壊方向を決定して、その方向にしたがって、図6と表1を用いて、影響点方向係数 $B_r(X_r, Y_r)$ の数値を定める。

この影響点方向係数 $B_r(X_r, Y_r)$ の値と崩壊方向係数 $B(X_0, Y_0)$ の値から式(4)を用いて、新たな $B'(X_q, Y_q)$ の値を計算する。

たとえば、崩壊方向が、図3(b)に示すように、右下であると、 $B(X_q, Y_q)$ 、 $B_R(X_R, Y_R)$ 、 $B'(X_q, Y_q)$ の関係は表3となる。

蓄積処理が進行するに従って、 $B(X_q, Y_q)$ 、 $B_R(X_R, Y_R)$ 、 $B'(X_q, Y_q)$ が変化し、得られた $B'(X_q, Y_q)$ を新たな $B(X_q, Y_q)$ の値として格納し、処理が繰り返される。

この手続きを繰り返すことによって、砂山が形成される。

表3 $B(X_q, Y_q)$ 、 $B_R(X_R, Y_R)$ 、 $B'(X_q, Y_q)$ の間の数値例
 $B(X_q, Y_q)=5$

項目	(X_q+1, Y_q)	(X_q+1, Y_q+1)	(X_q, Y_q+1)
B	0	0	0
B_R の表現	右	右下	下
B_R の数値	4	5	6
B'の数値	2	3	3

4. 生成された砂山に関する評価方法

4.1 評価項目

砂山の形状、砂山の崩壊特性ならびに崩壊に関するべき乗法則の観点から提案した砂山生成法の特徴を明らかにする。

砂山の形状については、実際の砂山に近い形状、すなわち円錐形に類似した形状が生成されるか否かを調べる。砂山の崩壊については、実際の砂山の現象では、砂山が成長するにつれて、崩壊の規模が大きくなる。そこで、このような現象が本生成法でも生じるか否かを調べる。べき乗法則については、「崩壊の規模」と「崩壊の頻度」の間で、べき乗法則が成り立つか否かを調べる。

4.2 評価パラメータの定義

砂山の形成の様子を評価するために、図8に示すような評価パラメータを以下に定義する。

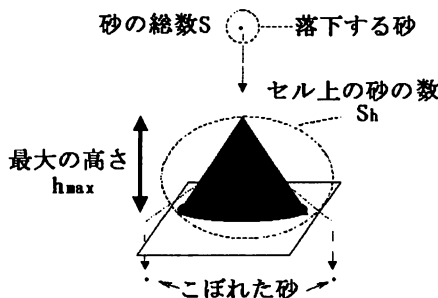


図8 評価パラメータの意味

①砂の総数S

領域内に落とした砂の総数をSで表す。このSは蓄積処理の合計回数に一致する。

②砂の残留数 S_h

砂の総数Sの内、崩壊によって領域からこぼれずに残った砂の数（以下、これを砂の残留数と呼称する）を S_h で表す。

③砂山の最大の高さ h_{max}

領域内での砂の高さ $h(X, Y)$ の最大値を h_{max} で表す。

④領域の寸法M

領域の寸法Mは、砂山を生成するために必要な領域 $M \times M$ の一辺の大きさである。本稿では、 $M=16, 32, 64$ として砂山を生成する。領域の寸法Mを大きくすることにより、砂山の成長過程を詳細に観測できるが、処理時間が長くなる。

⑤誘導崩壊面積 A_s

誘導崩壊面積 A_s とは、一回の崩壊処理により、砂山の高さ $h(x, y)$ が変化したセル数の合計であり、砂山の崩壊の規模を表す。

⑥誘導崩壊面積毎の出現回数 A_{sn}

誘導崩壊面積毎の出現回数 A_{sn} は、砂山の生成過程で測定した誘導崩壊面積 A_s の各値の出現回数である。

⑦崩壊処理の合計回数 A_n

崩壊処理の合計回数 A_n は、砂山の生成過程で実行した崩壊処理の合計回数である。

⑧誘導崩壊頻度 A_p

誘導崩壊頻度 A_p は、崩壊処理の合計回数に対する崩壊が生じた回数の割合であり、誘導崩壊面積毎の出現回数 A_{sn} と、崩壊処理の合計回数 A_n を用い、式(6)で定義する。

