岡山理科大学紀要　第 37 号 A pp.15-21 (2001)

Set-Indexed Process に関連する話題

竹中　茂夫
岡山理科大学応用数学科

1　linearly additive processes and multi-parameter additive processes

最近、多次元パラメータのサブオーディネーションに関する佐藤健一氏達の研究において、Chentsov 型の安定過程が使われているので、関連する話題を整理しておきたい。射影幾何の言葉を使うと見通しがよいのでそれを用いる。必要な射影幾何の記号、簡単な結果については最後にまとめる。以下簡単のために、ある α, $0 < \alpha < 2$ が存在して、考える確率変数は総てパラメータ α の対称安定型であると仮定しておく。

1.1　定義

Definition 1.1 (linearly additive processes) $\mathbf{R}^n$*-parameter* の確率過程 $\{X(\mathbf{t}); t \in \mathbf{R}^n\}$ が linearly additive(線形加法的) であるとは、$\mathbf{R}^n$ の任意の直線上にパラメータを制限した時、加法過程になる時をいう。即ち、直線を $\{s\mathbf{v} + \mathbf{v_0}\}$ とすると、この上に制限された確率過程 $Z(s) \equiv X(s\mathbf{v} + \mathbf{v_0})$ が独立増分である場合を言う。

Theorem 1.1 T.Mori[92] $\{X(\mathbf{t})\}$ を $\mathbf{R}^n$ パラメータの *linearly additive process* とする。この時、$\mathbf{R}^n$ の超平面全体の作る集合（射影幾何学的には、$\mathbf{R}^n$ + 無限遠超平面 と見なせる*)* に測度 μ が一意的に存在し、

$$X(\mathbf{t}) = Y(S(\mathbf{t}))$$

と書ける。　ここで、$S(\mathbf{t})$ は $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{t}^*$ の原点を含まない連結成分であり、$\{Y(B); B$ は $\mathbf{R}^n$の可測集合 $\}$ は、測度空間 $(\mathbf{R}^n, \mu)$ をコントロール測度とする *SαS-random measure* である。この測度を $\{X\}$ に対応する *Chentsov-Mori* 測度と呼ぶ。($\mathbf{t}^*$ は、点 $\mathbf{t}$ の射影双対。4 節参照*)*

等方的、即ち Euclid 運動群に対して不変な linearly additive process は、Lévy motion と呼ばれるが、上の定理による対応する Chentsov-Mori 測度 $d\mu(\mathbf{t})$ は、超平面の作る空間への運動群の作用下での不変測度 $d\mathrm{Ch}(\mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|^{n+1}}$ でなければならないことがわかる。これより，Lévy motion に対する Chentsov 表現が出る。(S. Takenaka 87)

Definition 1.2 (multi-parameter additive processes, by T.Sato '00) $\mathbf{R}^n_+$*-parameter* の確率過程 $\{X(\mathbf{t}); t \in \mathbf{R}^n\}$ が *additive process* であるとは、

(1) 任意の $\mathbf{s}_1 \preceq \mathbf{s}_2 \preceq \cdots \preceq \mathbf{s}_m$ を満たす点、ただし $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \preceq \mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 即ち $u_1 \le t_1, u_2 \le t_2, \cdots, u_n \le t_n$, に対して、$X(\mathbf{s}_2) - X(\mathbf{s}_1), X(\mathbf{s}_3) - X(\mathbf{s}_2), \cdots, X(\mathbf{s}_n) - X(\mathbf{s}_{n-1})$ が独立な系を作る。
(2) $\mathbf{s}_1 \preceq \mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3 \preceq \mathbf{s}_4$ で $\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_4 - \mathbf{s}_3$ を満たすなら、$X(\mathbf{s}_2) - X(\mathbf{s}_1)$ と $X(\mathbf{s}_4) - X(\mathbf{s}_3)$ は同じ確率法則に従う。
(3) $X(\mathbf{0}) = 0,\ a.s.$
(4) $X(\mathbf{s})$ は順序 $\preceq$ に対して、右連続でかつ左極限を持つ。

