

電磁波方式の地震予知に用いる Yagi-Uda antenna の 分散特性の近似解

山本 勲 ・ 友森 悠智 ・ 阿座上 孝*

岡山理科大学工学部情報工学科

* 元岡山理科大学工学部情報工学科

(2000年11月1日 受理)

1. はじめに

筆者らは、地殻変動による岩盤の微小破壊(micro-flucture)から発生する電磁波エネルギーを観測し続けることで、大地中の二地点間の電位差、ひいては特定個所の地震を予知することが可能であると考え、種々の周波数帯を利用した電磁的センサシステムを調査中であるが、最近の報告[1]によれば地震の前兆に伴う自然放射ノイズはVHF帯において最も観測効率の良いことが述べられている。

さて、一般にVHF帯(Table 1.)の電磁波送受信には Yagi-Uda antenna が広く用いられており、これは、開放型周期構造の導波器群に沿っての表面波伝搬を利用して空間の電磁波信号を送受するための回路素子であり、このため地震予知に用いるセンサとなり得る。したがって、このアンテナをセンサとして使用する限りにおいて、利得精度の向上を図るためには、この分散特性の算出結果を考慮し、有効に利用する必要がある。

今年(西暦2000年)7月に入って伊豆諸島の地震活動が活性化し、神津島の東方海域でマグニチュードM6クラス、震度6マイナスの地震が3回発生しており、この原因について、火山噴火予知連絡会伊豆部会は「マグマの地殻を押し広げているとみるのが自然」と分析し、太平洋プレートのもぐり込み説を採っている。また、海上保安庁水路部も人工衛星を使った全地球測位システム(Global Positioning System , GPS)を利用して、精度よく位置をつかむ観測システムを設置し、三陸沖において観測を開始した。何れにせよ、地震予知に関しては、的確な位置・大きさ・時刻のベクトルの情報源を徴集する手段の実現に関し寸刻を争うところまで来ている。

2. Yagi-Uda antenna の周期構造

本論文で取り扱う Yagi-Uda antenna において、信号送受信のためのセンサメカニズムは、単体素子として時間因子を伴う dipole element で構成され、電磁波エネルギーはこの element と周囲空間との間で授受されるが、特にこのエネルギー授受を効率よく行わせるため、アンテナ構造は Fig.1 に示すごとく、直径 d 、長さ l の金属導体素子を間隔 p で array 状に水平面内に n 個配列したものである。

このため、水平面内の空間エネルギーは周期性を形成し、

$$\beta_n = \beta + \frac{2n\pi}{p} \quad (n : \text{任意の整数}) \quad (2.1)$$

の位相定数を持つ空間高調波の重ね合わせとして表わすことが出来るならば、 z 方向の伝搬定数 γ_n は

$$\gamma_n = (\beta_n^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

となる。但し β_n は

$$0 \leq k < |\beta_n| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3)$$

の条件に従い、すべての γ は実数である[2]。

したがって、array 状配列された dipole element の平面波エネルギーが表面波的に伝搬するためには、このエネルギーは各 element の位相定数に直接関与する使用周波数に依存する。すなわち、伝搬エネルギーは各 dipole element の間隔、つまり各素子間隔 p と波長 λ とで決定される。さて、式 (2.2) において、間隔 p と $\beta\lambda = 2\pi$ の成立関係を理解するためには Fig.2 の Brillouin 図を利用する。

いま、 $\ell = 2h$ として式 (2.3) を書き換えると、

$$0 \leq kh < \left| \beta h + \frac{2nh}{p} \pi \right| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.4)$$

即ち、式 (2.4) より Fig.2 の $(\beta h - kh)$ 平面上で進行波が存在し得る領域と禁止帯が容易に理解され、Fig.1 に示す構造の場合には z 軸上の正方向へ伝搬する波と負方向へ伝搬する波とは等しい特性を持ち、 kh 軸に関して対称である。

