岡山理科大学紀要 第39号 A pp. 1-4 (2003)

# Cone に値を持つ Subordinator

谷田　花子・竹中　茂夫*
岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻
*岡山理科大学応用数学科

(2003年11月7日　受理)

## 1 序論

$Y(t),\ t \in \mathbf{R}_+$, を定常な独立増分を持つ対称安定過程、$X(t),\ t \in \mathbf{R}_+$, を正値定常独立増分を持ち $Y(t)$ と独立な確率過程（subordinator と呼ばれる）とするとき、subordination（従属操作）とは、$X(t)$ を、ランダムな時間と考え、$Y(t)$ の時間変更 $Z(t) = Y(X(t))$ を考えることである。

この小論では、従属操作の一般化を考える第一歩として、多次元の subordinator の特徴付けを考えていく。まず1次元の subordinator $X$ は、

(1) その増分 $X(t) - X(s)$ が、正すなわち、時間としての特性の1つ、正の方向を未来と見なした方向付けを与えており、
(2) また任意の有限個の時点 $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ に対し $X(t_1) - X(t_0), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ が独立である。特に1つの時点を固定してそれを現在と見なすと、現在に対して過去と未来が独立となる。
(3) 更に時点に対して $X(s+t) - X(s)$ の分布が $s$ によらない、すなわち時間進行の一様性をもっている。

多次元の時間を考えるために、方向を定義しよう。まず、$\mathbf{V}$ を $\mathbf{R}^n$ における cone（凸錘）とし、$\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ であるとき、点 $\mathbf{x}$ は、$\mathbf{y}$ に対して未来にあると定義しよう。もちろんこれは、$\mathbf{R}^n$ に半順序を定義する。この意味で、$\mathbf{V}$ を未来錘 (future cone)、$-\mathbf{V}$ を過去錘 (past cone) と呼んでおこう。

曲線 $L = \{\ell(t); t \in \mathbf{R}_+\}$ でその上の任意の点 $l(t)$ で $\{l(s); s \geq t\} \subset l(t) + \mathbf{V}$ を満たすようなものを考える。　この性質は、曲線 $L$ 上の任意の点を止めると、そこから先は総て未来錘に属し、逆にそこまでは過去錘に属することを示す。そこで、このような方向性を持つ曲線を時間的曲線 (time like curves) と呼ぶことにする。

$\mathbf{R}^n$ に値を持つ、確率過程で、

(1) サンプルパスが時間的曲線となり、
(2) 独立な増分を持ち、
(3) その増分が、一様である

ようなもの、すなわちランダムな多次元の時間と見なしうる確率過程を多次元 subordinator と呼ぼう。

この小論では、多次元 subordinator が、特性関数のスペクトル表現で決定づけられることを示す。(Theorem 4.1.).

## 2 安定型 random vector と subordination

まず安定型分布に従う random vector の定義とその特性関数を示し、一次元における従属操作 (subordination) を述べておく。

### 2.1 安定型 random vector

**Definition 2.1** *random vector* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbf{R^d}$ が指数 $\alpha, 0 < \alpha \leq 2$ の、安定型 *random vector* であるとは任意の整数 n に対して、

$$\mathbf{X_1} + \cdots + \mathbf{X_n} \stackrel{\mathbf{d}}{=} n^{1/\alpha}\mathbf{X} + \mathbf{D},\ \exists \mathbf{D} \in \mathbf{R^d},$$

が成立することである。ここで $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$ は $\mathbf{X}$ の独立なコピー、更に $\stackrel{d}{=}$ は分布の意味で等しいことを示す。

### 2.2 安定型 ramdom vector の特性関数

**Property 2.1** 指数 $\alpha, 0 < \alpha < 2$ の安定型 *random vector* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbf{R^d}$ の特性関数 $\Phi(\vec{\theta}) = E[\exp i(\vec{\theta}, \mathbf{X})], \vec{\theta} \in \mathbf{R^d}$, は、