佐藤氏による例を挙げると、

- $Z_1(t), Z_2(t), \cdots, Z_n(t)$ を独立な $\mathbf{R}^1$ パラメータの Lévy processes とする。 この時 $V(\mathbf{s}) = Z_1(s_1) + Z_2(s_2) + \cdots + Z(s_n)$ は $\mathbf{R}^n_+$ パラメータの Lévy process である。
- Z を $\mathbf{R}^1$ パラメータの Lévy process, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n_+$ を1つ決める。すると、$U(\mathbf{s}) = Z(a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n)$ も Lévy process となる。

ちなみに、Lévy motion は Lévy process とはならない（次ページの図の増分部分にあたる斜線部分の共通部分が空集合とならないことより明らか）。

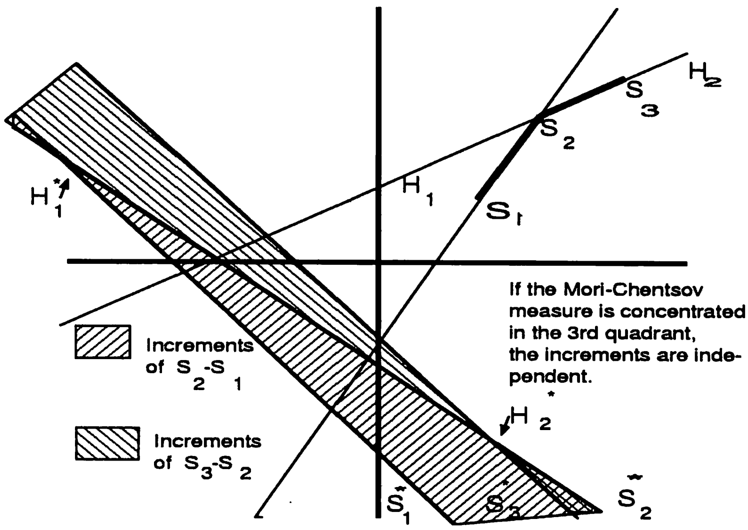

図 1: Chentsov 表現すると、独立増分性は一目瞭然

1.2 例 V, U の Chentsov-Mori 表現

図1より明らかなように、Chentsov-Mori 測度 μ の台が第3象限 ($\mathbf{R}^n_-$) に限られるならば、それに対する linearly additive process は multi-parameter additive process の条件から、2 を除いた条件を満たす。 実際、V はその Chentsov-Mori 測度 μ が各座標軸の負の部分に集中したものであり、U には平行な超平面群 $\{H_t = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = t,\ t > 0\}$ の双対点の作る半直線 $\ell = \{\mathbf{u} = -(a_1/t, a_2/t, \cdots, a_n/t); t > 0\}$ 上に集中した測度が対応している。

さて、最後の節で見るように Chentsov 測度 $d\mathrm{Ch}$ は、Euclid 運動群（の双対作用）による不変性で特徴づけられる。 一方、multi-parameter additive process は、平行移動に関する不変性 2 は仮定されているが、回転に関する不変性は仮定されていない。平行移動（その双対変換）で不変な Chentsov-Mori 測度は、$d\mu(\underline{\mathbf{x}}_0) = \Phi(\frac{\underline{\mathbf{x}}_0}{|\underline{\mathbf{x}}_0|}) \cdot \frac{d\underline{\mathbf{x}}_0}{|\underline{\mathbf{x}}_0|^{n+1}}$, と極分解される ($\underline{\mathbf{x}}_0$ は、$\mathbf{P}^n$ の原点の周りの局所座標)。結局、

