岡山理科大学紀要 第39号 A pp. 7-15 (2003)

多重対角行列のH-行列評価

岩崎義光・須田亮平*・飯田壮一郎*

岡山理科大学総合情報学部情報科学科
*（旧）岡山理科大学理学研究科修士課程応用数学専攻

（2003年11月7日　受理）

1. 緒言

H-行列は，OstrowskiがHadamardに因んで命名した術語である[6]. 彼がH-行列を考えるようになったきっかけは，Minkowskiの仕事[5]にある．Ostrowskiの論文では，すべての主小行列式が正となるZ-行列をM-行列と定義し，さらにH-行列を導入した．彼は別にMinkowski行列，Hadamard行列を定義した．これらの拡張がそれぞれM-行列，H-行列で，その拡張は狭義優対角行列の一般化狭義優対角行列への拡張に相当する．1976年，Varga[7]がJacobi overrelaxation法，SOR法の収束性とH-行列の同値性を，従来の知見をまとめる形で論じ，Berman and Plemmons[2]はM-行列に関する多くの同値な条件を総括した．これはそのまま，H-行列に関する同値な条件として読み替えができる．ここでは，H-行列の理論を整理したのちに問題提起をし，多重対角行列に関する反復法の収束性を論ずる．

2. H-行列の理論

Ostrowskiのつぎの定理がよく知られている(Satz II [6]).

定理1　$\mathscr{H} = \mathscr{G}^+ = \hat{\mathscr{P}}_M$.

ここに，$\mathscr{H}$ はH-行列の全体，$\mathscr{G}^+$ は一般化狭義優対角行列（GSDD行列[1]）の全体の集合で，H-行列はGSDD行列を意味する．$\hat{\mathscr{P}}_M$ は，比較行列の主小行列式がすべて正となる行列全体を表す．$A=\left(a_{ij}\right)$ を n 次複素正方行列とするとき，$M(A)=\left((-1)^{1-\delta_{ij}}\left|a_{ij}\right|\right)$（$\delta_{ij}$：Kroneckerの δ）を A の比較行列と呼ぶ．$M(A)$ はZ-行列（非対角成分非正の行列）である．

定義2　A がH-行列とは，$M(A)$ が単調，すなわち，$M(A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ となる行列をいう．

単調なZ-行列はL-行列（対角成分正のZ-行列）となり，これをM-行列という．A がH-行列とは，その比較行列が単調，したがってM-行列となる行列をいう．単調な行列は，正則で非負成分の逆行列をもつことと同値であるから，

[1] これはAxelsson [1] の術語．Berman and Plemmons [2] はSGDDと呼ぶ．先に一般化してから狭義優対角（SGDD）としようとも，狭義優対角を一般化（GSDD）しようとも同値である．ここでは，語呂の良いGSDDを採用した．

命題3 AがH-行列とは，$M(A)$が正則で$M(A)^{-1} \geq O$と同値である．

ここで，今まであまり省みられなかった幾何学的視点からH-行列を見ると，新たな同値条件に至る．正則行列Aの列ベクトルからなる単体錐（simplex cone）を$\mathrm{V}A$，単位行列をIと記すと，

命題4 A：H-行列$\Leftrightarrow \mathrm{V}I \subset \mathrm{V}M(A)$．

GSDD行列はつぎのように定義され，豊富な幾何学的内容をもつ[4].

定義5 AがGSDD行列とは，$M(A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$なる正ベクトル$\mathbf{x}$が存在することである．

これから，つぎの定理を得る[4].