ゆえに、分散曲線は Fig.2 に示した $0 < \beta h < h\pi/p$ の範囲についてのみ求めればよい。

3. 理想化した Yagi-Uda antenna

Fig.1 に示す Arrey の素子間隔 p を無限小にし、同時に素子直径 d も無限小にするような理想化を行えば、Fig.3 のようなリボン状の導体板となる。ただし、 x 方向のみ導電性を持つ導体板と仮定する。

このような導体板においては各 element の境界面は連続した非常に薄い楕円筒面とみなすことができ、楕円筒座標系を適用し、Mathieu 関数を導入することにより厳密な解析が可能になるとともに取扱いも容易となる。

また、エネルギーの伝搬特性については、解析の結果を部分的に適用し近似的に求めることもできる。すなわち、表面波の存在し得る領域内では素子間隔によって分散曲線が大きく変化することはない。

一般に、楕円筒面を境界面と考えるような物体について種々の解析を行う場合、Elliptical coordinates を用いる。すなわち、まず最初に直交座標系として

$$x = h \cosh \xi \cos \eta \quad (3.1)$$

$$y = h \sinh \xi \sin \eta \quad (3.2)$$

を変形して

$$\frac{x^2}{h^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{h^2 \sinh^2 \xi} = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (3.3)$$

$$\frac{x^2}{h^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{h^2 \sin^2 \eta} = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \quad (3.4)$$

とすれば、Fig.4 に示すように式 (3.3) は $x = \pm h, y = 0$ なる焦点を共有する楕円群を示し、式 (3.4) は同じ焦点を共有する双曲線群を表すことになる。したがって、離心率を e とすれば、 $h = ae$ より $e = 0$ 、すなわち $\xi \rightarrow \infty$ のとき、 ξ と η はそれぞれ円筒座標系における r, ϕ に対応し、また $e = 1$ のとき、すなわち $\xi \rightarrow 0$ では、2つの焦点を結ぶ長さ $2h$ の板状面に帰着する。

さて、Fig.3 で示したように、本研究で理想化した導体板は $e = 1$ の場合に相当しているので、Helmholtz の方程式は

$$(\nabla^2 + k^2)\zeta = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{ただし、} \quad \bar{\nabla}^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}$$

$$h_1 = h_2 = h(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

として与えられる。

ゆえに、自由空間波および進行波の位相定数をそれぞれ k, β とすれば、波動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\zeta = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{但し、} \quad -2q = (k^2 - \beta^2)h^2/2 \quad (3.8)$$

$$= k_1^2 h^2 / 2$$

$$q > 0$$

式 (3.7) の解を求めるため、 $\zeta(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \phi(\eta)$ なる変数分離を行えば

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \varphi(\xi) - (a + 2q \cosh 2\xi)\varphi(\xi) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \phi(\eta) + (a + 2q \cos 2\eta)\phi(\eta) = 0 \quad (3.10)$$

となる。ここで a は分離定数であり Mathieu 関数の特性数として q と n の関数形で与えられる。また、 z 方向の電磁界成分は式 (3.9)、(3.10) それぞれの解の線形結合として表わされる。

すなわち、 E_z は式 (3.10) より η に関して周期 2π を持つ偶関数解 $ce_{2m+1}(\eta, -q)$ であり、 $M_{e_{2m+1}}(\xi, -q)$ はこれに対応する式 (3.9) の波動をあらわす解である。

同様に、 H_z については式 (3.10) から η に関して周期 2π をもつ奇関数解 $se_{2m+1}(\eta, -q)$ および、式 (3.9) から $N_{e_{2m+1}}(\xi, -q)$ を用いる。

したがって、 E_z, H_z はそれぞれ次式のような無限級数として表現される。

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e_{2m+1}}(\xi, -q) ce_{2m+1}(\eta, -q) \quad (3.11)$$

