

PGT における Schwarzschild-like な 厳密解の時空構造

山崎一茂・中力眞一*・田中寛二**・田代 勤*

岡山理科大学大学院工学研究科システム科学専攻
 * 岡山理科大学総合情報学部シミュレーション物理学科
 ** 岡山理科大学大学院理学研究科応用物理学専攻

(1999年11月4日 受理)

複素 Einstein-Maxwell 理論に帰着しうる Poincaré gauge 理論の厳密解のシリーズ (これは Kerr-Newman チェーンと呼ばれている) を取り上げる。Kerr-Newman チェーンは、ゲージチャージと呼ばれるローレンツゲージ場を生み出す 2 種類の”電磁荷”を有する PGT の一連の解で、その与える時空はローレンツゲージ場をソースとする Einstein の重力場の方程式の解でもある。この論文では、これらの解のうち、Schwarzschild 解に似た構造の時空を与える解を取り上げ、その時空構造について今までに得られている結果と共に、新しく得られた結果について議論する。

1 Introduction

Poincaré gauge 理論 (PGT) は、いわゆる Poincaré 変換を局所変換 (ゲージ変換) に対して不変となるように拡張した理論である。この理論は 1961 年に Utiyama¹⁾ が初めて Lorentz 変換をゲージ化したことから始まる。その後 Kibble²⁾ によってゲージ群が Lorentz 変換群より Poincaré 変換群へと拡張され、さらに Hayashi³⁾ により、現在知られた形へと整えられた。

この一般の PGT のうち、複素 Einstein-Yang-Mills 理論として解釈できるものがあることが知られている^{4, 5)}。この理論は特殊な場合として、複素 Einstein-Maxwell 理論へ帰着させることができる。これを利用すれば、Einstein-Maxwell 方程式の解を得ると同様の手続きにより PGT の厳密解を得ることができるであろうと推察できる。

この論文では、Einstein-Maxwell 方程式の代表的な解の一つである Kerr-Newman 解を得る手続きに準じて得られた一連の PGT の厳密解 — Kerr-Newman chain⁶⁾ を取り上げる。これらの解の与える時空の内には一般相対論で良く知られた Schwarzschild 解とよく似た時空構造を与えるものがあるが、今まではそのうちの特定のもののみの調査が行われてきた^{7, 8, 9)}。

この Schwarzschild-like な時空について、今までの結果と共にほとんど全ての場合について、その時空構造を調査し議論することがこの論文の動機であり目的である。

我々が扱う PGT の厳密解は次式で与えられる

ローレンツゲージ場として

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{Q}_1 \frac{r}{\rho^2} [dt - \ell \sin^2 \theta d\varphi] \cos \alpha + \vec{Q}_1 \frac{1}{\rho^2} [(r^2 + \ell^2)d\varphi - \ell dt] \cos \theta \sin \alpha \\ \vec{a} &= \vec{Q}_2 \frac{r}{\rho^2} [dt - \ell \sin^2 \theta d\varphi] \cos \alpha + \vec{Q}_2 \frac{1}{\rho^2} [(r^2 + \ell^2)d\varphi - \ell dt] \cos \theta \sin \alpha\end{aligned}$$

並進ゲージ場として

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - \ell \sin^2 \theta d\varphi]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta [(r^2 + \ell^2)d\varphi - \ell dt]^2$$

ただし

$$\rho^2 = r^2 + \ell^2 \cos^2 \theta \quad , \quad \Delta = r^2 - 2Mr + \ell^2 + q.^2$$

ここで M と ℓ はそれぞれ場を生み出す中心物体の質量と単位質量あたりの角運動量であり、 α は電磁荷の配合を表わすあるパラメータ定数である。そして \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 はベクトルゲージチャージと呼ばれ、ローレンツゲージ場を生み出すソースと解される。 $q.^2$ は電磁気的な電荷とは異なり、Hayashi が導入したパラメータ定数 a_1, a_3 と、このベクトルゲージチャージとから次のように定義されるゲージチャージと呼ばれる量である

$$q.^2 = 2(a_1 + a_3) (\vec{Q}_2^2 - \vec{Q}_1^2)$$

この論文ではこの解が与える時空構造のみを調べるために、ローレンツゲージ場とは直接相互作用しないテスト粒子の運動を考えることにする。そのためには、並進ゲージ場を通して定義されるメトリックのみを考えれば十分である。さ

らに Schwarzschild 時空との関係を調べることを目的にしているため、ソースの自転がない場合、つまり $l=0$ のときの時空を考える。このときメトリックは次のようになる

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.1)$$

ただし $\Delta = r^2 - 2Mr + q^2$

明らかに時空は q^2 の符号により分類される。 $q^2 = 0$, $q^2 > 0$ のときはそれぞれ Schwarzschild 時空, Reissner-Nordström 時空の構造に一致するけれども、 $q^2 < 0$ のときは、これに対応する時空はまだ知られていない。この論文ではこの時空の構造を取り上げ、いままでの結果と合わせて議論する。

2 Geodesic equations

この Section では、前節で与えたメトリック (1.1) から得られる以下のラグランジアン \mathcal{L} を用いて、テスト粒子の軌道の方程式を導出する。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{r^2} \dot{t}^2 - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (2.1)$$

ここでドット付の文字は適当に選んだアフィンパラメータについての導関数を表わしている。粒子の軌道を表わす補助変数としてのアフィンパラメータとして、massless 粒子については $\mathcal{L} = 0$ 、massive 粒子については $2\mathcal{L} = 1$ となるものを選ぶことにする。 \mathcal{L} には t, φ が陽に含まれていないから、それぞれ次のエネルギー保存則・角運動量保存則に対応する式が得られる

$$\frac{\Delta}{r^2} \dot{t} \equiv E, \quad r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \equiv L \quad (2.2)$$