定理6 $|M(A)| > 0$，$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$のとき，

$$A \in \mathcal{G}^{+} \Leftrightarrow (\mathrm{V}I)^{\circ} \cap (\mathrm{V}M(A))^{\circ} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{1} \in \mathrm{V}M(A) \Leftrightarrow M(A)^{*} \succ O \Leftrightarrow \tau(M(A)) > 0.$$

AがGSDD行列であることと，開単体錐$(\mathrm{V}I)^{\circ}$，$(\mathrm{V}M(A))^{\circ}$が，あるベクトルを共有することとは同値である．これは，比較行列の単体錐が，成分すべて1のベクトル$\mathbf{1}$を含むこととも同値である．$M(A)^{*}$と$\tau(M(A))$は文献[4]に詳しい．とくに，

命題7 $n \leq 3$のとき，AがH-行列であることと$|M(A)| > 0$とが同値である．

$n \geq 4$では，この命題は成り立たない．

さて，以上がH-行列に関する要約であって，すでにH-行列の数学的内容は豊富である．しかし，H-行列の特徴づけをより直接にすべく，つぎの問題提起をする．

問題8 H-行列となるn次複素正方行列を決定せよ．

この問題を同値かつ単純な問題に換言してみる．ここでは，H-行列を扱うから，n次複素正方行列Aは正則としてよい．すなわち，$A \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$．$\forall A, B \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$に対して，関係$\sim$を$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |a_{ij}| = |b_{ij}|$ $(i, j \in N) \Leftrightarrow M(A) = M(B)$と定義する．ここに，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$である．関係$\sim$は同値関係となる．$\mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$をこの同値関係で類別した商集合を$\mathrm{GL}(n; \mathbf{C})/\sim$と表す．$A$の分離を，$A = C - R_C = C(I - C^{-1}R_C)$ $(C \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{C}))$とすると，$H_A = H_A(C) = C^{-1}R_C$が$A$の反復行列である．弱正則分離定理と正則分離定理を合わせたつぎの定理が成り立つ[3].

定理9 $A \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \varnothing \neq \mathcal{R}_{\mathrm{R}}(M(A)) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{WR}}(M(A)) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{CV}}(M(A))$.

とくに，Jacobi法のときは，$C = \mathrm{diag}(A)$と取り，H_AがJacobi行列$J_1(A)$である．スペクトル半径を使って定理9を表せば，

定理10 $A \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \rho(J_1(M(A))) < 1$.

$\rho(J_1(A)) \leq \rho(J_1(M(A)))$であるから，

定理11　$A \in \mathcal{H}$ のとき，$M(B)=M(A) \Rightarrow \rho(J_1(B))<1$.

これより，Bに関するJacobi法は収束する．反復法は逆行列を求める一手法であるから[3]，Bの逆行列がJacobi法から求まり，$\rho(J_1(B))<1$ならばBは正則になる．

系12　$A \in \mathcal{H}$ のとき，$M(B)=M(A)$ ならばBは正則である．

$M(A)$が単調ならばその対角成分は正になり，H-行列Aの対角成分a_{ii}は$a_{ii} \neq 0\ (i \in N)$である．非零対角成分の複素正則行列の全体を$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})^*$とし，L-行列の全体を$\mathcal{L}$と記すと，$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})^* /_{\sim}$ の完全代表系に$\mathcal{L}$をとることができる．定理11から$\mathcal{L}$でJacobi法の収束を論ずればよく，同一の同値類（equimodular set）に属するすべての行列に関するJacobi法の収束は代表元である比較行列の収束で決まる．したがって，$A=M(A)$, $a_{ii}>0\ \ (i \in N)$の場合を考えれば十分である．以後，AはL-行列と仮定すると，H-行列AはM-行列となる．$D_A=\mathrm{diag}(A)$ とし，$D_A^{-1}A$ もM-行列となることから$D_A^{-1}A$ をAと考えると，Aの分離として$A=I-H$と取れ，$\mathrm{diag}(H)=\mathrm{O}$，$H \geq \mathrm{O}$である．したがって，問題8は

問題13　$H \geq \mathrm{O}\ (\mathrm{diag}(H)=\mathrm{O})$ かつ $\rho(H)<1$となる行列Hを決定せよ．