(1) $\alpha \neq 1$ なら

$$\Phi(\vec{\theta}) = \exp\{-\int_{S^{d-1}} |(\vec{\theta}, s)|^\alpha (1 - i\mathrm{sign}(\vec{\theta}, s) \tan\tfrac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds) + i(\vec{\theta}, \mu^0)\},$$

(2) $\alpha = 1$ なら $\Phi(\vec{\theta})$
$$= \exp\{-\int_{S^{d-1}} |(\vec{\theta}, s)|(1 + i\tfrac{2}{\pi}\mathrm{sign}(\vec{\theta}, s) \ln|(\vec{\theta}, s)|)\Gamma(ds) + i(\vec{\theta}, \mu^0)\},$$

となる。ここで $S^{d-1}$ 上の測度 $\Gamma$ は $d$ 次元安定分布と 1 対 1 に対応し*"spectral measure"*と呼ばれる。

### 2.3 従属操作 (subordination)

**Definition 2.2** $Y(t) \in \mathbf{R}^1$ が <u>対称安定過程</u> であるとは、$Y(t)$ と $-Y(t)$ が同分布である安定過程を言う。その特性関数は以下の様に表せる。

$$E \exp i\theta X = \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\}, \ \sigma > 0.$$

**Definition 2.3** $X(t) \in \mathbf{R}^1$ が <u>*subordinator*</u> であるとは、安定型指数 $\alpha$ が $0 < \alpha < 1$ の範囲の正値安定過程のことである。*(c.f.* **4.1).**

subordinator は値域が $[0, +\infty)$ となる。また、無限自己分解可能である。すなわち任意の n に対して $X \stackrel{d}{=} \frac{1}{n^\alpha}(X_1 + \cdots + X_n)$ が成り立つ。ここで $X_1, \ldots, X_n$ は $X$ の独立なコピーである。更に増分が独立で時間に関して定常である。つまり subordinator は正値定常独立増分過程である。(c.f. [3]).

**Theorem 2.1** $Y(t) \in \mathbf{R}^1$ を安定型指数 $\beta$、$0 < \beta \le 2$、を持つ対称安定過程、$X(t) \in \mathbf{R}^1$ を $Y(t)$ と独立な安定型指数 $\alpha$ を持つ ***subordinator*** とする。この時 $Z(t) = Y(X(t))$ は安定型指数 $\alpha\beta$ の対称安定過程になる。(c.f. [3]).

上記のように、時間のランダム化 $Z(t) = Y(X(t))$ を考える操作を <u>従属操作 (subordination)</u> と呼ぶ。

## 3 凸錘 (convex cones) と時間的曲線 (time like curves)

$\mathbf{R^n}$ に cone $V$ による半順序を考え、それに対応させて時間的曲線 (time like curves) を導入する。

### 3.1 凸錘 (convex cones)

**Definition 3.1** $\mathbf{R}^d$ の閉部分集合 $\mathbf{V}$ が <u>凸錘 *(convex cone)*</u> であるとは：

(1) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v_0} \cdot \mathbf{v} \ge \mathbf{0}$, *for a fixed* $\mathbf{v_0}$.

(2) $\mathbf{V}$ は凸集合、即ち任意の $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbf{V}$, $\forall$c, $0 \le$ c $\le 1$ に対して $c\mathbf{v_1} + (1-\mathrm{c})\mathbf{v_2} \in \mathbf{V}$.

(3) 任意の $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, と任意の正数 d に対して、$d \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

を充たすことである。

### 3.2 時間的曲線 (time like curve)

**Definition 3.2** $\mathbf{V}$ を凸錘とする。この時曲線 $L = \{l(t); t \in \mathbf{R}_+\} \subset \mathbf{V}$ で、その上の任意の点 $l(t)$ において $\{l(s); s \ge t\} \subset l(t) + \mathbf{V}$ を充たす時、<u>時間的曲線 *(time like curve)*</u> と呼ぶ。更に曲線 $L$ は $\{l(s); s \le t\} \subset l(t) - \mathbf{V}$ も満たす。

時間的曲線 (time like curves) と呼ぶ理由は、$\mathbf{V}$ を未来と考えれば時間的曲線 (time like curves)$L$ は、曲線上のどの点をとっても、前方は未来に属し、逆に後方は過去に属するからである。