(2.1) 式より得られる方程式において $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ を初期条件として選ぶと、 $\theta = \pi/2$ を解に持つことがわかる。また $\mathcal{L} = \text{const}$ であることを考慮すると、 r, φ に関しては次の方程式を用いることができる

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} \left(2\mathcal{L} + \frac{L^2}{r^2} \right) = E^2, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (2.3)$$

ここで τ はアフィンパラメータである。これらの式において、 $u = 1/r$ とおき、 $q^2 < 0$ を考慮に入れると、massless と massive のテスト粒子に対してそれぞれ次の軌道の方程式を得ることができる

$$\text{massless の場合} \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2Mu^3 + |q^2|u^4 \quad (2.4)$$

$$\text{massive の場合} \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2M}{L^2} u - \left(1 - \frac{|q^2|}{L^2} \right) u^2 + 2Mu^3 + |q^2|u^4 \quad (2.5)$$

3 A classification of the orbits

まず (2.4) または (2.5) 式の右辺をまとめて $f(u)$ と書くことにする。 $f(u)$ は明らかに $f(u) \geq 0$ の部分でのみ意味を持つ。したがって考えている粒子の軌道は、4 次方程式 $f(u) = 0$ の解の持ち方に依存する。以後の議論では $f(u) = 0$ の根を u_1, u_2, u_3, u_4 と書くことにする。

解と係数の関係から、 $f(u) = 0$ の根が 4 根ともに正となることはありえないことがわかる。massive 粒子の場合、Schwarzschild メトリックのときと同じく、正根の数はたかだか 3 である。この場合の $f(u)$ のタイプの代表的なものは 6 通りで、Fig.1 に描いた。massive 粒子の軌道は $r \rightarrow 0$ へ落下し続ける相対性理論に固有な第 2 種軌道の他、ニュートン力学でのケプラー軌道に対応する楕円型軌道 (case (a)) や、双曲線型軌道 (case (d), (e)) などが存在する。§4.2 では $f(u)$ がすべて実根をとる case (a), (b), (d) の第 1 種・第 2 種軌道を、§4.3 では $f(u)$ が 1 組以上の複素共役根をとる場合の case (c), (e), (f) の軌道を議論する。また §4.1 では動径方向のみの運動について議論する。

一方 massless 粒子の場合においても、Schwarzschild メトリックのときと同じく $f(u) = 0$ の正根の数はたかだか 2 である。そして $f(u)$ の代表的なものは 3 通りで、Fig.2 に描いた。なお、解と係数の関係から $f(u) = 0$ が複素共役根をとり、かつ正根をとるケースは存在しないことがわかる。したがって massless 粒子の場合にも、やはり Schwarzschild メトリックのときと同じ種類だけ存在する。それぞれの軌道を、§5.3 で case (A) を、§5.2 で case (B) を、§5.4 で case (C) を議論する。また §5.1 で動径方向のみの軌道を議論する。

4 massive 粒子の軌道

4.1 動径方向のみの軌道

ここでは動径方向のみの軌道を考えるので $L = 0$ である。そこで (2.5) 式ではなく (2.2), (2.3) 式からはじめる必要がある。 $q = |q^2|/M$ として (2.3) 式から次の式を得る

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{M}{r^2} (2r + q) - (1 - E^2) \quad (4.1)$$

テスト粒子ははじめ $r=0$ とき $r=r_1 > 0$ で静止しており、その後、落下をはじめるものとする。このとき r_1 は E により次のように書かれる

$$r_1 = \frac{M + \sqrt{M^2 + Mg(1-E^2)}}{1-E^2} \quad (4.2)$$

(もちろん $E^2 < 1$ でなければならない)。いま、方程式を解くために r を次式により新しい変数 η におきかえる

$$r = r_1 \cos^2 \eta/2 \quad (4.3)$$

このとき (4.1) より、 $dr/d\tau < 0$ に注意すると次式が得られる

$$\tau = \frac{r_1^2}{\sqrt{2(r_1+q)M}} \int \frac{\cos^3 \eta/2}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \eta/2}} d\eta, \quad k^2 = \frac{2r_1+q}{2(r_1+q)} \leq 1 \quad (4.4)$$

ここで、新しい変数 η は r が r_1 から 0 まで変化するとき、0 から π まで変化する。

次に (2.2) 式を用いて座標時間 t を求める式の導出を行う。まず、 τ と違って t は r が r_1 から $\Delta=0$ となる r の値 $r=r_H$ に近付くとき発散することに注意する。この注意の下に、先と同じ変換 (4.3) を行って (2.2) および (4.4) 式により次の結果が得られる

$$t = \frac{E}{\sqrt{2(r_1+q)}} \frac{1}{\sin^2 \eta_H/2} \frac{2r_1 \cos^2 \eta_H/2 + q}{(2r_1+q) \cos^2 \eta_H/2 + q} \int \frac{\cos^7 \eta/2 d\eta}{(1-a^2 \sin^2 \eta/2)(1-b^2 \sin^2 \eta/2)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \eta/2}} \quad (4.5)$$

ここで、 η_H , a , b は次のように定義した

$$r_H = M + \sqrt{M^2 + Mg} = r_1 \cos^2 \eta_H/2, \quad a^2 = \frac{1}{\sin^2 \eta_H/2} \geq 1, \quad b^2 = \frac{2r_1 \cos^2 \eta_H/2 + q}{(2r_1+q) \cos^2 \eta_H/2 + q} \leq 1 \quad (4.6)$$

4.2 $f(u) = 0$ の根が全て実数となる場合

case (a), (b), (d) の場合がこれにあたる。この場合には古典力学のケプラー軌道に対応する第 1 種軌道と $r \rightarrow 0$ へ落下し続ける第 2 種軌道が存在する。まず第 1 種軌道を §4.2.1 で議論し、次に第 2 種軌道を §4.2.2 で議論する。また、以下では $f(u) = 0$ の根の大小関係を $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_4$ とする。