Theorem 1.2 $\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n\}$ を *linearly additive* な *Lévy process* とする。 この時、$S^{n-1} \cap \mathbf{R}^n_-$ に集中した密度 Φ が存在し、$\{X\}$ は

$$X(\mathbf{t}) = Y(S(\mathbf{t}))$$

という *Chentsov* 型の表現を持つ。ここで、対応する *Chentson-Mori* 測度は、$\Phi(\frac{\underline{\mathbf{x}}_0}{|\underline{\mathbf{x}}_0|}) \cdot \frac{d\underline{\mathbf{x}}_0}{|\underline{\mathbf{x}}_0|^{n+1}}$ である。

2 Chentsov 型確率過程の決定性

2.1 平面の直線による分割

まず2次元で考えよう。以下の議論は下図から直感的に理解されよう。

2次元空間内に一般の位置にある k 本の直線を考え、これによる分割数を $P(2;k)$ としよう。まず k 本の直線を考えておく。 これによる分割数は $P(2;k)$. ここで、新しく $k+1$ 本めの直線を一般の位置に置く

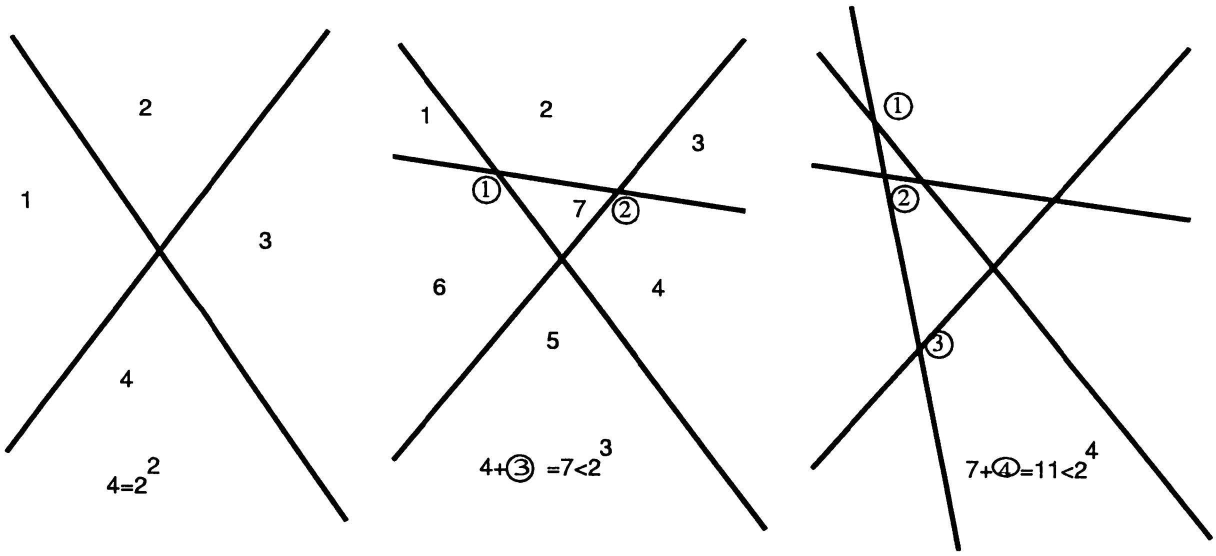

図 2: 直線による平面の分割

とすると、この直線と以前からある k 本の直線との交点は k 個。この k 個の点により最後の直線は $k+1$ 個の部分にわかれ、それぞれの部分が以前の空間のある分割を２つにわけるので、新しく $k+1$ 個の分割が加わる。　従って、漸化式

$$P(2;k+1) = P(2;k) + (k+1),\ P(2;2) = 4$$

が成り立つ。　これを解いて

$$P(2,k) = \frac{k^2+k+2}{2}.$$

2.2　次元に関する漸化式

同様に、n-次元空間に k 個の超平面を一般の位置に置いた時の分割数を $P(n;k)$ とおく。２次元の場合と同じように、n-次元空間内に k 個の超平面を考えておく。これに新しく $k+1$ 個目の超平面を加えよう。この超平面 ($n-1$-次元である) が他の k 個の面で分割される様子を考えると、それは $P(n-1;k)$ 個である。２次元の場合と同じようにして、漸化式

$$P(n;k+1) = P(n;k) + P(n-1;k),\ P(2;k) = \frac{k^2+k+2}{2}.$$

を得る。例えば、

$P(n;n) = 2^n,\ P(n;n+1) = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1},\ P(n,n+2) = 2^{n+2} - (n+3).$