$$A_p = A_{sn} / A_n \quad (6)$$

誘導崩壊頻度 A_p は、砂山の崩壊特性のべき乗法則が確認できるか否かを判断するために用いる。

4.3 砂の総数による影響

領域の寸法Mを $M=16$ とし、蓄積点Pを領域の中心に固定する。なお、砂山を生成する前には、領域内に、砂は無いとする。

4.3.1 砂山の形状

得られた砂山の形状を図9(a), (b)、図10(a), (b)、図11(a), (b)に示す。同図には、砂の総数 $S=1000, 10000, 60000$ の場合について、斜めから見た砂山の形状および真上から見た砂山の高さの分布を、表示している。

同図より、斜めから見た砂山の形状は、実際の砂山に類似した形状をしており、また、真上から見た砂山の高さが低くなる部分ほど、砂山の頂点から遠くに分布していることが分かる。更に、砂の総数Sが $S=1000 \sim 10000$ の間において、砂の総数Sが増加するに従って、砂山は成長していることがわかる。しかし、砂の総数Sが $S=10000 \sim 60000$ の間において、砂の総数Sが増加する

に従って、砂山は成長していない。その原因は、砂の量が多くなりすぎると、領域 $M \times M$ から砂がこぼれ落ちるためである。

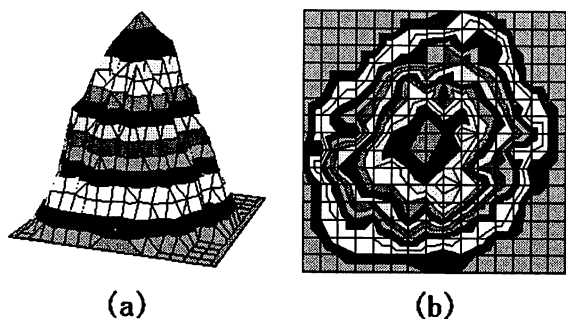


図9 S=1000の場合に得られた砂山の形状

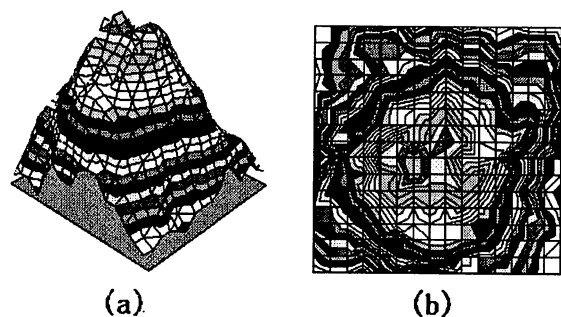


図10 S=10000の場合に得られた砂山の形状

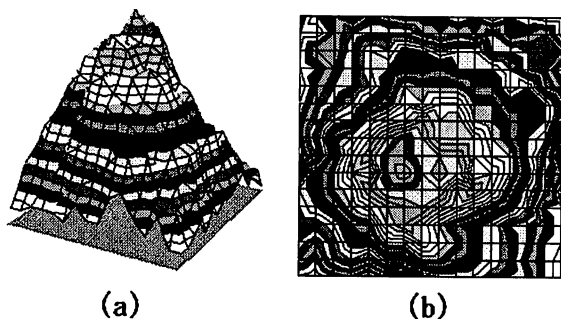


図11 S=60000の場合に得られた砂山の形状

領域内での砂山の最大の高さ h_{max} と砂の総数 S の関係を図12に示す。また、領域内での砂の残留数 S_h と砂の総数 S の関係を図13に示す。

図12と図13の共通点として、砂の総数 S が $S=5000$ 以降では、領域 $M \times M$ から砂がこぼれ落ち、砂山の最大の高さ h_{max} および残留数 S_h が、砂の総数 S に対して、ほとんど変化していないことがわかる。

4.3.2 誘導崩壊面積 A_s

砂の総数 S と誘導崩壊面積 A_s の関係を図14に示す。なお、砂の累積量の最大値を $S=1000$ とした。同図より、種々の規模の誘導崩壊が生じていることがわかる。