4.2.1 第 1 種軌道 (ケプラータイプ)

ここでは u の範囲が case (a) で $u_2 \leq u \leq u_3$ または case (d) で $0 < u < u_3$ であるような軌道を考える。この軌道は case (b) では起こりえない。

まず u_2, u_3 を Schwarzschild 時空での対応する軌道にならって通径 l と離心率 e を用いて次のように書く

$$u_2 = \frac{1-e}{l}, \quad u_3 = \frac{1+e}{l} \quad (4.7)$$

ただし $l > 0$ 。 e の範囲は case (a) では $0 < e < 1$ であり、case (d) では $e > 1$ である。結局この 2 つのケースの違いは e の範囲のみである。 $\mu = M/l > 0$, $\lambda = q/l > 0$, $q = |q^2|/M$ とすれば解と係数の関係から残った 2 根 u_1, u_4 は次の式から得られる

$$u_1 + u_4 = \frac{-2}{\lambda l} (1 + \lambda) < 0, \quad u_1 u_4 = \frac{-1}{\mu \lambda (1-e^2)} \frac{1-E^2}{L^2} < 0 \quad (4.8)$$

解と係数の関係をからさらに E^2, L^2 を e, l, μ, λ で表わす関係式を導くことができる。また $u_3 \leq u_4$ と仮定したから次の条件式も得られる

$$\mathcal{D} \equiv 1 - \mu(2(3+e) + (3+e)^2 \lambda + 4(1+e)\lambda^2) \geq 0 \quad (4.9)$$

この条件が満足されるときはいつでも $L^2 > 0$ や $E^2 < 1$ (case (a)), $E^2 > 1$ (case (d)) といった E, L に関する条件が満足されることを確かめることができる。

さて、Kepler 軌道にならって u を次の式のように新しい変数 χ の関数として書くことにする

$$u = \frac{1}{l} (1 + e \cos \chi) \quad \text{ただし} \quad u = u_3 \text{ のとき} \quad \chi = 0 + 2n\pi, \quad u = u_2 \text{ のとき} \quad \chi = \pi + 2n\pi \quad (4.10)$$

このとき、 $e > 0, \mu > 0, \lambda > 0$ であるから、 $\mathcal{D} \neq 0$ のときは (2.5) 式より次の式が導かれる

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mathcal{D}}{1+\lambda} \left(1 + a \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) \left(1 - b \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) \quad (4.11)$$

$$\text{ただし} \quad ab = \frac{4e^2 \mu (1+\lambda) \lambda}{\mathcal{D}} > 0, \quad a-b = \frac{4e\mu (1+(2+e)\lambda) (1+\lambda)}{\mathcal{D}} > 0$$

ここで a, b が $a > 0, 0 < b < 1$ となることが示される。このことに注意すると (4.11) 式はさらに次の楕円積分に帰着させることができる

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{1+\lambda}{D(1+a)}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \quad \text{ただし } k^2 = \frac{b+a}{1+a}, \quad \sin^2 \psi = \frac{(1+a) \sin^2 \chi/2}{1+a \sin^2 \chi/2} \quad (4.12)$$

The special case of $u_2 = u_3$

case (a) で $u_2 = u_3 \equiv r_c$ となる時 $e = 0$ である。case (d) ではこのような場合は起こりえない。この場合でも (4.11) 式を用いることができ、軌道はある半径 r_c の安定した円軌道になる。一方 r_c は次の 3 次方程式の根として得られる

$$Mr_c^3 + (Mq - L^2)r_c^2 + 3ML^2r_c + 2ML^2q \equiv g(r_c) = 0 \quad (4.13)$$

この方程式 $g(r_c) = 0$ の根は 2 つの正実根と 1 つの負実根をとる。負根は意味をなさないから、Fig.1(a) を考えると $g(r_c) = 0, r_c > 0$ なる可能な 2 つの r について、その小さい方つまり $u_3 = u_4$ となる時不安定円軌道、その大きい方つまり $u_2 = u_3$ となる時安定円軌道となることがわかる。

The special case of $u_3 = u_4$

$u_3 = u_4$ のときは case (a), (d) の両方で起こりうる。このとき (4.9) 式より $D = 0$ となることがわかる。そのため (4.11) 式は次のように書き直すことができる

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 = 4e\mu(1+(2+e)\lambda) \sin^2 \frac{\chi}{2} \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}\right), \quad \text{ただし } k^2 = \frac{e\lambda}{1+(2+e)\lambda} \quad (4.14)$$

k^2 の範囲は $\lambda > 0, e > 0$ より $0 < k^2 < 1$ となる。そこで $\zeta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi/2}$ とおくと φ は容易に得られ、積分定数を $\chi = \pi$ とき $\varphi = 0$ となるように選ぶと

$$\varphi = \frac{-1}{\sqrt{4e\mu(1+(2+e)\lambda)}} \log \left(\frac{\zeta + \cos \chi/2}{\zeta - \cos \chi/2} \right) \quad (4.15)$$

4.2.2 第 2 種軌道

$u \geq u_4$ での運動を考えよう。この軌道は case (a), (b), (d) のいずれの場合でも、同様な方法で求めることができる。(2.5) 式は次のおきかえをすることにより、楕円積分に帰着させることができる

$$k^2 = \frac{(u_3 - u_2)(u_4 - u_1)}{(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}, \quad \sin^2 \psi = \frac{(u_3 - u_1)(u - u_4)}{(u_4 - u_1)(u - u_3)} \quad (4.16)$$