と言ったふうに計算できる。

2.3　Chentsov 表現と特性関数

Chentsov 表現を持つ確率過程 $\{X(\mathbf{t})\}$ を考える。m 個の時点 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \cdots, \mathbf{t}_m$ を与えると、$X(\mathbf{t}_1), X(\mathbf{t}_2), \cdots, X(\mathbf{t}_m)$ の特性関数は

$\mathbf{E}[\exp(i(z_1X(\mathbf{t}_1) + z_2X(\mathbf{t}_2) + \cdots + z_mX(\mathbf{t}_m)))]$

$= \exp - \sum(\mu(S(\mathbf{t}_1)^{e_1} \cap S(\mathbf{t}_2)^{e_2} \cap \cdots \cap S(\mathbf{t}_m)^{e_m}) \times |e_1z_1 + e_2z_2 + \cdots + e_mz_m|^\alpha$

ここで、和は集合 $\{0,1\}^m$ にわたって取るとし、$S^0 = {}^cS,\ S^1 = S$ と決めておく。

さて、もし $\{0,1\}$ の元 $\mathbf{e}_0$ が存在して、

$$\mu(S(\mathbf{t}_1)^{e_1} \cap S(\mathbf{t}_2)^{e_2} \cap \cdots \cap S(\mathbf{t}_m)^{e_n}) = 0$$

であったとしよう。この時、例えば

$\mu(S(\mathbf{t}_1)^{e_1} \cap S(\mathbf{t}_2)^{e_2} \cap \cdots \cap S(\mathbf{t}_m)^{1-e_m}) = \mu(S(\mathbf{t}_1)^{e_1} \cap S(\mathbf{t}_2)^{e_2} \cap \cdots \cap S(\mathbf{t}_{m-1})^{e_{m-1}})$ が成立する。これは、m 次元分布の一部 ($\mathbf{e}_0$ から Humming 距離が 1 の元) に関係する μ の値が、$(m-1)$-次元分布から計算出来ることを示す。また、$\{0,1\}^m$ が Humming 距離 1 の道で連結であることを使えば、全ての m-次元の体積が $m-1$ 次元の体積より計算出来ることがわかる。**2.2** の結果とあわせて、

Theorem 2.1 n-パラメータの安定型 *linearly additive process* の $(n+1)$-次元分布はその、n-次元周辺分布から計算できる。

即ち、Gauss 型が 2-次元分布、即ち分散で決定されたのと同じように、さらに高次元での決定性を持っている事がわかる。また、2-次元分布が一致するが、3-次元分布が異なる例が知られているので、これは本質的な性質である。また、スペクトルに注目すればもっと強く

Theorem 2.2 $\{X\}$ を n-パラメータの安定型 *linearly additive process* とする。、もし、n-パラメータの確率過程 $\{Y\}$ があって、$n+1$-次元の有限次元分布が総て一致するとする。　すると、X, Y は法則同等である。

この事をもって、n パラメータの安定型 linearly additive process は $n+1$-次元の決定性を持つという。

3 自己相似過程 [Takenaka 91]

自己相似安定過程の構成において、Chentsov 表現を一般化した次のような表現を使った。

$$S(\mathbf{t}) = \{(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n; |(x_1, x_2, \cdots, x_n) - (t_1, t_2, \cdots, t_n)| < x_0\} \triangle \{|(x_1, x_2, \cdots, x_n)| < x_0\},$$