と書き直すことができる．以下では，特別な場合にHを決定し，従来知られている定理と比較する．

3. 3重対角行列

反復法は，熱伝導方程式の2点境界値問題としての離散化から得られる，3重対角行列Aを係数行列とする線形方程式系$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$の解法として重要である．そこで，つぎの場合を扱う．

$$H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathrm{O} \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$a_i \geq 0, b_i \geq 0, a_i b_i = c^2 (i \in N), c \geq 0$とする．$c=0$のとき$\rho(H)=0$であるから，$\rho(H)<1$である．この例は自明な場合であって，以下では$c>0$とする．$H$を$n$次正方行列とし，その特性多項式を$\Psi_n(\lambda)$と記すと，

補題14　$\Psi_n(\lambda)=\lambda\Psi_{n-1}(\lambda)-c^2\Psi_{n-2}(\lambda)$

であるから，$c>0$から$\lambda \neq 2c$がいえ，$D=\lambda^2-4c^2\ (\neq 0)$とおくと，

$$\Psi_n(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{D}}\left\{\left(\frac{\lambda+\sqrt{D}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

特性方程式$\Psi_n(\lambda)=0$のn個の根は，iを虚数単位として，

$$\lambda=\frac{1+e^{ik\omega}}{e^{ik\omega/2}}c=\left(e^{ik\omega/2}+e^{-ik\omega/2}\right)c=2c\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad \left(k=1,2,\cdots,n,\ \omega=\frac{2\pi}{n+1}\right) \tag{3.1}$$

で与えられる．したがって，$\rho(H)=\left|1+e^{i\omega}\right|c$となる．ゆえに，$\rho(H)<1 \Leftrightarrow c<\dfrac{1}{\left|1+e^{i\omega}\right|}$．自明な場合も取り込むと，

命題 15

$$H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathrm{O} \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \left(a_i\geq 0, b_i\geq 0,\ a_ib_i=c^2(i\in N), c\geq 0\right)$$

のとき，

$$\rho(H)<1 \Leftrightarrow 0\leq c<\frac{1}{\left|1+e^{i\omega}\right|}.$$

$c=\dfrac{1}{2}$のときは$\lambda=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$であるから，$\rho(H)=\cos\dfrac{\pi}{n+1}$で既知である[2]．また，$a,b\geq 0$のとき，$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$であり，さらに，$\left|1+e^{i\omega}\right|<2$であるから，

系16 $a_i\geq 0, b_i\geq 0$ $(i\in N)$のとき，$a_i+b_i\leq 1$ $(i\in N)\Rightarrow \rho(H)<1$.
とくに，$a_i=b_i=c$ $(i\in N)$のとき，$0\leq c\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow \rho(H)<1$.

$a_i=b_i=c=\dfrac{1}{2}$ ならば，$\rho(H)<1$ であって，対応するAは一意には決まらないが，整数成分にとれば，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathrm{O} \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathrm{O} & & -1 & 2 \end{pmatrix}$となる．これは，既約弱優対角行列の例としてよく知られる．しかし，既約弱優対角行列は，H-行列であるための十分条件ではあっても必要条件ではない．命題15から容易に既約H-行列ではあるが，弱優対角でない例を作れる．$n=3$とすると，AがH-行列であるための条件が$0\leq c<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$であるから，$c=\dfrac{2}{3}$ $\left(\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$とすれば，弱優対角でない既約H-行列$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$を得る．また，単位行列は可約H-行列であって，弱優対角ではあるものの既約ではない．

4. 定理１１に関する注意

定理11の逆は成り立たない．Aを複素行列とする．$\rho\left(J_1\left(M(A)\right)\right)<1$ならば$\rho\left(J_1(A)\right)<1$であるが，逆はいえない．つまり，$A$に対するJacobi法は収束するのに，$M(A)$に対しては収束しない，したがって，$A$がH-行列でない例がある．