$\sin^2 \psi$ の範囲は $u = u_4$ とき $\sin^2 \psi = 0$ で、 $u = \infty$ とき $\sin^2 \psi = \frac{u_3 - u_1}{u_4 - u_1} < 1$ であるから、Jacobi の楕円積分 $\mathcal{F}(\psi, k)$ を用いて φ は次のように書かれる

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{qM(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}} \mathcal{F}(\psi, k), \quad \text{ただし } \mathcal{F}(\psi, k) \equiv \int_0^\psi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (4.17)$$

The special case of $u_1 = u_2$

このケースは case (b) で $u_1 = u_2 \equiv p < 0$ のとき起こりうる。case (a), (d) ではこのことは起こりえない。このとき $l < 0, 0 < e < 1$ として (4.7) 式と同じように u_2, u_3 をおくと、解と係数の関係から次のように u_4 を定めることができる

$$u_4 = \frac{-1}{l\lambda} (2 + (3+e)\lambda) > 0 \quad (4.18)$$

ただし $\mu = M/l, \lambda = q/l, q = |g \cdot|^2/M$ とした。さらに

$$u = p + (u_3 - p) \tan^2 \xi/2, \quad \text{ただし } u = u_4 \text{ とき } \xi = 2 \arctan \sqrt{\frac{u_4 - p}{u_3 - p}} > 0, \quad u = \infty \text{ とき } \xi = \pi \quad (4.19)$$

このようにおきかえると (2.5) 式より φ は楕円積分で書くことができる。 $qM(u_3 - p)(u_4 - p) = -4e\mu(1 + (2-e)\lambda) > 0$ であるから、次のように得られる

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-4e\mu(1+(2-e)\lambda)}} \int \frac{d\xi}{\tan \xi/2 \sqrt{(\sin^2 \xi/2 - \cos^2 \xi/2)(k^2 \sin^2 \xi/2 - 1)}}, \quad \text{ただし } k^2 = 1 + \frac{u_3 - p}{u_4 - p} > 1 \quad (4.20)$$

The special case of $u_1 = u_2 = u_3, u_2 = u_3 = u_4$

このケースは case (a), (b) のそれぞれで生じ、そのとき

$$\text{case (a) で } u_1 = \frac{-1}{l\lambda} (2 + 3\lambda) < 0, \quad \text{case (b) で } u_4 = \frac{-1}{l\lambda} (2 + 3\lambda) > 0 \quad (4.21)$$

それ以外の根は $1/l$ となる。つまり case (a), (b) は q, l の大きさのみが異なっている。よって (2.5) 式は

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = qM \left(u + \frac{2+3\lambda}{l\lambda}\right) \left(u - \frac{1}{l}\right)^3 \quad (4.22)$$

これを積分するために、 $r \rightarrow 0$ のとき $\varphi = 0$ となるように積分定数 φ_c を選ぶと、次のように導かれる

$$u = \frac{1}{l} + \frac{2}{M(1+2\lambda)((\varphi - \varphi_c)^2 - \varphi_c^2)}, \quad \varphi_c = \frac{-1}{1+2\lambda} \sqrt{\frac{q}{M}} \quad (4.23)$$

The special case of $u_2 = u_3$

このケースは case (a), (b) で $u_2 = u_3 \equiv p > 0$ となるとき起こりうる。case (d) ではこのことは起こりえない。このとき (4.17) 式で $k^2 = 0$ となるから積分定数として $\varphi = \varphi_0$ のとき $r = 0$ となるようにとると

$$\psi = \frac{\sqrt{qM(u_4 - p)(p - u_1)}}{2} (\varphi - \varphi_0) \quad (4.24)$$

The special case of $u_3 = u_4$

このケースは case (a), (d) で $u_3 = u_4 \equiv p$ となるとき起こりうる。case (b) ではこのことは起こりえない。(4.7) 式のように u_2, u_3 をおくと、 u_1 は次のように書けることができる

$$u_1 = -\frac{1}{\lambda l} (2 + (3+e)\lambda) < 0 \quad (4.25)$$

次のようにおきかえると

$$u = p + (p - u_2) \tan^2 \xi/2, \quad \text{ただし } u = p \text{ とき } \xi = 0, \quad u = \infty \text{ とき } \xi = \pi \quad (4.26)$$

すると (2.5) 式より φ は次のように導かれる

$$\varphi = \frac{-1}{\sqrt{4e\mu(1+(2+e)\lambda)}} \log \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi/2}}{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi/2}} \right), \quad \text{ただし } k^2 = \frac{u_2 - u_1}{p - u_1} \quad (4.27)$$

また、Schwarzschild と異なり $u_2 \leq u \leq p$ の式 (4.15) と $u \geq p$ の式 (4.27) は異なる式となることがわかる。

4.3 一組以上の虚数解をとる場合

ここでは $f(u) = 0$ の 4 根のうち 2 つが次のようにおけるような虚数根をとる場合を考える

$$u_1, u_2 = \frac{1}{l} (1 \pm ie), \quad \text{ただし } e > 0 \quad (4.28)$$

すると $q = |q|^2/M$, $\mu = M/l$, $\lambda = q/l$ として解と係数の関係から、 u_3, u_4 の関係式が得られる

$$u_3 + u_4 = -\frac{2}{\lambda l} (1 + \lambda), \quad u_3 u_4 = \frac{1}{\mu \lambda (1 + e^2)} \frac{E^2 - 1}{L^2} \quad (4.29)$$

まず、 $E^2 < 1$ とすれば $u_3 u_4 < 0$ となるから u_3, u_4 は符号の異なる実数となる。この場合が case (c) である。一方、 $E^2 > 1$ のとき $u_3 u_4 > 0$ となるから u_3, u_4 は虚数か符号の同じ実数をとることができる。まず、 $u_3 u_4$ がともに負または虚数をとる場合が case (f) である。次に u_3, u_4 がともに正のときは、 $u_3 < u_4$ として $f(u) > 0$ の範囲は $0 < u < u_3$ と $u > u_4$ となる。この場合が case (e) である。