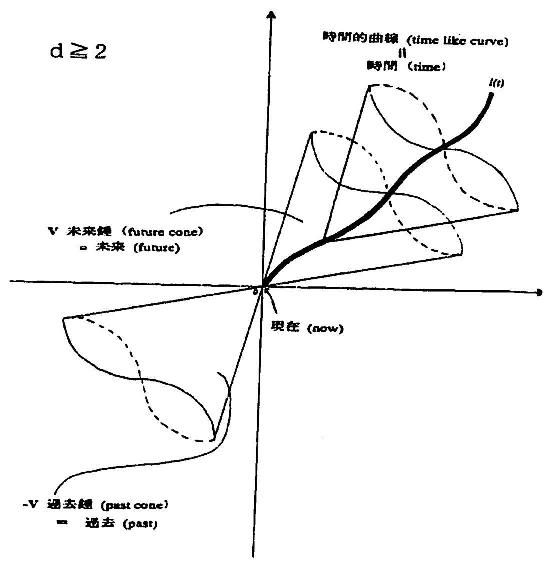


図 1　Cone と Time Like Curve

## 4 多次元 subordinator

まず 3 次元の例について考え、一般の場合に拡張する。

### 4.1 1 次元の subordinator

指数 $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, の正値安定型確率変数 $X$ (subordinator) の特性関数は以下で示される。

$$E \exp i\theta X = \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})\}.$$

subordinator $X$ の値域が、$[0, +\infty)$ であることを思い出しておこう。

### 4.2 3次元の例

**Example 4.1** ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathbf{R}^3$ が $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_k \geq 0,\ \exists \mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^3$ を満たすとする。次に *random vector* $\mathbf{X} = \mathbf{a}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{X}_3 + \mathbf{a}_4\mathbf{X}_4$ を考える。ここで $X_1, X_2, X_3, X_4$ は, 強度 $\sigma = 1$ の *subordinator* $X$ の独立なコピーとする。$\mathbf{X}$ の特性関数を次に示す。

$$E\exp i\theta X = \exp\{-|\theta|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})\}.$$

$\mathbf{X}$ の値域は次の様である。

$V = V(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\})$

$= \{p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + p_3\mathbf{a}_3 + p_4\mathbf{a}_4; p_i \geq 0\}$. これを、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ で張られる凸錘と呼ぶ。

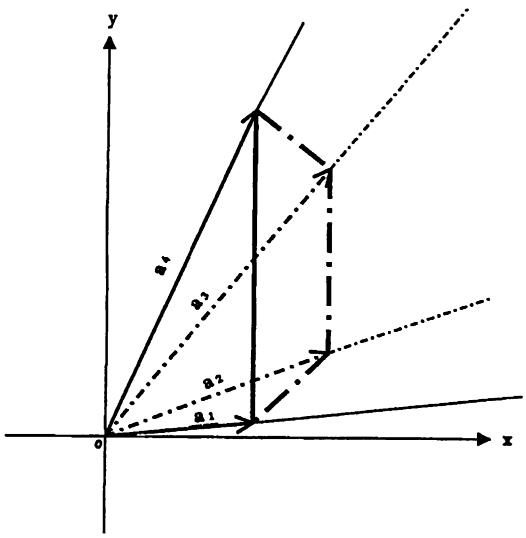


図2 多角錘

*random vector* $\mathbf{X}$ の特性関数は次式で表せる。

$\Phi(\vec{\theta})$

$= \exp\{-\int_{D_4 \subset S^2}|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_3 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4|^\alpha$
$(1 - i\mathrm{sign}(\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2 + \ldots + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4)\tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds)\}$,

ここで、$D_4 = \{\mathbf{s}_k = \frac{\mathbf{a}_k}{|\mathbf{a}_k|}; k = 1,2,3,4\} \subset S^2$, $\Gamma(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} |\mathbf{a}_\mathbf{k}|^\alpha \delta_{\mathbf{s}_\mathbf{k}}(\mathbf{s})$ である。