まず，$\rho\left(J_1(A)\right)=\rho\left(J_1\left(M(A)\right)\right)$ の場合，すなわち，定理11の逆が成り立つ例を挙げる．

1） $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$とする．$A$は2次の複素正方行列である．$H=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbf{C})$となり，固有値の絶対値は$|\lambda|=\sqrt{|a||b|}$となるから，$\rho\left(J_1(A)\right)=\rho\left(J_1\left(M(A)\right)\right)$が成り立つ．

2） $H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & O \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ O & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\left(a_i b_i = c^2 (i \in N), a_i, b_i, c \in \mathbf{C}\right)$ の場合，固有値は式（3.1）で与えられるから，$\rho\left(J_1(A)\right)=\rho\left(J_1\left(M(A)\right)\right)=\left|1+e^{i\omega}\right||c|$である．

つぎに，逆の成り立たない例を構成する．上の1），2）から，多重対角行列に例を求めるには，3次以上，5重以上の対角行列でなければならないことが分かる．行列 Hを $H=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{C}, b \neq 0)$ とする．Hの固有値は $\lambda=-b,\ \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2+8a^2}\right)$ であるから，$\mu=\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ とおくと，$|\lambda|=|b|$ または，$|\lambda|=\frac{|b|}{2}\left|1 \pm \sqrt{1+8\mu^2}\right|$であって，

命題17　$H=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{C}, b \neq 0)$ とすると，

$$\rho\left(J_1(A)\right)<1 \Leftrightarrow |b|<\frac{2}{\max\left\{2, \left|1 \pm \sqrt{1+8\mu^2}\right|\right\}} \quad \left(\mu=\frac{a}{b}\right)$$

である．

したがって，$\rho\left(J_1(A)\right)<1 \leq \rho\left(J_1\left(M(A)\right)\right)$，すなわち，

$$\text{(4.1)} \qquad \frac{2}{1+\sqrt{1+8|\mu|^2}} \leq |b| < \frac{2}{\max\left\{2, \left|1 \pm \sqrt{1+8\mu^2}\right|\right\}} \qquad (\mu \neq 0)$$

となるように，$a,\ b$を決めれば所期の行列を得る．ここに$\mu \neq 0$は，$\mu=0$とすると，式（4.1）から$1<1$となり矛盾を生ずるからである．いま，$\mu=\frac{1}{i\sqrt{2}}$ とおくと条件式（4.1）は $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq |b| < 1$ となるので，$b=\frac{i}{\sqrt{2}}$ にとればよく，$a=\frac{1}{2}$ である．したがって，$H=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ となり，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -i\sqrt{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -i\sqrt{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ が定理11の逆の成り立たない例である．

5. 一般3重対角行列のスペクトル半径

既述の3重対角行列に対して，つぎの行列を一般3重対角行列と呼ぶことにする．

$$
H_{n,k}=\begin{array}{l}
\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{0\ \cdots\ 0}}^{k}\end{array}\\
k\left\{\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right.
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & & & \mathrm{O}\\
\vdots & & & & b_2 & & \\
0 & & & & & \ddots & \\
a_1 & & & \mathrm{O} & & & b_{n-k}\\
 & a_2 & & & & & 0\\
 & & \ddots & & & & \vdots\\
\mathrm{O} & & & a_{n-k} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

ここで，a_i，$b_i \geq 0$，$a_ib_i = c^2\ (i \in N)$，$c \geq 0$ とする．ただし，$H_{1,1} = (0)$ とする．第3節の H は $H_{n,1}$ である．

定理18 $n = mk + j\ (1 \leq j \leq k)$ のとき，

1） $\left|\lambda I_n - H_{n,k}\right| = \prod_{i=1}^{j}\left|\lambda I_{m+1} - H_{m+1,1}^{(i)}\right| \cdot \prod_{i=1}^{k-j}\left|\lambda I_m - H_{m,1}^{(i)}\right|\ (1 \leq j \leq k-1)$，$\prod_{i=1}^{k}\left|\lambda I_m - H_{m,1}^{(i)}\right|\ (j = k)$.