さらに u_3, u_4 を導くのに用いなかった、解と係数の関係から E^2, L^2 を e, l, μ, λ の式で書くことができる。上の分類では、解析的に議論できなかったのでこの E, L が実数となるための条件を考慮していない。したがって、実際には数値的にその条件を満たすかを調べる必要がある。

さて、次のように u を ξ で置きかえる

$$u = \frac{1}{l} (1 + e \tan \xi/2), \quad \text{ただし } u = 0 \text{ とき } \xi = 2 \arctan(-1/e) < 0, \quad u = \infty \text{ とき } \xi = \pi \quad (4.30)$$

この置きかえにより (2.5) 式は、 $\nu = 1 - \mu(6 + 9\lambda + (4 + e^2)\lambda^2)$ として

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = 2(a + b \sin \xi + c \cos \xi), \quad \text{ただし } a = e^2 \mu \lambda - \frac{\nu}{1 + \lambda}, \quad b = 2e\mu(1 + 2\lambda), \quad c = -\left(e^2 \mu \lambda + \frac{\nu}{1 + \lambda}\right) \quad (4.31)$$

すると φ の積分は $D = (b^2 + c^2)$ と a の大小関係により、次のように楕円積分に帰着させることができる

$$D > a \text{ とき } \varphi = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{D + a}{2D}, \quad \sin^2 \psi = \frac{D - b \sin \xi - c \cos \xi}{D + a} \quad (4.32)$$

$$D < a \text{ とき } \varphi = \sqrt{\frac{2}{D + a}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{2D}{D + a}, \quad \sin^2 \psi = \frac{D - b \sin \xi - c \cos \xi}{2D}$$

ただし u の範囲から積分範囲を数値的に決める必要がある。また特に $E^2 < 1$ のときは常に $D > a$ となる。

5 massless 粒子の軌道

5.1 動径方向のみの軌道

ここでは動径方向のみを考えるから $L = 0$ である。そこで (2.4) 式ではなく (2.2), (2.3) 式からはじめる必要がある。

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{dr}{dt} = \pm \frac{\Delta}{r^2} \quad (5.1)$$

これを積分すると、古典論での $t = \pm r$ に対応して

$$t = \pm r + \text{constant}$$

ただし $r_{\pm} = \int \frac{\Delta}{r^2} dr = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log|r - r_-|$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - q^2}$ (5.2)

もちろんこれは q^2 の大きさを除けば Reissner-Nordström 時空に完全に一致する。しかしここでは $q^2 < 0$ であるから、 $r_+ > 0, r_- < 0$ となる。加えて、 q^2 の大きさに制限がないことに注意するべきである。

5.2 ひとつの実根をとる場合 (case (A))

(2.4) 式より、 $q = |q^2|/M$ としてこのときの正根 u_c は次のようになる

$$u_c = \frac{-3}{4q} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8q}{9M}} \right), \quad r_c = \frac{1}{u_c} = \frac{3M}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8q}{9M}} \right) \quad (5.3)$$

これを用いると (2.4) 式は次のように書き直せる

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (u - u_c)^2 \left(qMu^2 + 2M(1 + qu_c)u + u_cM(1 + qu_c) \right) \quad (5.4)$$

対応する Schwarzschild での軌道にならって u を次のように新しい変数 ζ の関数として書くと、次ぎのように書き直せる

$$u > u_c \text{ とき } \zeta = \frac{1}{u - u_c}, \quad \text{ただし } u \rightarrow u_c \text{ とき } \zeta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty \text{ とき } \zeta \rightarrow 0$$

$$u < u_c \text{ とき } -\zeta = \frac{1}{u - u_c}, \quad \text{ただし } u \rightarrow 0 \text{ とき } \zeta \rightarrow 1/u_c, \quad u \rightarrow u_c \text{ とき } \zeta \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\varphi} \right)^2 = M(\alpha\zeta^2 \pm b\zeta + q), \quad \text{ただし } b = 2(1 + 2qu_c) > 0, \quad c = u_c(3 + 4qu_c) > 0 \quad (5.5)$$

ただし復号は $u > u_c$ のとき上を、 $u < u_c$ のとき下をとる。これより容易に φ を求めることができ

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{cM}} \log \left(2\sqrt{c(q \pm b\zeta + \alpha\zeta^2)} + 2c\zeta \pm b \right) + \text{const} \quad (5.6)$$

5.3 2つの正実根をとる場合 (case (B))

以下では正実根の2つを u_3, u_4 とし、 $u_3 < u_4$ とする。残る u_3, u_4 は解と係数の関係から必ず負実数となる。この場合には u の範囲が $0 < u < u_3$ の第1種軌道と $u > u_4$ の第2種軌道が存在する。まず §5.3.1 で第1種軌道を、次に §5.3.2 で第2種軌道を議論する

5.3.1 第1種軌道

$u_3 = 1/p, p > 0$ とおき、 $0 \leq u \leq u_3$ の範囲で $\kappa < -1$ として、対応する Schwarzschild での軌道にならって u を次の新しい変数 χ の関数として、次のようにおく

$$u - u_3 = -\frac{\kappa + 1}{p} (1 + \cos \chi) \quad (5.7)$$

すると $\chi = \pi$ とき $u = u_3$ となるように κ を選ぶことができる。さらに $\chi = 0$ とき $u = \chi_{\pm\infty}$ とすれば κ との次の関係式が導かれる

$$\cos \chi_{\pm\infty} = -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \quad \text{より } \kappa > -\frac{1}{2} \quad (5.8)$$