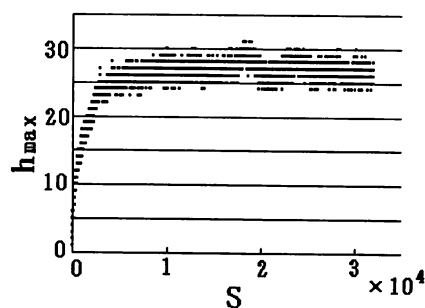


図12 h_{max} と S の関係

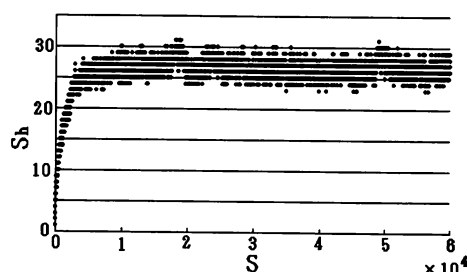


図13 S_h と S の関係

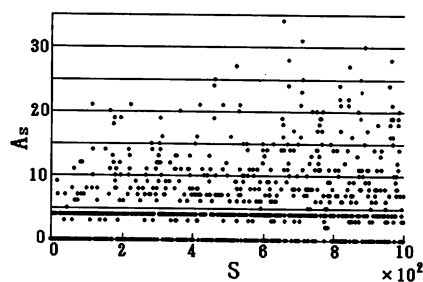


図14 S と A_s の関係

4.3.3 べき乗則

誘導崩壊面積 A_s と誘導崩壊頻度 A_p の関係を両対数表示で図15に示す。誘導崩壊面積 A_s が $A_s=10 \sim 100$ の範囲で、べき乗法則が確認できる。よって、本モデルでは、実際の砂山に近い、崩壊現象を表現出来たといえる。

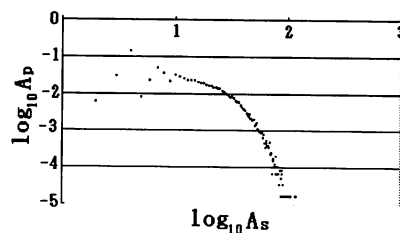


図15 A_s と A_p の関係

4.4 領域の寸法による影響

領域の寸法 M を $M=16, 32, 64$ とし、蓄積点 P を領域の中心に固定する。

4.4.1 砂山の形状

砂の総数 S を $S=60000$ として、得られた形状を図16に示す。領域の寸法 M の値が大きいほど、砂山が成長することがわかる。

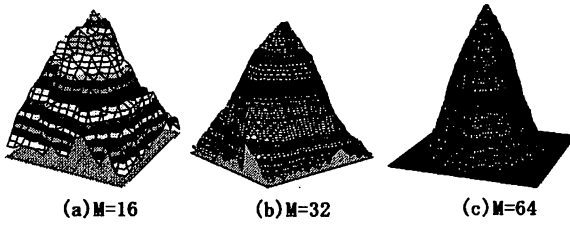


図16 砂山の形状に及ぼす領域の寸法 M の影響

砂の総数 S に対する砂山の最大の高さ h_{max} の推移を図17に、また、砂の残留数 S_h を図18に示す。図17と図18より、領域の寸法 M が小さいと、領域から砂がこぼれ落ちやすくなるために、砂山の最大の高さ h_{max} と砂の残留数 S_h はどちらも制限を受け、一定の値に収束する。その収束する値は、領域の寸法 M の値により決まる。