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e_{2m+1}}(\xi, -q) se_{2m+1}(\eta, -q) \quad (3.12)$$

但し、 $\alpha_{2m+1}, \beta_{2m+1}$ は展開係数である。

この E_z, H_z より各電磁界成分は以下のように表現される。

$$E_\xi = -\frac{j\omega\mu_0}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e_{2m+1}}(\xi, -q) se_{2m+1}'(\eta, -q) - \frac{j\beta}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e_{2m+1}}(\xi, -q) ce_{2m+1}'(\eta, -q) \quad (3.13)$$

$$E_\eta = +\frac{j\omega\mu_0}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e_{2m+1}}(\xi, -q) se_{2m+1}(\eta, -q)$$

$$-\frac{j\beta}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e2m+1}(\xi, -q) c e_{2m+1}'(\eta, -q) \quad (3.14)$$

$$H_\xi = -\frac{j\beta}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e2m+1}'(\xi, -q) s e_{2m+1}(\eta, -q) \\ + \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e2m+1}(\xi, -q) c e_{2m+1}'(\eta, -q) \quad (3.15)$$

$$H_\eta = -\frac{j\beta}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e2m+1}(\xi, -q) s e_{2m+1}'(\eta, -q) \\ - \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_1^2 h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e2m+1}'(\xi, -q) c e_{2m+1}(\eta, -q) \quad (3.16)$$

但し、式中の prime 記号は各関数の変数 ξ または η についての微分を表わす。

4. 理想化 antenna 表面の電磁界

2. で述べた理想化の仮定、すなわち電流は x 方向成分しか持たないことから、次の境界条件が与えられる。

$$E_\eta(0, \eta) = 0 \quad (4.1)$$

$$H_\eta(0, \eta) = 0 \quad (4.2)$$

式 (3.14), (3.16) より Mathieu 関数の直交性を利用して、この境界条件を用いると、 $(\beta h - kh)$ に関してそれぞれ次の特性方程式が得られる。

$$(E_\eta) : \beta \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} M_{e2m+1}(0, -q) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} B_{2r+1}^{(2m+1)} \\ + \omega\mu_0 \beta_{2n+1} N_{e2n+1}'(0, -q) = 0 \quad (4.3)$$

$$(H_\eta) : \beta \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m+1} N_{e2m+1}^{(1)}(0, -q) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2m+1)} B_{2r+1}^{(2n+1)} \\ + \omega\varepsilon_0 \alpha_{2n+1} M_{e2n+1}^{(1)}(0, -q) = 0 \quad (4.4)$$

但し、 A_{2r+1}, B_{2r+1} は Mathieu 関数の展開係数であり、 a と q と Mathieu 関数との次数に従う。

式 (4.3) (4.4) より k と β の関係が求められるが、このような無限級数展開表示では解を求めるのが困難である。このためには次式のような行列表示を用いて、固有値問題に帰着させると便利である。

$$\bar{\bar{F}} = [F_{ij}] = \left[M_{e2j-1}^{(1)}(0, -q) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2i-1)} B_{2r+1}^{(2j-1)} \right] \quad (4.5)$$

$$\bar{\bar{G}} = [G_{ij}] = \left[N_{e2j-1}^{(1)}(0, -q) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2j-1)} B_{2r+1}^{(2i-1)} \right] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{M}}_d &= [M_{dij}] = \begin{cases} M_{e2i-1}^{(1)}(0, -q) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{N}}_d &= [N_{dij}] = \begin{cases} N_{e2i-1}(0, -q) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\overline{\overline{c}} = [\alpha_{2i-1}] \quad (4.9)$$

$$\overline{\overline{s}} = [\beta_{2i-1}] \quad (4.10)$$

但し、 $i = n+1, j = m+1$

これらの定義から、特性方程式 (4.3)、(4.4) 式は次のように表現される。

$$\beta \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{c}} + \omega \mu_0 \cdot \overline{\overline{N}}_d \cdot \overline{\overline{s}} = 0 \quad (4.11)$$

$$\omega \varepsilon_0 \cdot \overline{\overline{M}}_d \cdot \overline{\overline{c}} + \beta \cdot \overline{\overline{G}} \cdot \overline{\overline{s}} = 0 \quad (4.12)$$