一方、(5.7) 式は $\kappa > -1/2$ とすれば、次式を満たすように書き換えることができる

$$u - u_2 = \frac{1 + \kappa}{p}(1 - \cos \chi), \quad u_2 = -\frac{1 + 2\kappa}{p} < 0 \quad (5.9)$$

これより解と係数の関係から $\mu = M/p > 0$, $\lambda = q/p > 0$, $q = |q \cdot^2|/M > 0$ として、残った u_1, u_4 の関係式が得られる

$$u_1 + u_4 = \frac{-2}{p\lambda}(1 - \kappa\lambda), \quad u_1 u_4 = \frac{2\kappa + 1}{p^2 \kappa \lambda}(1 - \kappa\lambda) < 0, \quad \text{ただし } u_3 < u_4 \text{ より } \frac{1}{p^2 \kappa \lambda}(1 + 4\kappa - 4\kappa^2 \lambda) < 0 \quad (5.10)$$

さて、(2.4) 式を (5.7) 式でおきかえると次のように変型できる

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 = c + 4\mu(\kappa + 1)(1 - (3\kappa + 1)\lambda) \sin^2 \chi/2 - 4\mu(\kappa + 1)^2 \lambda \sin^4 \chi/2, \quad -c = \mu \frac{1 + 2\kappa}{\kappa} (1 - 2\kappa + 4\lambda \kappa^2) \quad (5.11)$$

$c < 0$ のとき φ を求めるには数値積分をする必要があるが、 $c > 0$ となるときは楕円積分に帰着させることができる場合がある。 $c > 0$ となるための κ の範囲は次のようになる

$$\lambda < 1/4 \text{ とき } \kappa < 0 \text{ または } 1 - 2\kappa + 4\lambda \kappa^2 > 0, \quad \lambda > 1/4 \text{ とき } \kappa < -1/2 \text{ または } \kappa > 0 \quad (5.12)$$

一方、解と係数の関係から次の関係も導くことができる

$$-4\mu\lambda\kappa^3 + 4\mu(1 - \lambda)\kappa^2 + (1 + 2\mu(1 - \lambda))\kappa + \mu = 0, \quad \kappa \neq 0 \quad (5.13)$$

よって κ は $\kappa > -1/2$, (5.10), (5.13) を満たすように決めなければならない。しかし大小関係を解析的に求めることは容易ではないのでここでは数値的に議論するにとどめる。

この軌道は太陽近傍を通過する光の偏向を表わす軌道と考えることができる。そこで例えば、 M を太陽質量、 p を太陽半径として (5.13) 式から κ を求めると $|q \cdot^2| < 10^5$ の範囲では $|q \cdot^2|$ によらず次のような値を得る

$$\kappa \sim -1.1 \times 10^5, \quad -10^{-6}, \quad Mp/q \quad (5.14)$$

したがってとりうる κ の値は δ を微小量として $\kappa \sim 0 - \delta$ となる。このとき $c > 0$ である。

以下、 $\kappa \sim 0 - \delta$ として楕円積分に帰着させる方法について述べる。 $p, \mu, \kappa, \lambda, c$ を用いれば (2.4) 式は次のように書きかえることができる

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 = c \left(1 + a \sin^2 \frac{\chi}{2}\right) \left(1 - b \sin^2 \frac{\chi}{2}\right), \quad ab = \frac{4(1 + \kappa)^2 \mu \lambda}{c} > 0, \quad a - b = \frac{4(1 + \kappa)\mu(1 - (1 + 3\kappa)\lambda)}{c} \quad (5.15)$$

このとき $a > 0, 0 < b < 1$ となる。さらに次のように置きかえると楕円積分に帰着させることができる

$$k^2 = \frac{b + a}{1 + a}, \quad \sin^2 \psi = \frac{(1 + a) \sin^2 \chi/2}{1 + a \sin^2 \chi/2}, \quad \text{ただし } 0 < \sin^2 \psi < \frac{(1 + a)(2\kappa + 1)}{2\kappa + 1 + a(2\kappa + 1)} \quad (5.16)$$

Jacobi の楕円積分 $\mathcal{K}(k)$ を用い、積分定数として $u = 1/p$ とき $\varphi = 0$ となるように選ぶと、 φ は次のようになる

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{c(1 + a)}} \left(\mathcal{K}(k) - \mathcal{F}(\chi/2, k) \right), \quad \mathcal{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (5.17)$$

5.3.2 第2種軌道

$u_3 = 1/p, p > 0$ とおき、 $u \geq u_4$ の範囲で $\zeta > 1$ として u を次のようにおく

$$u - u_3 = \frac{\zeta - 1}{p} (\tan^2 \chi/2) \quad (5.18)$$

このとき $u = \infty$ のとき $\chi = \pi$ となる。いま $\chi = 0$ とき $u = u_4$ となるように ζ を選ばば $u_4 = \zeta/p$ となる。これより解と係数の関係から $\mu = M/p > 0$, $\lambda = q/p > 0$, $q = |q \cdot^2|/M > 0$ として、残りの根である u_1, u_2 の関係式が得られ

$$u_1 + u_2 = \frac{-1}{p\lambda} (2 + (\zeta + 1)) < 0, \quad u_1 u_2 = \frac{(2 + (\zeta + 1))\lambda}{p^2 (\zeta + 1)\lambda} > 0 \quad (5.19)$$

解と係数の関係からさらに次の関係式が得られる

$$\mu\lambda\zeta^3 + 2\mu\lambda\zeta^2 - (1 - 2\mu(1 + \lambda))\zeta - (1 - (2 + \lambda)\mu) = 0 \quad (5.20)$$

したがって ζ はこの方程式の解で $\zeta > 1$ を満たすものである。そうした ζ はすべて (2.4) 式から得られる φ の式を楕円積分に帰着させることができる。 $r = 0$ で $\varphi = 0$ となるように積分定数を選べば $\mathcal{F}(\psi, k)$ を用いて