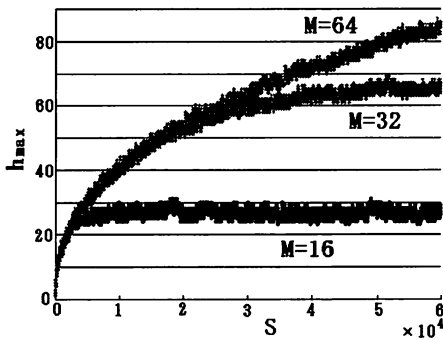


図17 砂山の高さ h_{max} に及ぼす領域の寸法 M の影響

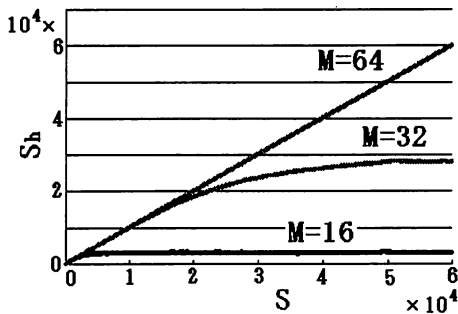


図18 S_h に及ぼす M の影響

4.4.2 べき乗則

誘導崩壊面積 A_s と誘導崩壊頻度 A_p の関係を図19に示すように、両対数のグラフで示す。領域の寸法 M がどのような値においても、誘導崩壊面積 A_s と誘導崩壊頻度 A_p の間に、 $A_s=10\sim 100$ の範囲で、直線関係が見られ、べき乗法則が観測できた。

また、同図では、領域の寸法 M の値が大きいほど、すなわち、領域から砂がこぼれにくくなる程、直線関係が顕著である。この結果より、誘導崩壊面積 A_s と誘導崩壊頻度 A_p の間のべき乗法則は、砂山が成長している場合において、観測されやすいということがわかる。

5. まとめ

本方法で生成された砂山は、正方形のセル領域から、砂がこぼれ出すまでは、砂山の高さは成長し続け、この領域から砂がこぼれ出すと砂山の高さの成長は止まるが、蓄積と崩壊を繰り返しながら、砂山の低い部分ほど、頂点から遠くに分布するという傾向が維持される。

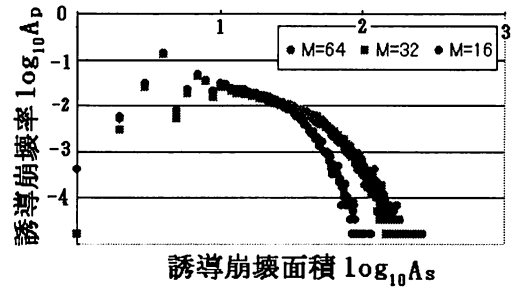


図19 A_s と A_p の関係に及ぼす M の影響

また、正方形のセル領域の大きさの如何に関わらず、砂山の生成過程において、誘導崩壊面積と誘導崩壊頻度の間にべき乗法則が成り立つことが確認された。したがって、本方法では、実際の砂山の生成過程で生じる現象のひとつを実現しているの、本手法は、砂山のシミュレーションに適用できそうである。

本手法では、「高さの差が5以上となるセルで崩壊が生じる」という崩壊条件を用いているので、本手法は粘性のある砂の崩壊モデルに該当すると考えられる。今後、種々の属性の砂を想定し、「高さの差が1~4となるセルで崩壊が生じる」という崩壊条件でも適用できるように、本手法を拡張する必要がある。

参考文献

- 1) Per Bak, Cha Tang, and Kurt Wieseheid: [Self-organized criticality], Physical Review A, 38, 1, pp. 354-374, (1988).
- 2) 伊庭 崇, 福原義久: 複雑系入門, NTT出版, pp. 50-52, (1998).
- 3) 田口義弘: 砂時計の七不思議, 中公新書, (1995)
- 4) 今野紀雄: 確率モデルって何だろう, ダイヤモンド社, (1995)
- 5) 香取真里: 複雑系を解く確率モデル, 講談社, (1997)

Generation method of sand hill

Tsunehito HIGASHI and Akira TAKAMORI*

Department of Information and Computer Engineerng,

Faculty of Engineering,

Okayama University of Science,

Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan

**SOLCOM Co.,Ltd.*

Minamisendahigashi-cho 2-32,Naka-ku,Hiroshima-shi, 730-0054 Japan

(Received November 7, 2003)

The increment of height in the place of accumulating sand is one.

Sand collapses when there is a difference between the height of the sand of the adjacent cell in five or more.

The three directions are chosen as a collapsing direction from among the eight directions.

The decrease in the collapsing place in the height of sand is 3, and the increase in the height of sand in each three directions is 1.

The shape of the sand hill generated with such a rule is a cone. The relation between the collapse area and the collapse frequency follows the power law.