(証明)

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{\theta}) &= E[\exp i(\vec{\theta}, \mathbf{X})] \\
&= E[\exp i(\vec{\theta}, (\mathbf{a}_1X_1 + \mathbf{a}_2X_2 + \mathbf{a}_3X_3 + \mathbf{a}_4X_4))] \\
&= E[\exp i(\vec{\theta}, \mathbf{a}_1)X_1]\cdot E[\exp i(\vec{\theta}, \mathbf{a}_2)X_2]\times \\
&\qquad E[\exp i(\vec{\theta}, a_3)X_3]\cdot E[\exp i(\vec{\theta}, \mathbf{a}_4)X_4] \\
&= \exp\{-|(\vec{\theta}, \mathbf{a}_1)|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_1))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}\}\times \\
&\quad \exp\{-|(\vec{\theta}, \mathbf{a}_2)|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_2))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}\}\times \\
&\quad \exp\{-|(\vec{\theta}, \mathbf{a}_3)|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_3))\ \tan\tfrac{\pi\alpha}{2})\}\times \\
&\qquad \exp\{-|(\vec{\theta}, \mathbf{a}_4)|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_4))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})\} \\
&= \exp\{-|\tfrac{(\vec{\theta}, \mathbf{a}_1)}{|\mathbf{a}_1|}|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_1))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})|\mathbf{a}_1|^\alpha\}\times \\
&\quad \exp\{-|\tfrac{(\vec{\theta}, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_2|}|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_2))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})|\mathbf{a}_2|^\alpha\}\times \\
&\quad \exp\{-|\tfrac{(\vec{\theta}, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_3|}|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_3))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})|\mathbf{a}_3|^\alpha\}\times \\
&\qquad \exp\{-|\tfrac{(\vec{\theta}, \mathbf{a}_4)}{|\mathbf{a}_4|}|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{a}_4))\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})|\mathbf{a}_4|^\alpha\} \\
&= \exp\{-|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1|^\alpha(1 - i\mathrm{sign}\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1)\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}|\mathbf{a}_1|^\alpha\}\times \\
&\quad \exp\{-|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign})\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2)\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}|\mathbf{a}_2|^\alpha\}\times \\
&\quad \exp\{-|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_3|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_3)\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}|\mathbf{a}_3|^\alpha\}\times \\
&\qquad \exp\{-|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4|^\alpha(1 - i(\mathrm{sign}\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4)\tan\tfrac{\pi\alpha}{2}|\mathbf{a}_4|^\alpha\} \\
&= \exp\{-\textstyle\int_{D_4\subset S^2}|\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_3 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4|^\alpha\times \\
&\quad (1 - i\mathrm{sign}(\vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_1 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_2 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_3 + \vec{\theta}\cdot\mathbf{s}_4)\tan\tfrac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds)\}.
\end{aligned}$$

(証明終わり)

明らかに $V(D_4) = V(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\})$ である

### 4.3 一般の subordinator とそのの特性関数

**Proposition 4.1** $V \subset \mathbf{R}^d$ を凸錘とし、$V \cap S^{d-1} = D$, とする。$\mathbf{s} \in \mathbf{D}$ に対して、正値の関数 $\rho(\mathbf{s}) \geq \mathbf{0}$ と $X$ の独立なコピー $X_\mathbf{s}$ を用意する。*random vector*

$$\mathbf{X} = \int_{D\subset S^{d-1}} \rho(\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}\,X_\mathbf{s}ds$$

の特性関数は次式で表される。

$\Phi(\vec{\theta})$

$$= \exp\{-\int_{D\subset S^{d-1}}|(\vec{\theta}, \mathbf{s})|^\alpha(1 - i\mathrm{sign}(\vec{\theta}, \mathbf{s})\tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds)\}.$$

$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^d$ は無限自己分解可能である。すなわち任意の n に対して

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \frac{1}{n^\alpha}(\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n)$$