さらに、 $\overline{\overline{M}}_d, \overline{\overline{N}}_d$ が対角行列であり逆行列が求め易いことに注目して、式 (4.11)、(4.12) を列ベクトル $\overline{\overline{c}}, \overline{\overline{s}}$ について書き換えると、

$$\left(\overline{\overline{M}}_d^{-1} \cdot \overline{\overline{G}} \cdot \overline{\overline{N}}_d^{-1} \cdot \overline{\overline{F}} - \frac{k^2}{\beta^2} \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{\overline{c}} = 0 \quad (4.13)$$

$$\left(\overline{\overline{N}}_d^{-1} \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{M}}_d^{-1} \cdot \overline{\overline{G}} - \frac{k^2}{\beta^2} \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{\overline{s}} = 0 \quad (4.14)$$

となる。

次に行列演算上、行列の分離を行う。即ち、

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} \cdot \overline{\overline{N}} \quad (4.15)$$

$$\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{I}} \cdot \overline{\overline{M}} \quad (4.16)$$

但し、

$$\overline{\overline{I}} = [I_{ij}] = \left[\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2i-1)} B_{2r+1}^{(2j-1)} \right] \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{M}} &= [M_{ij}] = \begin{cases} M e_{2i-1}^{(1)}(0, -q) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{N}} &= [N_{ij}] = \begin{cases} N e_{2i-1}^{(1)}(0, -q) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$\overline{\overline{I}}$ は $\overline{\overline{I}}$ の転置行列を示す。

したがって、式 (4.13)、(4.14) は次のように表現される。

$$\left(\overline{\overline{M_d^{-1} \cdot {}^T I \cdot N \cdot N_d^{-1} \cdot I \cdot M - \frac{k^2}{\beta^2} E}} \right) \cdot \overline{\overline{c}} = 0 \quad (4.20)$$

$$\left(\overline{\overline{N_d^{-1} \cdot I \cdot M \cdot M_d^{-1} \cdot {}^T I \cdot N - \frac{k^2}{\beta^2} E}} \right) \cdot \overline{\overline{s}} = 0 \quad (4.21)$$

上2式を用いて、第1項の総行列の固有値 k^2/β^2 から $k-\beta$ の関係が決定され、また $k^2/\beta^2 \equiv \lambda$ とおき、式(3.8)からそれぞれ kh , βh が次式により求められる。

$$kh = 2\sqrt{\frac{\lambda q}{1-\lambda}} \quad (4.22)$$

$$\beta h = 2\sqrt{\frac{q}{1-\lambda}} \quad (4.23)$$

理論的にはこの行列は無次元数であるが、計算上では十分大きな次元数の有限行列の値までに近似することができる。このとき、固有値 λ はその行列の次元数に対応して同じ個数だけ得られ、 $(kh-\beta h)$ 平面上にその個数だけの点が描かれる。したがって、 q を連続的に変化させることにより分散曲線はその軌跡として求めることができる。

5. おわりに

行列演算を行う際にはコンピュータの記憶容量の制限により、各行列の次元数は制約を受ける[3]。次元数を 10×10 、 20×20 として βh を計算した一例を Table 2. に示す。この結果、低次モードの分散曲線を求める場合は、比較的少ない次元数 10×10 程度で十分な精度が得られることがわかる。また、次元数の大きさに計算時間が比例するので小次元数の行列がよいと思われる。 $\overline{\overline{Y}}$, $\overline{\overline{I}}$, $\overline{\overline{X}}$ および $\overline{\overline{{}^T I}}$ の固有値 λ をそれぞれ QR 法により計算し、次元数 15×15 として求めた分散曲線の数値計算結果の一例を Fig.5 に示す。