2） $\rho\left(H_{n,k}\right) = \left|1 + e^{i\frac{2\pi}{m+2}}\right|c = 2c\cos\frac{\pi}{m+2}\ (1 \leq j \leq k-1)$，$\left|1 + e^{i\frac{2\pi}{m+1}}\right|c = 2c\cos\frac{\pi}{m+1}\ (j = k)$.

1）で，$H_{m+1,1}^{(i)}$，$H_{m,1}^{(i)}$ は

$$
H_{m+1,1}^{(i)} = \begin{pmatrix}
0 & b_i & & & & \mathrm{O}\\
a_i & 0 & b_{k+i} & & & \\
 & a_{k+i} & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & b_{(m-1)k+i}\\
\mathrm{O} & & & & a_{(m-1)k+i} & 0
\end{pmatrix},\quad
H_{m,1}^{(i)} = \begin{pmatrix}
0 & b_{j+i} & & & & \mathrm{O}\\
a_{j+i} & 0 & b_{k+j+i} & & & \\
 & a_{k+j+i} & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & b_{(m-2)k+j+i}\\
\mathrm{O} & & & & a_{(m-2)k+j+i} & 0
\end{pmatrix}
$$

である．

証明 $H_{n,k}$ を隣接行列[2]とするグラフ G を考える．頂点集合 V を $V = \{1,2,\cdots,n\}$ とし，$H_{n,k}$ の (i_1, i_2) 成分を $h_{i_1i_2}$ とするとき，$h_{i_1i_2}$ が0でなければ，2点 i_1 と i_2 を，i_1 から i_2 に向かう向き付き線分で結び，辺と呼ぶことにする．すべての辺の集合を E とし，グラフ G を (V,E) と表す．V の2点が同一向きのいくつかの辺で結ばれるとき，2点は強連結であるという．$c = 0$ の自明な場合，定理の成り立つことは容易に分かるから，$c \neq 0$ とすると，$H_{n,k}$ では，$h_{i_1i_2} \neq 0$ ならば，$a_ib_i \neq 0$ から $h_{i_2i_1} \neq 0$ となるので，辺の向きは省略できる．そこで，強連結は連結と置き換えてもよい．V を連結成分に分けると，$1 \leq i \leq j$ のとき，$\{lk + i \mid l = 0,1,\cdots,m\}$ の j 個の成分が得られ，$j = k$ ならば，連結成分は網羅される．$j < k$ ならば，さらに，$j+1 \leq i \leq k$ なる i に対して，$\{lk + i \mid l = 0,1,\cdots,m-1\}$ の $k-j$ 個の成分が付け加えられる．ただし，頂点集合の2点は l に関して続く番号で表せるとき辺で結ばれるものとする．

連結性を保持して頂点の番号付けを変える V の置換のうち，V をつぎの連結成分に分割する置換が存在す

2 通常，グラフ理論では隣接行列の成分 $h_{i_1i_2}$ が0か1である．ここでは，0か否かを問題とする．非零を1に対応させることで，グラフ理論の隣接行列の意味となる．

る．連結成分を頂点集合で表すと，$1 \le i \le j$ のとき，$\{(i-1)(m+1)+l+1 \mid l=0,1,\cdots,m\}$，$j+1 \le i \le k$ のとき，$\{(i-1)m+j+l+1 \mid l=0,1,\cdots,m-1\}$ である．弧に付随した $h_{i_1 i_2}$ も置換により移るものとする．この置換で移ったグラフは元のグラフと同型になるから，置換後のグラフの隣接行列は，元の隣接行列と相似である（付記）．すなわち，

$$H_{n,k} \sim \left(H_{m+1,1}^{(1)} \oplus H_{m+1,1}^{(2)} \oplus \cdots \oplus H_{m+1,1}^{(j)}\right) \oplus \left(H_{m,1}^{(1)} \oplus H_{m,1}^{(2)} \oplus \cdots \oplus H_{m,1}^{(k-j)}\right). \tag{5.1}$$