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{2}{a\mu}} \mathcal{F}(\psi, k) \\ \text{ただし } \cos \psi &= \frac{x^2 - a}{x^2 + a}, \quad k^2 = \frac{a - b}{2a}, \quad a^2 = \frac{A + B + 2C}{2C} > 0, \quad b = \frac{A - B - 4C}{4C}, \quad x = \tan \chi, \\ A &= \frac{2 - \zeta}{1 + \zeta} (\lambda\zeta^3 + (1 + 2\lambda)\zeta + 2 + \lambda) > 0, \quad B = (3\lambda + (2 + \lambda))(\zeta - 1) > 0, \quad C = \lambda(\zeta - 1)^2 > 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.4 1組以上の複素共役根をとる場合

ここでは $f(u) = 0$ が虚数根をとる場合を考える。このとき残りの2根は、解と係数の関係から共に負か虚数根をとり、正根をとることはありえない。そこで虚数根の2つを u_1, u_2 として、次のようにおく

$$u_1, u_2 = \frac{1}{l}(1 \pm ie) \quad (5.22)$$

ただし $e > 0, l \neq 0$ である。さらに $\mu = M/l, \lambda = q/l, q = |q^2|/M$ とすれば解と係数の関係により

$$u_3 + u_4 = \frac{-2}{l\lambda}(1 + \lambda), \quad u_3 u_4 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \cdot \frac{1 + e^2}{l^2} > 0 \quad (5.23)$$

そして (2.4) 式について u を次のような ξ の関数で書くことにする

$$u = \frac{1}{l}(1 + e \tan \xi/2), \quad u = 0 \text{ とき } \xi = \arctan(-1/e) < 0, \quad u = \infty \text{ とき } \xi = \pi \quad (5.24)$$

すると (2.4) 式は $\nu = 3 + e^2 + (4 + e^2)\lambda$ を用いて、次のように書き直せる

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = 2\mu(a + b \sin \xi + c \cos \xi), \quad \text{ただし } a = \nu + e^2\lambda, \quad b = 2e(1 + \lambda), \quad c = \nu - e^2\lambda \quad (5.25)$$

すると φ の積分は $D(=b^2 + c^2)$ と a の大小関係により、次のように楕円積分に帰着させることができる

$$\begin{aligned} D > a \text{ とき } \quad \varphi &= \frac{1}{\sqrt{\mu D}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{D + a}{2D}, \quad \sin^2 \psi = \frac{D - b \sin \xi - c \cos \xi}{D + a} \\ D < a \text{ とき } \quad \varphi &= \sqrt{\frac{2}{\mu(D + a)}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k^2 = \frac{2D}{D + a}, \quad \sin^2 \psi = \frac{D - b \sin \xi - c \cos \xi}{2D} \end{aligned} \quad (5.26)$$

ただし u の範囲にあてはまるように、積分範囲を数値的に決める必要がある。

6 Summary and conclusion

この論文において、我々は PGT のモデルで複素 Einstein-Yang-Mills 理論として解釈できるものについて、その一厳密解のシリーズ、Kerr-Newman chain のうち Schwarzschild 解とよく似た時空構造を与えるものを取り上げ、Schwarzschild 時空との比較に重点を置き、その考えられる全ての可能な場合について議論してきた。

我々の扱った時空は、Lorentz gauge 場を生み出す2種類のベクトルゲージチャージと質量をもつ物体が、真空中につくる時空と解釈される。我々はこの時空中にゲージ荷を持たないテスト粒子を飛ばしその軌道を調べるという方法により、解が与える本来の時空構造を調査した。

我々はこの方法による調査により、質量を持ったテスト粒子や持たない光子の運動について、考えられるほとんど全ての場合について考察した。その結果、見掛け上(数式の上で)は全く違って見える我々の時空と Schwarzschild のそれとは定性的には同じで、ただ定量的には我々の時空はゲージ荷による効果が入るのでこの値により、テスト粒子の運動が Schwarzschild のそれよりズレてくるのが、調査した全ての場合について確認された。

最後に、この論文では Schwarzschild-like な時空の構造を調べるため、ソースの自転のない場合を議論してきたが、さらにソースの自転のある Kerr-like な時空の構造を調べることが差し当たっての今後の課題である。