即ち、円錐の対称差である。　この場合にも佐藤由身子氏 (Y.Sato 91) が、$n+2$-個の図形（それぞれが円錐の対称差）にたいして、必ず測度 0 の部分が存在すること、即ち強い意味でこの確率過程が $n+2$ 次元の決定性を持つことを証明した。その証明テクニックとして、$n+2$ 個の対称差による分割の 1 つがが空になる事と、$n+3$ 個の円錐による分割中、$\mathbf{e}_0, \mathbf{1}-\mathbf{e}_0$ に対応する図形がペアで空になるような $\mathbf{e}_0$ の存在との同値性をもちいた。　このセクションでは、円錐に関する空間の分割数に対する漸化式を求めて、この問題に迫ろう。

3.1 円錐による半空間の分割数

アイデァは２つ。　２次元で述べると

１。円錐は上から見ると、平面

２。円錐同士の交わりも上からみると直線。

だから、付け加えた円錐によってあらたに出来る分割の数は、平面上にそれ以前の円錐との交線として現れた直線による平面の分割数と同じである。(同じであるという部分には、円錐が凸曲面であることが効いている)。

$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$ に上の形の円錐を一般の位置に k 個置いた時の分割数を $C(n;k)$ とすると次の漸化式が得られる、

Theorem 3.1 (円錐による分割数の漸化式)

$$C(n;k+1) = C(n;k) + P(n;k),\ C(n;1) = 2$$

もちろん、$P(n;k)$ に関する漸化式も明示的に解けていないので、２元の連立漸化式である。

3.2 結果

(1) $C(n;n+1) = 2^{n+1}$
(2) $C(n;n+2) = 2^{n+2} - 1$
これにより、$n+2$ 個の円錐では双方とも消えるようなペァは存在しない、即ち問題の確率過程は $(n+1)$ 次元での決定性は持たない。(佐藤さんの論文ではこれはオープンプロブレムであった)
(3) $C(n;n+3) = 2^{n+3} - (n+4)$
(4) $C(n;n+4) = 2^{n+4} - \frac{n^2+9n+22}{2}$
(5) $C(1;6) = 31 < \frac{2^6}{2}$
(6) $C(1;7) = 38 < \frac{2^7}{2}$
(7) $C(2;8) = 92 < \frac{2^8}{2}$

後ろの３つが、分割数が 2 の円錐の個数乗の半分以下、即ちペァで消えざるを得ない事を示しているが、残念ながら佐藤さんのエレガントな証明との差は明白である。(位置関係という情報を無視しているのだから当然ではあるが。)

4 付録：射影幾何より

4.1 斉次座標と双対性

n-次元実射影空間の定義は $\mathbf{P}^n = (\mathbf{R}^{n+1}\backslash\mathbf{0})/(\mathbf{R}_+\backslash 0)$ である。即ち、射影空間の点は $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_0) = (\underline{\mathbf{x}}, x_0)$ で表される、ただし $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ かつ、ある正の数 a が存在して、$\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ なる関係があれば、この２つの座標（斉次座標と呼ばれる）は同じ点を表す。

$(n-1)$-次元平面 $H_\infty = \{\mathbf{x} = (\underline{\mathbf{x}}, x_0) \in \mathbf{P}^n : x_0 = 0\}$ は、無限遠超平面と呼ばれ、$\mathbf{P}^n \setminus H_\infty$ は、次のように n-次元実 Euclid 空間と同一視され、この同一視は $\mathbf{0}$ の周りのローカル座標と呼ばれる。

$$\pi_0 : \mathbf{P}^n \ni \mathbf{x} = (\underline{\mathbf{x}}, x_0) \longmapsto (\underline{\mathbf{x}}/x_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \in \mathbf{R}^n \ .$$

$\mathbf{P}^n$ の余次元 1 の線形部分空間（超平面）は

$$H_{(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_0)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{P}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0x_0 = 0\}$$