ここに，$A \oplus B$ とは，$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ を表す．これで，1）が証明できた．1）と式（3.1）より $\rho(H_{n,k}) = \rho(H_{m+1,1})$ となるので2）が成り立つ．$j=k$ のときは指示のようになる．▮

定理18の特別な場合として，つぎの系を得る．

系19　$a_i = b_i = 1\ (i=1,2,\cdots,n-k)$ のとき，

1）　$|\lambda I_n - H_{n,k}| = |\lambda I_{m+1} - H_{m+1,1}|^j \cdot |\lambda I_m - H_{m,1}|^{k-j}\ (1 \le j \le k-1)$，$|\lambda I_m - H_{m,1}|^k\ (j=k)$.

2）　$\rho(H_{n,k}) = \left|1 + e^{i\frac{2\pi}{m+2}}\right| = 2\cos\dfrac{\pi}{m+2}\ (1 \le j \le k-1)$，$\left|1 + e^{i\frac{2\pi}{m+1}}\right| = 2\cos\dfrac{\pi}{m+1}\ (j=k)$.

上の証明では，同型なグラフの隣接行列は相似であるという性質を使った．置換を具体的に与えると，(5.1) を直接示すことができる．証明中の置換を σ とすると，

$$\sigma(lk+i) = \begin{cases} (i-1)(m+1)+l+1 & (1 \le i \le j) \\ (i-1)m+j+l+1 & (j+1 \le i \le k) \end{cases}$$

であり，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \cdots & mk+1 & 2 & k+2 & \cdots & mk+2 & \cdots & j & k+j & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & m+1 & m+2 & m+3 & \cdots & 2(m+1) & \cdots & (j-1)(m+1)+1 & (j-1)(m+1)+2 & \cdots \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} mk+j & j+1 & k+j+1 & \cdots & (m-1)k+j+1 & j+2 & k+j+2 & \cdots \\ j(m+1) & jm+j+1 & jm+j+2 & \cdots & (j+1)m+j & (j+1)m+j+1 & (j+1)m+j+2 & \cdots \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (m-1)k+j+2 & \cdots & k & 2k & \cdots & mk \\ (j+2)m+j & \cdots & (k-1)m+j+1 & (k-1)m+j+2 & \cdots & km+j \end{matrix}\right)$$

である．置換 σ に対する置換行列を P とする．$P = (P_{\mu\nu})$ とおけば，小行列 $P_{\mu\nu}$ は，$1 \le \mu \le m$ のとき，$1 \le \nu \le j$ では $(k, m+1)$ 型行列，$j+1 \le \nu \le k$ では (k, m) 型行列である．$\mu = m+1$ のときは，$P_{\mu\nu}$ は $1 \le \nu \le j$ で $(j, m+1)$ 型行列，$j+1 \le \nu \le k$ で (j, m) 型零行列である．$\mu = m+1$，$j+1 \le \nu \le k$ の場合の零行列を除き，$P_{\mu\nu}$ は $P_{\mu\nu} = \left(p_{ij}^{(\mu\nu)}\right)$，$p_{ij}^{(\mu\nu)} = \delta_{i\nu}\delta_{j\mu}$ と表せる．これより容易に

$$P^{-1}H_{n,k}P = \left(H_{m+1,1}^{(1)} \oplus H_{m+1,1}^{(2)} \oplus \cdots \oplus H_{m+1,1}^{(j)}\right) \oplus \left(H_{m,1}^{(1)} \oplus H_{m,1}^{(2)} \oplus \cdots \oplus H_{m,1}^{(k-j)}\right)$$