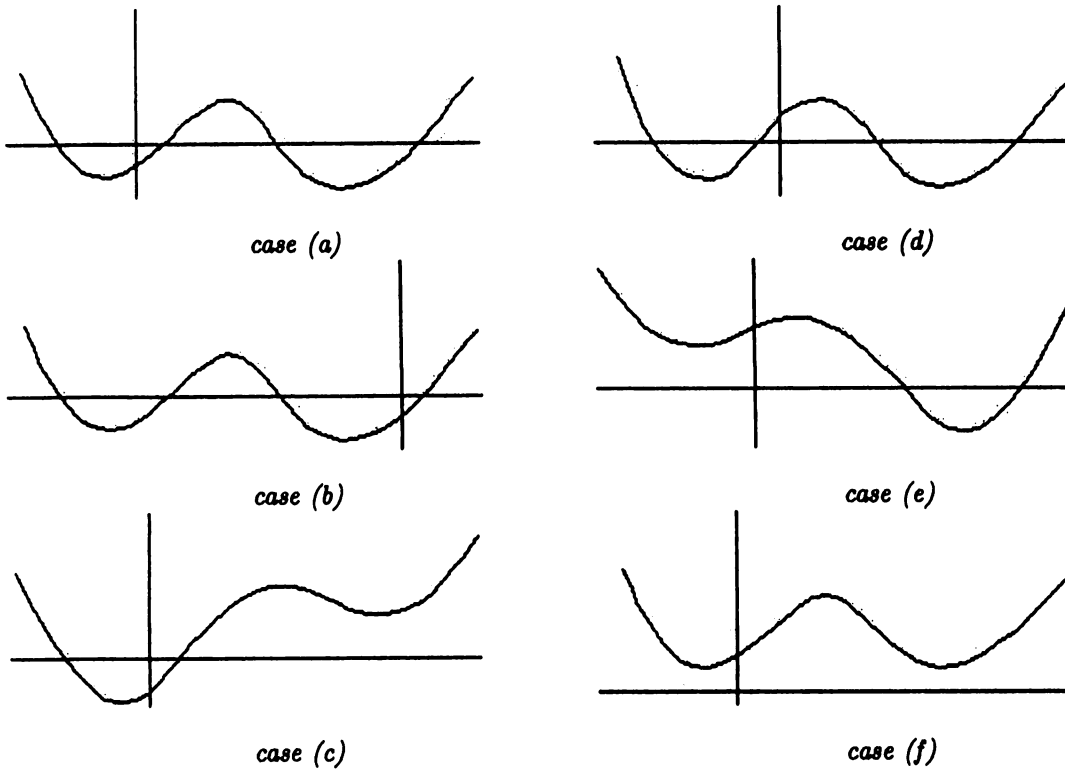


図 1: massive 粒子の軌道の分類

それぞれのグラフはいずれも縦軸が $f(u)$ 、横軸が u である。運動は $f(u) \geq 0, u \geq 0$ の領域でのみ生じる。 $u < 0$ の領域は物理的には意味を為さない。それぞれの case は重根をとる場合も含まれる。軌道は 2 重・3 重根をとりうるが、4 重根はとりえない

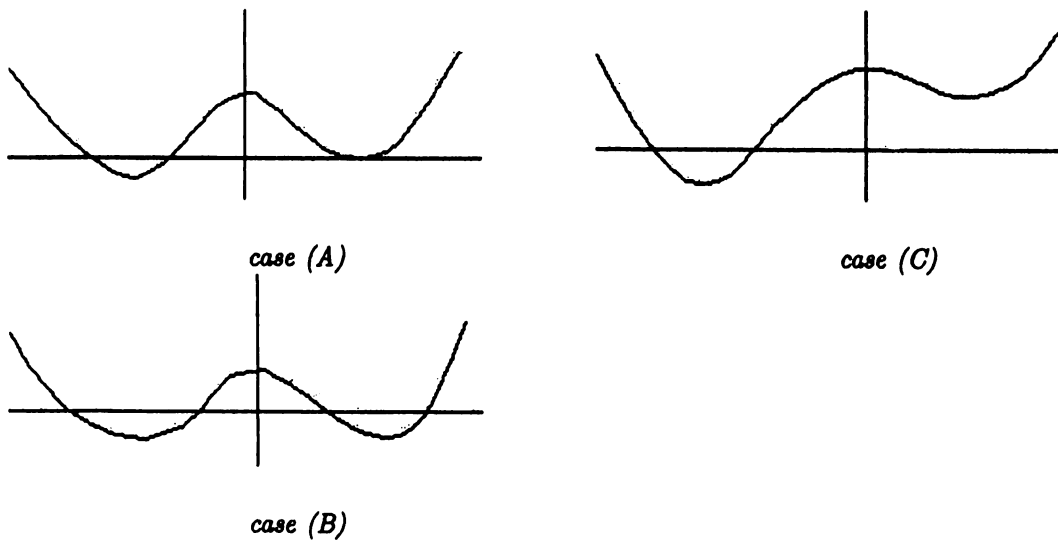


図 2: massless 粒子の軌道の分類

それぞれのグラフはいずれも縦軸が $f(u)$ 、横軸が u である。運動は $f(u) \geq 0, u \geq 0$ の領域でのみ生じる。 $u < 0$ の領域は物理的には意味を為さない。このグラフでは重根を分けて、分類している

References

- 1) R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- 2) T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
- 3) K. Hayashi, *Prog. Theor. Phys.* **39**, 494 (1968).
- 4) S. Nakariki, *Nouvo Cimento* **106B**, 315 (1991).
- 5) S. Nakariki, *J. Math. Phys.* **32**, 1612 (1991).
- 6) S. Nakariki, M. Beppu and Y. Kazama, *Bulle. Okayama Univ. Science* **29A**, 67 (1994)
- 7) S. Koyama and S. Nakariki, *Bulle. Okayama Univ. Science* **31A**, 53 (1995)
- 8) K. Yamazaki, 修士論文, 岡山理科大学理学研究科応用物理学専攻 (1997)
- 9) K. Yamakita, 修士論文, 岡山理科大学理学研究科応用物理学専攻 (1998)
- 10) S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1983).
- 11) C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge Univ. Press, Revised edition 1993).

Spacetime structure of Schwarzschild-like solution in PGT

Kazushige YAMAZAKI , Shin-ichi NAKARIKI * , Kanji TANAKA **
and Tutomu TASHIRO *

Department of System Science, Faculty of Engineering, Graduate School of Engineering

** Department of Simulation Physics, Faculty of Informatics*

*** Department of Applied Physics, Faculty of Science, Graduate School of Science*

Okayama University of Science

Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan

(Received November 4, 1999)

We take up a series of exact solutions (called Kerr–Newman chain), which are solutions in Poincaré gauge theory (PGT) being reducible to *complex Einstein–Maxwell* theory.

The Kerr–Newman chain is a series of solutions in PGT such that have two kinds of gauge charges which create a Lorentz gauge field. The spacetimes represented by the chain are also solutions of Einstein’s gravitational field equations. In this paper, we treat a case in which the spacetimes are Schwarzschild-like, and discuss the structure of solutions together with the old results.