で表わされる。ここで、パラメータ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_0)$ も又 $\mathbf{P^n}$ の元と見なすことができるので、${}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0x_0$ と書けば（ただし、ヴェクトルは縦ヴェクトルと考えている)、

$$H_\mathbf{a} = \{\mathbf{x} : {}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

と簡単に書け、$\mathbf{P}^n$ の超平面の全体を $\mathbf{P}^n$ と同形と見なすことが出来る。　これを、点と超平面との双対性と呼ぶ。この同形写を $*$ で表そう。即ち、$(H_\mathbf{a})^* = \mathbf{a}$, $\mathbf{a}^* = H_\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^{**} = \mathbf{a}$, $H^{**} = H$ が成立する。

$H_\mathbf{a}$ に原点から垂した垂線の足を $\mathbf{h}$ とすると、$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|^2}$ 即ち、$\mathbf{h}$ と原点を挟んだ、長さが $\frac{1}{|\mathbf{h}|}$ の点である。(注。Chentsov 型を扱った議論で、しばしばパラメータとしてこの足 $\mathbf{h}$ そのものが取られるが、以下の議論でもわかるがこの幾何学的な議論が出てくる限りにおいて、上の取り方が自然である。)

4.2 性質

(1) 固定点 $\mathbf{a}_0$ に対して $\{H^* : H \ni \mathbf{a}_0\} = \mathbf{a}_0{}^*$
(2) 固定超平面 H_0 に対して $\forall\mathbf{a} \in H_0,\ \mathbf{a}^* \ni (H_0)^*$
(3) 集合 $\{H^* : H$ は線分 $\mathbf{Oa}$ と交わる $\}$ は $\mathbf{a}$ で２分された局所座標系 π_0 の原点を含まない部分。(実はこの線分を含む直線とどこで交わるかを考えて $\mathbf{P}^n$ に符号を導入したと考えれば局所座標で考えなくてもよい。)

(4) Euclid 運動群の元を g とする。${}^t\mathbf{a}\cdot g\mathbf{x} = {}^t({}^tg\mathbf{a})\cdot\mathbf{x}$ であるから、超平面の（パラメータの作る）空間には、転置行列として働く。この作用で不変な測度が Chentsov 測度 $d\mathrm{Ch}(\underline{\mathbf{x}}_0) = \dfrac{d\underline{\mathbf{x}}_0}{|\underline{\mathbf{x}}_0|^{n+1}}$ である。