が導ける．

6. まとめ

本論より以下の知見を得た．

1）弱優対角でない既約H-行列の例を3重対角対称行列で与えた．

2）Jacobi法の収束する，H-行列でない例を3次の5重対角対称行列，すなわち，3次の対称行列で与えた．

3）n次の一般3重対角行列は，$n = mk + j \ (1 \le j \le k)$とすると，$k$個の3重対角行列を対角ブロックとする可約対角ブロック行列に相似である．これより，一般3重対角行列のスペクトル半径が求まった．

付記　同型なグラフの隣接行列は相似になることを示す．2つの有限有向グラフG_1，G_2が同型であるとは，G_1からG_2への全単射fが存在して，$ij \in E(G_1) \Leftrightarrow f(i)f(j) \in E(G_2)$となることである．ここに，$E(G_i)$は$G_i$の辺の集合で，2点$i$と$j$を結ぶ辺を$ij$と表し，辺の向きは$i$から$j$への向きとする．$G_i$の頂点集合を$V(G_i)$とすると，$V(G_1) = V(G_2)$のとき，全単射$f$は置換である．いま，置換を$\sigma$，その置換行列を$P_\sigma$，グラフ$G_i$の隣接行列を$A_i = \left(a_{jk}^{(i)}\right)$とするとき，$P_\sigma^{-1} A_1 P_\sigma = A_2$が成り立つことをいえばよい．$A_2$の$(j,k)$成分が$a_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)}^{(1)}$であるから，$P_\sigma^{-1} A_1 P_\sigma$の$(j,k)$成分が$a_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)}^{(1)}$となることをいえばよいことになる．置換行列を行列$A$の左から掛けると$A$の行の入れ換えであり，右から掛けると列の入れ換えとなるので，$\left(P_\sigma^{-1} A_1\right)_{jl} = \left({}^t P_\sigma A_1\right)_{jl} = \left(a_{\sigma^{-1}(j)l}^{(1)}\right)$，さらに，$\left(\left(P_\sigma^{-1} A_1\right) P_\sigma\right)_{jk} = \left(a_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)}^{(1)}\right)$となり，$P_\sigma^{-1} A_1 P_\sigma = A_2$がいえる．

参考文献

[1] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Cambridge Univ. Press, New York, (1994).

[2] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, siam, PA, (1994).

[3] Y. Iwasaki, Heritage of original matrix from its preconditioner in the convergent splitting, *RIMS Report*, **1084**, 87-102 (1999).

[4] Y. Iwasaki, Geometrical aspect of generalized strictly diagonal dominance, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, **5**, 135-154 (2002).

[5] H. Minkowski, Zur Theorie der Einkerten in den algebraischen Zahlkörper, *Nachr. K. Ges. Wiss. Gött., Math. Phys. Klasse*, 90-93 (1900).

[6] A. Ostrowski, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, *Comment. Math. Helv.*, **10**, 69-96 (1937).

[7] R. S. Varga, On recurring theorems on diagonal dominance, *Lin. Alg. Appl.*, **13**, 1-9 (1976).

Discussion on the H-matrix for multiple diagonal matrices

Yoshimitsu IWASAKI, Ryohei SUDA* and Soichiro IIDA*

Department of Mathematical Information Science, Faculty of Informatics
** Lately Graduate School of Science,*
Okayama University of Science
1-1 Ridai-cho, Okayama 700-0005, Japan
(Received November 7, 2003)

Abstract. A brief H-matrix theory is described. An irreducible H-matrix with the property of non weakly diagonal dominance is given in the form of tridiagonal matrix. A non H-matrix whose Jacobi iteration converges is derived as a quindiagonal symmetric matrix. A general tridiagonal matrix is defined and it is shown that the general tridiagonal matrix of order n is similar to a reducible block-diagonal matrix with k blocks of a tridiagonal matrix for $n = mk + j$ $(1 \le j \le k)$. The spectral radius of a generalized tridiagonal matrix is derived.