参考文献

- [1] 吉田,佐藤：“地震前兆現象と VHF 帯自然放射電波の観測”，信学技報 A-P 99-09 (1999-09)
- [2] Hidetsugu Yagi：“BEAM TRANSMISSION OF ULTRA SHORT WAVES”，I.R.E. (1928-03)
- [3] 小林公雄：“理想化八木字田列の表面波伝搬特性に関する研究”，名工大修論 (1977-03)

Table 1. Classification of Electro-magnetic waves

Frequency f [Hz, Hertz/sec]	Designation	Wave length, λ [meter, m]
10 Hz (Hertz)~	ULF (Ultra LF)	1,000 km
----- 1 kHz -----	ELF (Extremely LF)	----- 100 km -----
----- 3 kHz -----	VLF (Very LF)	----- 10 km -----
----- 30 kHz -----	LF (Low F)	----- 1 km (kilo m) -----
----- 300 kHz (kilo Hz) -----	MF (Medium F)	----- 100 m -----
----- 3 MHz (Mega Hz) -----	HF (High F)	----- 10 m -----
----- 30 MHz -----	VHF (Very HF)	----- 1 m (meter) -----
----- 300 MHz -----	UHF (Ultra HF)	----- 10 cm (centi m) -----
----- 3 GHz (Giga Hz) -----	SHF (Super HF)	----- 1 cm -----
----- 30 GHz -----	EHF (Extremely HF) (milli meter wave)	----- 1 mm (milli m) -----
----- 300 GHz -----	(Sub-milli meter wave)	----- 100 μ m (micro m) -----
----- 3 THz (Tera Hz) -----	far-infra red ray	----- 5 μ m -----
	midium-infra red ray	----- 1.5 μ m -----
	near-infra red ray	----- 1000 nm -----
	visible ray	----- 780 nm -----

note ; light velocity $c = 3 \times 10^8$ (m/sec) = $f \cdot \lambda$

Table 2. Examples of Calculation for βh values in order to the dimension of Matrix

1) $-Q = -10.0$

dimension mode	10	20
1	2,06593	2,06593
2	2,45389	2,45389
3	3,10377	3,10377
4	3,89672	3,89672
5	4,76555	4,76552
6	5,68206	5,67666
7	6,74857	6,61311
8	8,49740	7,56533
9	12,23163	8,52892
10	23,88103	9,49975

2) $-Q = -10.0 \times 10^{-4}$

dimension mode	10	20
1	0,20186	0,20186
2	1,23713	1,23713
3	2,24272	2,24272
4	3,24493	3,24493
5	4,24612	4,24612
6	5,24869	5,24685
7	6,32936	6,24735
8	7,98348	7,24772
9	11,50037	8,24799
10	22,47856	9,24821