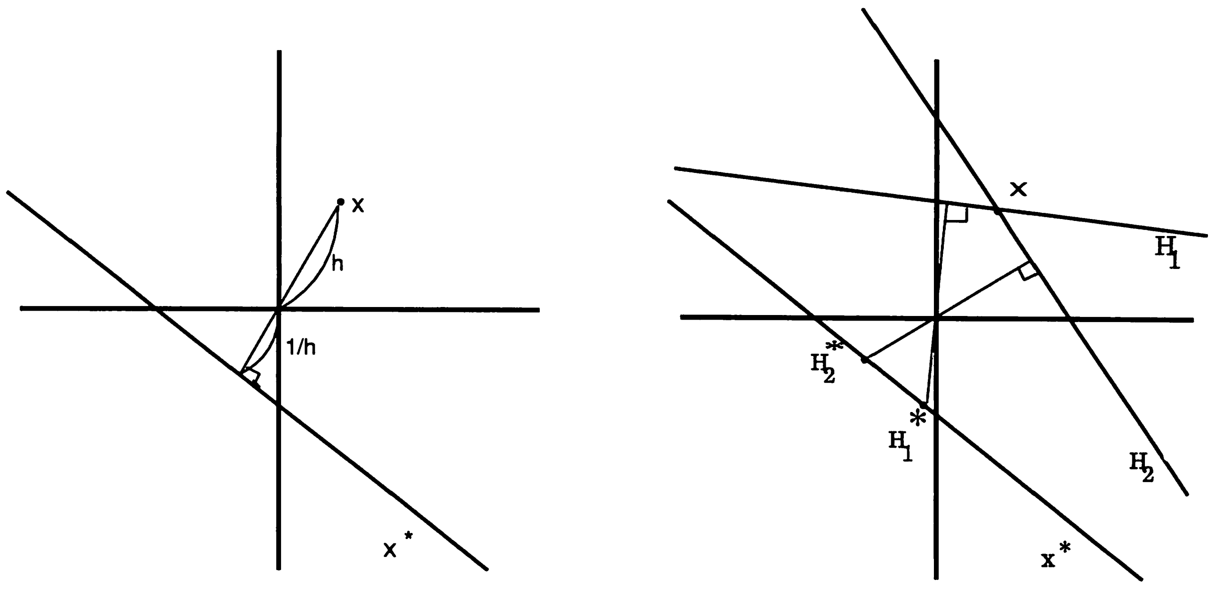

図 3: 一点を通る直線の双対点は、その点の双対直線上にある。

4.3 高次元の直線とその双対

直線 ℓ が $n-1$ 個の超平面 $H_{\mathbf{v}_1} = \mathbf{v}_1{}^*, H_{\mathbf{v}_2}, \cdots, H_{\mathbf{v}_{n-1}}$ の交わりとして定義されていたとせよ。ℓ の双対 ℓ^*、即ち ℓ 上の点の双対超平面の作る余次元 1 の集合は、$n-1$ 個の点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{n-1}$ を通る（自由度 1 の）超平面群となる。

4.4 運動群の作用

$\mathbf{R}^n \subset \mathbf{P}^n$ という包含を、$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 1)$ で考えておく。Euclid 運動群は

$$\left[\begin{array}{c|c} g & \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} g\mathbf{x} + \mathbf{v} \\ 1 \end{array}\right]$$

双対作用は

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^tg & {}^t\mathbf{0} \\ \hline \mathbf{v} & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} {}^tg\mathbf{a} \\ 1 + (\mathbf{a}, \mathbf{v}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{{}^tg\mathbf{a}}{1+(\mathbf{a},\mathbf{v})} \\ 1 \end{array}\right].$$

従って、平行移動の双対作用に関して不変な測度は極分解され、球面方向には何ら制約条件がなく自由に取れる。

参考文献

[KSato00] 佐藤健一、多次元従属操作と自己分解可能性統数研『無限分解可能過程に関連する諸問題』予稿集 2000 年１０月

[Mori92] Mori, T, *Representation of linearly additive random fields.* Prob. Theory and Related Fields **92** 91–115,(1992) [YSato91] Sato, Y, *Distributions of stable random fields of Chentsov type.* Nagoya Math. J.**123** 119-139 (1991)

[YSato92] Sato, Y, *Structure of Lévy measures of stable random fields of Chentsov type* Probability and Mathematical Statistics**13**165-176 (1992)

[YS-ST91] Sato, Y and Takenaka, S, *On determinism of symmetric α-stable processes of generalized Chentsov type* in 'Gaussian Random Fields' 332-345, World Scientific (1991)

[STakenaka91] Takenaka, S, *Integral-geometric constructions of self-similar stable processes.* Nagoya Math. J**123** 1-12,(1991)

[STakenaka93] Takenaka, S, *Examples of self-similar stable processes.* in 'Stochastic Processes' 303-311, Springer (1993)

[STakenaka97] 竹中茂夫、初等幾何に由来する安定型確率過程の決定性岡山理科大学紀要 **33** 15-24 (1997)

[STakenaka99] Takenaka,S, *On determinism of set-indexed $S\alpha S$-processes* in 'Trends in probability and related analysis 1999' 285-290 World Scientific (1999)

Topics on Set-Indexed Process

Shigeo Takenaka

Department of Applied Mathematics, Facalty of Science

Okayama University of Science

Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan

(Received November 1, 2001)

A multi-parameter version of additive processes are defined and constructed as set-indexed processes. Their properties called the determinism are shown.