が成り立つ。ここで $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ は $\mathbf{X}$ の独立なコピーである。そこで $\mathbf{X}$ を $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ となるような加法過程 $\mathbf{X}_t$ を考えることが出来る。$\mathbf{X}_t$ は増分が $V$ に入るような定常かつ独立な増分を持つ確率過程と出来る。よってそのサンプルパスは時間的曲線 (time like curve) になる。このような $\mathbf{X}_t$ を $d$ 次元の subordinator と呼ぶ。時間的曲線 (time like curve) を多次元の時間に対応すると考えると、$d$ 次元の subordinator はランダムな多次元の時間である。まとめると、

**Theorem 4.1** $V \subset \mathbf{R}^d$ を凸錘とする。$\mathbf{X}_t$ を $V$ による半順序に対応した *subordinator* とすると、その特性関数は次のようである。

$$\Phi(\vec{\theta}) =$$
$$= \exp\{-t\int_{D\subset S^{d-1}} |(\vec{\theta},\mathbf{s})|^{\alpha}(1-i\mathrm{sign}(\vec{\theta},\mathbf{s})\tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds)\}.$$

ここで $V\cap S^{d-1}=D$。逆もまた成立する。

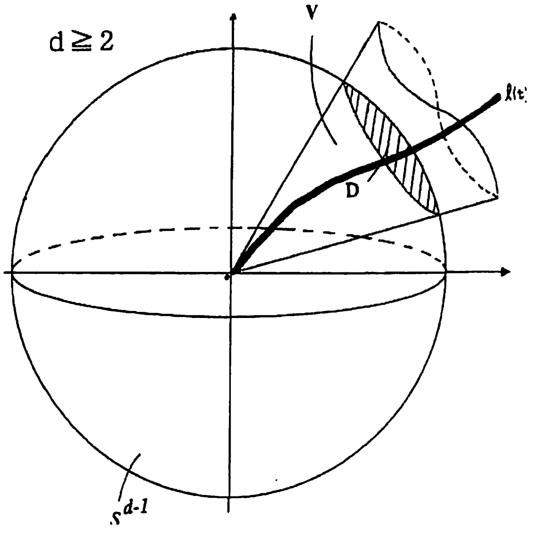


図 3 多次元の subordinator

## 5 最後に

この論文は、第一著者の修士論文主要結果をまとめたものである。修士課程での研究は、指導教授でもある第二著者の最近の結果「コーンをパラメータに持つ加法過程」の時間パラメータのランダムな変換の候補としての、「コーンに値を持つ」ランダムな時間 (subordinator) を決定したものであり、当初はこの２つを合わせて、subordination の多次元化をめざしていた。 残念ながら、時間切れで完成できなかったが、(概念が定義されたばかりであるという幸運もあったが) 内容はオリジナルなものであり、充分発表に耐えるものである。実際、この内容は第一著者自身により統計数理研究所、スタインハウス研究所及びジェノラグーラ大学 (ポーランド) での、安定過程の専門家向きの研究会でオリジナルな論文として発表された。目標としていた subordination は、後ほど時間をとって完成させ発表するつもりである。(第 2 著者、竹中)

## 参考文献

[1] Samorodnitsky, G and Taqqu, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes,* Chapman & Hall, New York (1994).

[2] Takenaka, S, *Linearly additive random fields with independent increments on time-like curves (2001).* 7pages accepted by Probability and Mathematical Statistics.

[3] 佐藤 健一. 加法過程, 紀伊国屋書店 (1990).

# On Cone valued subordinators

Hanako Tanida and Shigeo Takenaka *

*Graduate school of Science*

** Department of Applied Mathematics, Facalty of Science*

*Okayama University of Science*

*Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan*

(Received November 7, 2003)

Let $V$ be a convex cone in $\mathbf{R}^n$. A curve $L=\{\ell(t); t\in\mathbf{R}_+\}$ is called a time-like curve if $\{\ell(s); s\geq t\}\subset \ell(t)+V$ holds for any $t$. We consider additive processes $Y(t),\ t\geq 0$ valued in the set of time-like curves and call them the multi-dimensional sub-ordinators. In this short note, we give a characterization of these processes by their spectral measures.