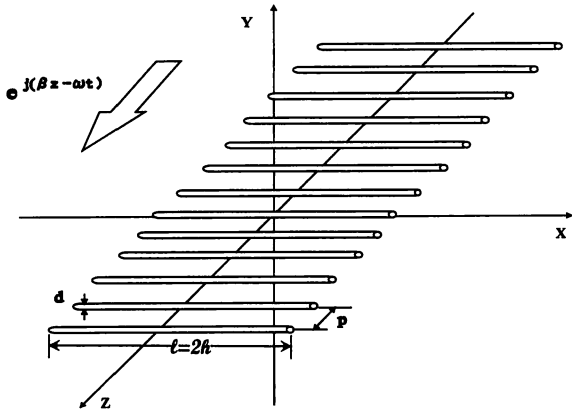


Fig.1 Typical dimension of Yagi-Uda antenna

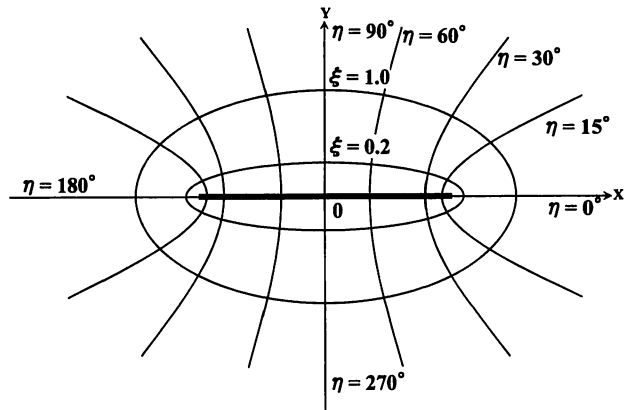


Fig. 4 Elliptic coordinate systems for $\eta - \xi$

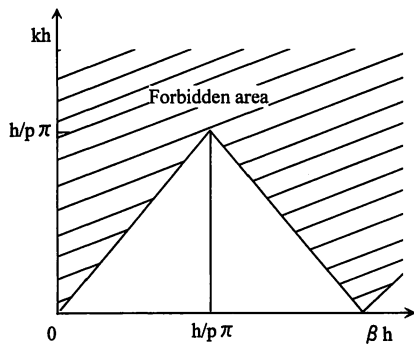


Fig.2. Brillouin diagram for $kh-\beta h$

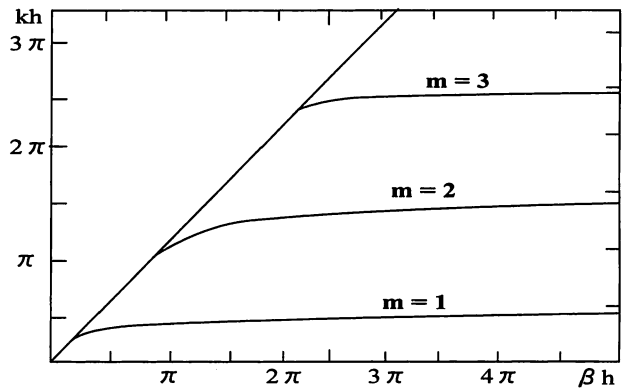


Fig. 5 An examples of calculation for dispersion characteristics

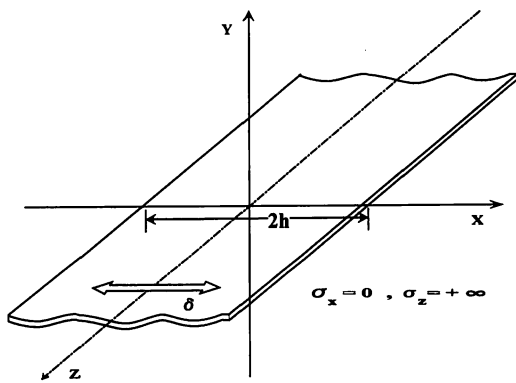


Fig. 3 Idealized Yagi-Uda antenna

Approximate solution of the dispersion characteristics on Yagi-Uda antenna for observations of pre-seismic phenomena by Electro-Magnetic Wave Systems

Isao YAMAMOTO, Hirosato TOMOMORI and Takashi AZAKAMI*

*Department of Information & Computer Engineering,
Okayama University of Science,
Ridai-cho, 700-0005 Okayama, Japan*

**ex-Department of Information & Computer Engineering,
Okayama University of Science,
Ridai-cho, 700-0005 Okayama, Japan*

(Received November 1, 2000)

Recently, observations of electromagnetic fields have been considered as one of the most promising methods for short-term earthquake prediction. As electromagnetic wave noise caused by micro-flucture of earth rocks is limited to the regions of VHF, the Yagi-Uda antenna is generally used. To increase the sensitivity of this antenna, the authors recommend the utilization of the optimum value on the dispersion characteristics. This paper describes the derivation of the equation for the dispersion characteristics.